*

Om erkjennelsesteoriens grunnleggende prinsipper.

Viten og tro

*

Morten Harboe Rognes

2023

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Innledning

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Innledning

Vi skal i denne innledningen gi en mer uformell redegjørelse for innholdet i denne avhandlingen, samt en redegjørelse for - igjen av uformell art - for de grunnleggende logiske og ontologiske forutsetningene for de emner vi tar opp i selve avhandlingen.

Det mest fremtredende trekk ved dette skrift og forøvrig nesten alle våre skrifter er det man kan kalle det ontologiske utgangspunkt.

For det første antar vi at det finnes logisk mulige verdener og at det blandt disse finnes en entydig bestemt verden, nemlig den virkelige verden. Naturligvis tenker vi oss at de fysiske gjenstandene i den virkelige verden har utstrekning i rommet og at deres posisjon i forhold til hverandre kan endre seg med tiden. Blandt noen av de fysiske ting er det objekter som har en stor grad av soliditet og som endrer seg svært lite i løpet av et langt tidsrom. Andre materielle objekter kan være av mer "flyktige" og eksisterer bare i et kort tidsrom. Blandt alle de entititer som befinner seg i den aktuelle verden har vi mennesker som fødes, utvikler seg til handlende personer, strever etter å overleve så godt de kan, som lider, elsker, lever og dør. Et menneske har et legeme og dette legemet samt dets deler kan regnes som fysiske objekter. Fra dette kan man ikke slutte at et mennesket er et materielt eller fysisk objekt. Et menneske kan handle, legge planer, forsøke å oppnå mål det har satt seg, velge mellom forskjellige mål og veier det kan gå for oppnå disse mål. Det kan motsette seg andre som forsøker å forhindre det fra å nå sine mål og tenke ut alternativer som likevel gjør det mulig å komme frem. Stoler, stener, bord og alt man forøvrig kan nevne av rent fysiske objekter kan ikke gjøre noe av dette. I kraft av sin tenkeevne og frihet virker det derfor ytterst eiendommelig å karakterisere et menneske som en fysisk gjenstand.

Fra en logisk synsvinkel er skillet mellom et objekt og egenskaper ved dette objektet avgjørende. Et objekt er noe som har egenskaper og enhver ting som har egenskaper må nødvendigvis være et objekt. Har man for seg en egenskap, for eksempel egenskapen å være et rødt objekt, kan man alltid snakke om de objektene som har denne egenskapen i den virkelige verden. Men for noen objekters vedkommende kan det være at de har denne egenskapen i den virkelige verden, men ikke i andre logisk mulige verdener. Er w en mulig verden og E en egenskap kan man kalle mengden av alle de objekter som har denne egenskapen E i verdenen w for *ekstensjonen til E i verdenen w*. De to begrepene mengde og egenskap er følgelig nær knyttet sammen. Man kan knapt tenke seg en egenskap uten å tenke seg mengden av alle de objektene som har denne egenskapen i den aktuelle verden. Og tenker man seg en mengde av objekter er det vanskelig å tenke seg annet enn at det da må finnes en egenskap som alle objektene i mengden har, og som dessuten er slik at hvis et eller annet objekt har denne egenskap så er det også med i mengden.

Disse tre kategoriene av størrelser er derfor grunnleggende i vår teori , ved siden av mengden av logisk mulige verdener og den aktuelle verden: objekter, mengder og egenskaper.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Man kan si at mennesker, dyr, vekster og døde fysiske ting er objekter. Men også at enhver mengde og enhver egenskap er et objekt. På den annen side er ikke ethvert objekt nødvendigvis en mengde eller en egenskap. Det virker besyndelig å si at for eksempel et menneske eller et hus er en mengde. Det er derfor nærliggende, om ikke fullstendig selvfølgelig, å tenke seg at det finnes objekter som ikke er mengder. Vi skal kalle ethvert objekt som ikke er en mengde for et *urindivid*. Man kan stille en lang rekke spørsmål om urindivider. Akkurat her vil vi bare konstatere at det vil finnes talløse objekter som hverken er mengder eller egenskaper og som derfor er urindivider i den betydning vi har forklart. Man kan si at mulige verdener, egenskaper og mengder er *abstrakte* objekter. Det følger da at alle objekter som ikke er abstrakte er urindivider. Imidlertid følger det ikke at alle abstrakte gjenstander er ikke-urindivider, dvs. mengder. Det er forsåvidt intet som tilsier at egenskaper og mulige verdener dypest sett faktisk er mengder.

Vi skal nå forsøke å kommentere nærmere de grunnleggende kategoriene av entiteter[1] som vi så langt har nevnt. La oss starte med kategorien av mengder. Man kan stille en rekke spørsmål i forbindelse med dem. Hvor mange mengder finnes det egentlig, og - fremfor alt - hvilke mengder kan vi slutte at eksisterer gitt at andre eksisterer? Kan man angi noe generelle og relativt innlysende lover som besvarer disse spørsmål?

La oss, før vi forsøker å besvare det nest siste spørsmålet, nevne noen grunnleggende og viktige forhold. Er noe en mengde vil det altid gi mening å spørre om et objekt er med i den eller ikke. Ved siden av begrepet 'mengde' må vi derfor også operere med relasjonen ' x er et element i mengden y'. Det følger da at dersom noe er et element i, eller et medlem av, mengden x så må selvfølgelig x være en mengde. Det følger fra dette at dersom noe ikke er en mengde, med andre ord er et urindivid, kan det ikke inneholde noen elementer. En mengde som ikke inneholder noen elementer kalles for tom. Det virker rimelig å hevde at det finnes en og bare en mengde som er tom.

Vi skal straks ta for oss spørsmålet om hvilke mengder vi kan slutte at eksisterer gitt at andre eksisterer, men før dette vil vi nevne det følgende prinsipp som virker ytterst rimelig. Det sier at dersom x og y er ikke-tomme mengder og ethvert element i x er et element i y, og omvendt, så er de to mengdene identiske. Dette gir en et *identitets-kriterium* for mengder siden det følger at to ikke-tomme mengder er identiske hvis og bare hvis de har nøyaktig de samme elementer og identiteten til den tomme mengde er gitt i og med at den ikke innholder noen elementer. Dette prinsipp kalles ofte for *ekstensjonalitets aksiomet.* Koekstensjonelle mengder er identiske.

La oss så gå over til grunnsetninger som sier noe om hvilke mengder som eksisterer gitt at andre gjør det. Først en definisjon: Vi sier at en mengde er inkludert i en annen dersom alle elementene i den første mengden er elementer i den andre. Det prinsipp vi nå er interessert i sier at dersom x er en mengde og E en egenskap så finnes det en mengde y som er identisk med mengden av alle de elementer i x som har egenskapen E. Med andre ord sier prinsippet at dersom x er en mengde eksisterer også den den delmengden av x som som består av alle de elemntene i x som har egenskapen E. Er for eksempel mengden av naturlige tall en mengde som eksisterer kan man ved hjelp av dette prinsipp slutte at mengden av oddetall eksisterer. Likeledes at mengden av primtall eksisterer eller at mengden av like tall eksisterer.

1Det bør bemerkes at vi bruker uttrykkene "entitet", "objekt" og "mulig individ" synonymt. Hvis derfor noe omtales som et mulig individ impliserer ikke dette at dette er et individ i betydningen "et menneske" eller "en person".

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Det prinsippet, eller den grunnsetningen, vi nå har nevnt kalles ofte for *utsondringsaksiomet*. Man kunne også kalle det for delmengdeaksiomet. Det virker høyest eiendommelig om man skulle benekte dette prinsipp.

Den neste grunnsetningen vi vil nevne sier at dersom x er en mengde som bare inneholder mengder (med andre ord er x en *mengdefamilie*) så eksisterer også foreningsmengden av alle elementene i x. Merk at om a og b er to mengder så er foreningsmengden av disse to mengdene (også kalt summen eller unionen av dem) den mengden som inneholder alle elementene i a samt alle elementene i b. Er x en mengde familie er *foreningsmengden av alle elementene i x* mengden alle de objekter z som er med i et eller annet element i x. Denne grunnsetningen kalles for *foreningsmengdeaksiomet*. Også dette synes å være en påstand som det ved nøye ettertanke virker nærmest umulig å benekte.

Det er ytterligere noen prinsipper om mengder som vi vil nevne. Det første er det prinsipp som ofte går under navnet av *potensmengdeaksiomet*. La oss da først definere hva som menes med potensmengden til en mengde x. Dette er rett og slett mengden av alle de mengder som er inkludert i x, kort sagt mengden av alle delmengder av x. Hva potensmengde-aksiomet sier er da at dersom x er en mengde så eksisterer også potensmengden til x, dvs. det finnes en mengde y som er identisk med potensmengden til x. Også dette virker som en svært rimelig påstand som det ved ettertanke virker svært vanskelig å benekte. Det virker vanskelig å se for seg noe moteksempel til denne påstanden.

Vårt neste prinsipp kalles *substitusjonsaksiomet*. Anta x er en mengde da vil også y være en mengde om y er fremkommet fra x ved enten å fjerne visse elementer eller erstatte dem med andre. Sagt på en annen måte: Er x en mengde og F en funksjon så vil den mengden som består av alle de elementene som funksjonen F tilordner elementene i x også eksistere. Som ved de andre grunnsetningene om mengder som vi har nevnt virker det også vanskelig å benekte dette prinsipp.

Det siste grunnprinsippet i den gruppen av mengdeteoretiske aksiomer vi her betrakter er det såkalte *utvalgsaksiomet*. Dette påstår at dersom x er mengde av mengder der alle mengdene i x er ikke-tomme og ingen av mengdene har noen felles medlemmer finnes det en mengde som har nøyaktig ett element felles med hver av mengdene i x. Også denne påstanden virker det egentlig vanskelig å benekte, i alle fall etter nøyere ettertanke. Kort sagt har påstanden en apodiktisk, nødvendig, karakter, som den forøvrig deler med de andre grunnsetningene vi har nevnt.

De prinsippene om mengder som vi så langt har gjennomgått impliserer ikke at det finnes noen mengder i det hele tatt. Det dreier seg om påstander med den følgende form: "Dersom x er en mengde så finnes en annen mengde med visse egenskaper". Fra setninger av denne art kan man ikke slutte at det finnes mengder. Det er for eksempel ikke mulig å utlede fra de mengdeteoretiske prinsipper som så langt er nevnt at mengden av de personer som er bosatt i Oslo finnes eller for eksempel at det finnes en mengde som inneholder et og bare et element, nemlig den kulepennen som forfatteren av dette skrift skriver med nå. Det er imidlertid to meget beskjedne aksiomer som gjør det mulig å vise at i det minste endelige mengder finnes. Det første er en påstand som går under navnet *parmengde-aksiomet*. Denne påstanden sier at dersom x og y er vilkårlige objekter så finnes det en mengde z som inneholder elementene x og y og som bare inneholder dem. Det andre aksiomet er hva som kalles for *nullmengde-aksiomet*. Dette sier at det finnes en mengde x som ikke inneholder noen elementer og at

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

enhver mengde som ikke inneholder noen elementer er identisk med x. Kort sagt sier det at den tomme mengden finnes.

En enhetsmengde er per definisjon en mengde som inneholder ett og bare ett element. Enhetsmengden som inneholder x, der x er et eller annet objekt, kaller vi for enhetsmengden over x eller, om man vil, enhetsmengden med x som eneste element. Vi betegner den tomme mengden med "ø". La oss bemerke at enhver enhetsmengde finnes i følge det som vi ovenfor kalte parmengde-aksiomet. Derfor finnes enhetsmengden med ø som eneste element. Naturligvis er enhetsmengden med ø som eneste element en mengde som er forskjellig fra den tomme mengden. Videre vil enhetsmengden med enhetsmengden over ø som eneste element være forskjellig fra enhetsmengden over ø som i sin tur er forskjellig fra null-mengden. Betegner vi enhetsmengden over x med "{x}", ser man at vi på grunnlag av nullmengde-aksiomet og parmengde aksiomet kan bevise eksistensen av minst tre forskjellige mengder, nemlig ø, {ø} og {{ø}}. Ved hjelp av de andre aksiomene kan man for ethvert naturlig tall bevise eksistensen av en mengde som inneholder n elementer. Imidlertid er det rimelig å si at man fra de grunnsetningene om mengder som vi så langt har nevnt ikke kan utlede at det finnes uendelige mengder, dvs. mengder som inneholder uendelig mange elementer.

Den neste generelle grunnsetningen om mengder som vi betrakter er derfor en som eksplisitt sier dette. Setningen sier at det finnes en mengde som for det første inneholder nullmengden og for det andre er slik at dersom den inneholder en mengde x inneholder den også enhetsmengden med x som eneste element. Denne grunnsetningen kalles *uendelighets-aksiomet*. Setningen impliserer som man ganske raskt ser at det finnes det finnes en mengde som inneholder ø, {ø}, {{ø}}, ... osv. ad inf.

Det er nok et aksiom, eller grunnleggende prinsipp som det er svært naturlig og nevne. Det virker eiendommelig om man skulle akseptere at en mengde kan være element i seg selv eller at det skulle finnes en mengde x som er et element i en annen mengde y som i sin tur er et element i x. Enda mer merkverdig ville det være om det fantes en uendelig sekvens av mengder x0, x1, x2, ... der x1 er et element i x0, x2 et element i x1 osv., med andre ord der vi har at x(i+1) er et element i xi for alle i >=0. *Fundierungs-aksiomet* utelukker eksistensen av slike merkverdige mengder. Det sier at dersom x er en ikke-tom mengde finnes det et element i denne mengden som ikke har noen medlemmer tilfelles med x. Dette aksiomet kalles også ofte for *regularitets-aksiomet*.

Vi har så langt sett på en rekke grunnleggende setninger om mengder som alle virker ytterst rimelige. La oss kort oppsummere. De setningene vi har omtalt er ekstensjonalitetsaksiomet, utsondringsaksiomet, foreningsmengdeaksiomet, potensmengdeaksiomet, substitusjonsaksiomet og utvalgsaksiomet. I tillegg til disse har vi også omtalt "små-mengde"-aksiomene, nemlig parmengde-aksiomet og nullmengde-aksiomet. Disse sikrer at vi kan vise eksistensen til endelige mengder. Endelig har vi nevnt uendelighetsaksiomet, som forsikrer oss om at det finnes uendelige mengder og den grunnleggende setning som vi kalte regularitetsaksiomet. Endelig er det viktig å nevne at vi forutsetter noe som vi skal kalle *elementaksiome*t. Dette sier at dersom x er et element i noe y så er y alltid en mengde.[2]

Vi har nevnt disse prinsippene av hovedsakelig tre grunner. Den ene er, noe som er velkjent, at alle de viktigste begrepene innenfor den klassiske matematikk: aritmetikken, læren om de rasjonale og reelle tall, ligningsteorien, analysen, geometrien osv. kan defineres

2 Vi bemerker at uttrykket "x er et element i y" brukes synonymt med "x er et element i mengden y" som i sin tur brukes synonymt med uttrykket "x er medlem av mengden y". Dette siste uttrykket forkortes med "xêy".

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

ved hjelp av medlems-relasjonen og mengdebegrepet. (At dette er mulig og at man kan utlede alle de tradisjonelle læresetningene innenfor disse områdene av matematikken ved hjelp av disse definisjonene, og grunnprinsippene vi har nevnt ,må regnes som en av de virkelig store tankepresentasjonene i den vestlige kultur). Den andre grunnen er at disse grunnsetningene, når man reflekterer over dem fortoner seg uavviselige, nødvendige og apodiktiske og at det virker umulig å tenke seg noe genuint alternativt system som ikke virker eiendommelig og langt mindre naturlig.[3] Prinsippene virker derfor som et sikkert utgangspunkt som man filosofisk sett trygt kan starte med. Den tredje grunnen er at vi trenger et klart mengdeteoretisk grunnlag når vi skal formulere og utvikle våre teorier om egenskaper, utsagn og det vi kaller finstrukturerte utsagn på en presis og klar måte. Og en avklaring av disse begrepene er helt nødvendig, som man forhåpentligvis vil se, om man vil bygge opp en plausibel teori om erkjennelse.

Det skulle intuitivt sett være klart hva som menes med et ordnet par av objekter. Et slikt par vi alltid ha et objekt som sin første komponent og et objekt som sin andre komponent. Vi betegner et par der den første og andre komponenten er henholdsvis x og y med <x,y>. To par er identiske hvis og bare hvis de to førstekomponentene i parene er identiske og det samme gjelder for andre-komponentene i parene. Hvis x;1, ..., x;n er n objekter betegner vi mengden disse objektene og bare dem med {x;1,..., x;n}. Det viser seg nå at man kan definere et ordnet par ved å sette per definisjon <x,y> = {{x},{x,y}}. Man kan da vise at ordnete par har de egenskaper som kreves.

En relasjon er en mengde som bare inneholder ordnete par. Er R en relasjon er det venstre domenet til R mengden av alle de x der vi har for noe y at <x,y>êR. Det høyre domenet til R er mengden av alle de objekter y der vi har at det finnes et objekt x slik at <x,y>êR. En funksjon er en relasjon der hvert objekt i det venstre domenet bærer relasjonen til nøyaktig ett element i det høyre domenet.

Før vi går over til å kommentere begrepet 'egenskap' skal vi forsøke å avslutte vår omtale av mengdebegrepet ved å si noen ord om det som ofte omtales som *det kumulative hierarki*. For å kunne gjøre dette må vi si noen ord om ordinaltall. Innenfor den mengdeteoretiske rammen vi har omtalt er det mulig - faktisk kan det gjøres på mange måter - å definere rekken av naturlige tall. Vi bruker i denne avhandlingen den versjonen av den naturlige tallrekken som ble presentert av von Neumann. Da er ethvert naturlig tall mengden av sine forgjengere og 0 er den tomme mengden. Dette impliserer at 0=ø og at f.eks 3= {ø,{ø}, {ø,{ø}}} = {0,1,2} Vi kaller en mengde x for en transitiv mengde om ethvert element i et element i x også er et element i x. Man ser da at ethvert naturlig tall i den betydning vi nettopp fastsatte er en transitiv mengde. Videre kaller vi en mengde x for *total* med hensyn på medlemskapsrelasjonen om man for alle elementer z,y som er med i x har at z enten er et element i y eller at z=y eller at y er et element i z. Et *ordinaltall* α kan da defineres som en transitiv mengde som er total med hensyn på medlemskapsrelasjonen og hvor enhver ikke-tom delmengde av α inneholder et minimalt element med hensyn på medlemskapsrelasjonen. Er x et ordinaltall defineres etterfølgeren til x som foreningsmengden av x og {x}, ie. xU{x}. Man ser da ganske lett at dersom x er et ordinaltall så er også xU{x} et slikt tall, videre kan det ganske lett vises at alle de naturlige tallene er ordinaltall. Et ordinaltall x er mindre enn et ordinaltall y hvis og bare hvis xêy. Vi bruker tegnet "<" for å betegne mindre-enn relasjonen

3 Det må tilføyes i denne fotnoten noe om Quines systemer og det som han kaller "ultimate mengder"

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

mellom ordinaltall. Man ser da fra denne definisjonen og definisjonen av ordinaltall at <-relasjonen mellom ordinaltall er en lineær ordning som er slik at enhver enhver ikke-tom mengde med ordinaltall inneholder et minimalt element med hensyn på <. Dette innebærer at <-relasjonen er det som kalles en velordning og at mengden av ordinaltall er velordnet.

Hvis et ordinaltall ikke er en etterfølger til noe ordinaltall kalles det et grenseordinaltall. Ellers kalles det et etterfølger-ordinaltall. Vi betegner klassen av etterfølger-ordinaltall med K;I og klassen av grenseordinaltall med K;II. Selve klassen av ordinaltall betegner vi med On.

La oss nevne følgende faktum før vi går videre. Det er mulig å vise at enhver mengde x er likemektig med et ordinaltall α. Dette innebærer at enhver mengde kan velordnes. La oss også nevne følgende: To mengder x,y er *likemektige* om de kan avbildes en-entydig på hverandre. En mengde x er *mindre mektig* enn en mengde y hvis og bare hvis x og y ikke er likemektige og det finnes en funksjon som avbilder x en-entydig på en delmengde av y. La oss i denne forbindelse nevne at man kan vise at dersom x er en mengde så er potensmengden til x av større mektighet enn x. (Cantors sats).

Vi kan nå definere og si noe om det kumulative hierarki. Vi tenker oss at X er en mengde og skal for ethvert ordinaltall α definere hva som menes *nivå α av det kumulative hierarki over X*. Dette betegner vi med "V;α(X)". Dette gjøres induktivt over mengden av alle ordinaltall. Er α =0 setter vi at V;0(X) = Pt(X). Er α+1 et etterfølger-ordinaltall setter vi: V;(α+1)(X) = V;α(X) U Pt(V;α(X)). Er tilslutt α et grenseordinaltall setter vi V;(α) = Un/β <α/(V;β(X)). Selve det kumulative hierarkiet over mengden X er da sekvensen <V;α(X)>/αêOn/ og alle de ting som er mengder i det kumulative hierarki over X er da alle elementene i Un/αêOn/(V;α(X)).

Tenker man seg at X er nullmengden vil Un/αêOn/(V;α(ø)) være det som kalles hierarkiet av *rene mengder*. Dette er det hierakiet av mengder som er av ren matematisk interesse. En matematiker er tross alt interessert i egenskapene til matematiske størrelser, hva enten det er geometriske objekter eller f.eks. komplekse tall. I den utstrekning disse ting kan reduseres til mengder vil elementene i hierarkiet av rene mengder være tilstrekkelig.

Er X på den annen side en mengde av urindivider, for eksempel mengden av alle mulige fysiske partikler, vil naturlig nok det kumulative hierarkiet over X inneholde alle mulige mengder av fysiske partiker, all verdens relasjoner mellom fysiske partikler osv. Det bør imidlertid påpekes at alle mengdene i det rene mengde-hierarki også dukker opp i dette kumulative hierarkiet over mengden av de fysiske partikler.

Det er to hovedgrunner til at vi såpass utførlig har tatt oss tid til å omtale grunntrekkene ved det kumulative mengde-hierarki.

Den første grunnen er at dette hierarkiet virker som en svært naturlig begrepsdannelse. For det første er det sant, men trivielt, at ethvert objekt som dukker opp i det kumulative hierarkiet over en mengde av urindivider åpenbart en mengde. Men det virker også rimelig å si at dersom noe overhodet er en mengde må det være en entitet som er med på et eller annet nivå α av det kumulative hierarki over en eller annen grunnmengde X av urindivider. Men da vet vi også i en viss forstand hvordan denne mengden kan genereres ved hjelp av potensmengde-operasjonen og union-operasjonen. Saken er at dette synes å være et helt tankenødvendig forhold. Man kan ikke tenke seg noe som er en mengde uten at det er generert

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

på denne måten. Det kumulative hierarki gir en derfor et klart bilde av hva slags mengdebegrep det er vi legger til grunn her.[4]
Den andre grunnen for å ta opp denne begrepsdannelsen er at om man tar sitt utgangspunkt i den måten å generere mengder på som er gitt ved det kumulative hierarki ser man raskt at alle de grunnsetningene om mengder som vi har nevnt tidligere er gyldige om man tenker seg dette som en model for medlemskapsrelasjonen. Av denne grunn er disse grunnsetningene (som med vissse modifikasjoner utgjør grunnstammen i systemet ZFC) svært naturlige og betraktningene i forbindelse med det kumulative hierarki gjør det nærmest umulig å se på disse grunnsetningene som noe annet enn nødvendige sannheter. Man kan til og med gå et steg videre og påstå at ved disse grunnsetningene dreier det seg om syntetisk apriori sannheter som gir seg av seg selv om man tenker nøye igjennom hva som forstås ved en mengde.

Vi har nå sett på to kategorier av objekter, nemlig urindivider og mengder. Dessuten har vi nevnt mulige verdener, men ikke gitt noen utførlig omtale av dem. Det eneste vi skal nevne på akkurat dette sted er at det virker urimelig å tenke seg at mulige verdener egentlig og bokstavelig talt er mengder, like lite som det er naturlig å si at en sten, eller for eksempel en saks, er en mengde. Disse entitetene kan kan i forskjellige sammenhenger, f. eks. om man ønsker å danne modeller av forskjellig slag representeres ved tall eller mengder.
Men fra dette kan man ikke slutte at at noen av disse tingene er mengder. Noen ytterligere bemerkninger bør gjøres når det gjelder mengdenes natur. At en mengde alltid kan plasseres på et eller annet nivå i det kumulative hierarki og at man liksom i tankene kan gjennomløpe alle nivåene i hierarkiet til man når dette nivå innebærer ikke at mengder er "tanke-konstruksjoner", "fiksjoner", "imaginære objekter" eller "fiktive størrelser". En mengde er noe som er identisk med seg selv som ethvert annet objekt og dermed finnes den i den forstand at det finnes noe som er identisk med den. Fremfor alt hefter det seg ikke noe subjektivt ved mengder. Mengder, funksjoner, relasjoner er abstrakte i den forstand at det ikke gir noen mening å forsøke å plassere dem i rom eller tid. Nullmengden begynte ikke å eksistere ved noe bestemt tidspunkt, for eksempel for en milliard å siden og opphører ikke å eksistere når når menneskeheten dør ut, eller f.eks. en million år etter at det siste mennesket har forsvunnet fra kosmos. Snarere kan man med rette hevde at slike påstander er meningsløse. Vil man insistere på at de har noen sannhetsverdi virker det rimelig å se på dem som nødvendig usanne og derfor som kontradiktoriske. En setning som "Mengden av de naturlige tall befinner seg nå på et sted som ligger en meter unna det sted den befant seg på for en time siden." høres naturligvis våsete ut og bør med rette behandles som vås.

Alt det vi har sagt her om mengder kan sies om entitetene i de andre kategoriene vi vil omtale, som egenskaper, utsagn og det vi senere skal omtale som "finstrukturerte utsagn". De er alle abstrakte og eksisterer ikke i tid og rom.

Vi skal nå gå videre og omtale hovedtrekkene i vår teori om egenskaper. Ethvert objekt har talløse egenskaper. Hvis et objekt x har en bestemt egenskap e i verdenen w kan man naturligvis si at denne egenskapen e kan tilskrives objektet x i verdenen w. Analogt med medlemskapsrelasjonen i forbindelse med mengder kan man derfor tale om "tilskrivelses-relasjonen" eller "ha"-relasjonen i forbindelse med egenskaper. Denne tilskrivelses-relasjonen kan identifiseres med klassen av alle de tripler <x,e,w> som er slik at x er et objekt som har

4 Sett inn en fotnote her hvor det refereres til det som står om dette i Drake, Shoenfield, Quine etc. Lag en utførlig fotnote.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

egenskapen e i verdenen w. I motsetning til mengder finner vi det nødvendig å trekke inn mulige verdener i forbindelse med egenskaper. Sier vi at objektet x har egenskapen e (uten kvalifikasjoner) mener vi at x har egenskapen e i den aktuelle verden. Den offisielle uttrykksmåten er derfor å si at objektet x har egenskapen e i verdenen w.

Vi kaller alle de objektene som har egenskapen e i verdenen w for *ekstensjonen til e i denne verdenenen w*. Denne definisjonen gjør det mulig for oss å formulere vårt første prinsipp om egenskaper. Dette sier at *dersom y er en egenskap og w er en mulig verden så finnes det alltid en mengde z som er slik at noe er med i z hvis og bare hvis det har egenskapen y i verdenen w*. Med andre ord sier denne grunnsetningen at dersom y er en egenskap så har den en ekstensjon i enhver verden og at denne ekstensjonen er en mengde.

Det andre prinsippet som vi trekker frem i forbindelse med egenskaper er et identitetskriterium. Det sier at *dersom to egenskaper har nøyaktig den samme ekstensjon i enhver mulig verden så er de to egenskapene identiske*. Dette prinsipp er for egenskaper det ekstensjonalitetsaksiomet er for mengder. Det siste angir når to mengder er identiske, det første under hvilke omstendigheter to egenskaper er identiske.

La oss kalle en funksjon som tilordner enhver mulig verden en delmengde av en mengde x for en *ekstensjonsfunksjon over x*. Det følger da fra de grunnsetningene som vi så langt har nevnt at dersom x er en egenskap så finnes det en entydig bestemt ekstensjonsfunksjon f som er slik at f(w) er identisk med ekstensjonen til x i verdenen w for alle mulige verdener w.

Før vi går videre må vi minne om følgende. Vi har ikke eksplisitt formulert som et prinsipp at mengden av mulige verdener finnes, men vi har egentlig forutsatt dette ovenfor. La oss derfor formulere prinsippet eksplisitt: *Det finnes en mengde x og noe er et element i denne mengden hvis og bare hvis det er en mulig verden*. Dessuten antar vi at mengden av mulige verdener er minst tellbart uendelig. *Mengden av mulige verdener er minst tellbart uendelig*. Dette innebærer at det finnes en en-entydig funksjon som avbilder mengden av de naturlige tall på en delmengde av mengden av mulige verdener. Begge disse påstandene virker ytterst rimelige om man tenker nøyere over hva som menes med mulige verdener. Når det gjelder mulig verdener har vi heller ikke eksplisitt postulert at de er ikke-mengder, dvs. det vi kaller urindivider. Men ved nærmere ettertanke virker også dette rimelig. I det følgende er det imidlertid intet som tvinger en til å ta stilling til dette. Vi lar derfor dette spørsmålet være åpent.

Vi kommer nå til et tredje prinsipp. Dette sier at *dersom f er en ekstensjonsfunksjon over en mengde x finnes en egenskap y der man har for enhver mulig verden w har at ekstensjonen til y i verdenen w er identisk med f(w)*. Her brukes selvfølgelig utrykket "ekstensjonsfunksjon" i den betydning vi har fastsatt tidligere.

De grunnsetningene om egenskaper som vi så langt har formulert impliserer at det finnes en en-entydig korrespondanse mellom alle ekstensjonsfunksjonene over en mengde x og de egenskaper som er bestemt av denne mengden med ekstensjonsfunksjoner.

Egenskaper kan i en viss forstand være av forskjellig grad. En egenskap som for eksempel det å være en Oslo-borger er en unær egenskap, en egenskap av grad 1, mens derimot egenskapen å være et par <x,y> der x en person som veier mer enn personen y kan sies å være en egenskap av grad 2. Med en *n-ær egenskap*, der n er et natulig tall >1, forstår vi en egenskap y der det finnes en ikke-tom mengde x hvor vi har for hver verden w at ekstensjonen til y i verdenen w er en mengde av n-tupler over mengden x. .

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Vanlige monadiske predikater som f.eks. "x er et menneske" kan sies å uttrykke eller representere egenskaper i vår forstand. Den generelle termen "menneske" representerer egenskapen å være et menneske som i enhver mulig verden w har som ekstensjon mengden av alle de objekter som er mennesker i verdenen w. På den annen side har man også talløse generelle termer i vårt språk som uttrykker relasjoner, for eksempel uttrykket "x er høyere enn y", "x er varmere enn y" eller "x er gift med y". Tar man det siste uttrykket kan man si at dette to-plass predikatet uttrykker den binære egenskapen å være et par <x,y> der x er gift med y som i enhver mulig verden w har som ekstensjon mengden av alle de par <x,y> der x er gift med y i verdenen w.

Vi har nå gjort rede for de viktigste grunnsetningene om mengder og egenskaper som vi inkluderer i vår teori. La oss nå gå videre og omtale to andre klasser av objekter som spiller en vesentlig rolle i dette arbeid. Det dreier seg på den ene side om det vi kaller *presise deskriptive utsagn*, eller kortere: utsagn, på den ene side, og på den annen side om det vi kaller *finstrukturerte utsagn.* I stedet for uttrykket "finstrukturert utsagn" vil vi også bruke uttrykket "tankeinnhold" eller uttrykket "finstrukturert tankeinnhold". De tre uttrykkene vil i så fall bli brukt synonymt.

La oss først gjøre rede for mengden av utsagn. Med en deskriptiv setning forstår vi et språkelig uttrykk som enten er sant eller usant. Et utsagn kan derfor kort karakteriseres ved å si at det er det meningsinnhold som er uttrykt av en deskriptiv setning, med andre ord den påstand som en person oppfatter når vedkommende skjønner hva den deskriptive setningen sier. Et karakteristisk trekk ved utsagn er at to deskriptive setninger som er logisk ekvivalente utrykker det samme utsagn. Det omvendte kan også sies, utrykker en setning et bestemt utsagn og uttrykker en annen setning nøyaktig det samme utsagn kan man slutte at de to setningene er logisk ekvivalente. De tre setningene "Galdhøpiggen er høyere enn Glittertind", "Glittertind er lavere enn Galdhøpiggen" og " Det er ikke slik at det er usant at Glittertind er lavere enn Galdøpiggen" synes det rimelig å si at er logisk ekvivalente. Med andre ord utrykker disse tre setningene nøyaktig det samme utsagn.

Et utsagn er enten sant eller usant i en mulig verden. Ved siden av mengden av alle utsagn opererer vi derfor også med den relasjon som består mellom en mulig verden w og et utsagn x hvis og bare hvis w er en verden der utsagnet x er sant. Vi kaller denne relasjonen for *sannhetsrelasjonen for utsagn*. De to grunnleggende predikatene i den teorien vi fremsetter om utsagn er derfor de følgende to, nemlig "x er et utsagn" og "w er en mulig verden hvor utsagnet x er sant".

La oss nå uformelt formulere de grunnleggende tankene i den teorien om utsagn som beskrives i den første delen av dette arbeid. Et første grunnprinsipp er trivielt og fastlår bare at dersom et utsagn x er sant i verdenen w så må x være et utsagn og w en mulig verden. Det andre grunnprinsippet som vi vil fremheve er et identitetskriterium. Det sier at dersom x og y er utsagn så er x identisk med y hvis og bare hvis de er sanne i nøyaktig de samme verdenene. Det tredje "aksiomet" i vår utsagnsteori er et vi har nevnt tidligere, nemlig dette at mengden av mulige verdener eksisterer og at den er minst tellbart uendelig. Den siste grunnleggende setningen err denne: *Er x en mengde med mulige verdener finnes det alltid et utsagn som er sant i de mulige verdenene som er med i x og bare i dem*. Siden den tomme mengden er inkludert i mengden av mulige verdener finnes det et utsagn som ikke er sant i noen verden. Dette kaller vi det kontradiktoriske utsagn.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Det er mulig å definere en funksjon som til ethvert utsagn x tilordner dette mengden av alle de mulige verdenene hvor utsagnet er sant. Gitt grunnsetningene ovenfor er det da mulig å vise at denne funksjonen avbilder mengden av utsagnene en-entydig og på mengden av alle delmengder av mengden av mulige verdener. Vi betegner denne funksjonen med μ og x er et utsagn kalles μ(x), dvs mengden av alle de verdener der utsagnet x er sant, for *sannhetsmengden til utsagnet x*.

Det er nå på tide å gjøre rede for den andre kategorien av utsagn som vi såvidt omtalte ovenfor, nemlig det vi her kaller for "finstrukturerte utsagn" eller, som vi også skal kalle dem, "tankeinhold". Termen "utsagnet at α" betegner et utsagn. Termen "det finstrukturerte utsagn at α", eller termen "tankeinnholdet at α" betegner et finstrukturert utsagn. Dersom to setninger α og β er logisk ekvivalente kan man slutte at termene "utsagnet at α" og "utsagnet at β" refererer til det samme utsagn. Men fra det at setningene α og β er logisk ekvivalente kan man ikke uten videre slutte at termen "det finstrukturerte utsagn at α" refererer til det samme som "det finstrukturerte utsagn at β". Det man derimot kan si er at dersom det finstrukturerte utsagn at α er identisk med det finstrukturerte utsagn at β så er utsagnet at α identisk med utsagnet at β. Det omvendte holder imidlertid ikke.

Fra påstanden det er logisk nødvendig at α kan man slutte påstanden det er logisk nødvendig at β dersom α er logisk ekvivalent med β eller det er slik at β er en logisk konskevens av α. Dette gjelder imidlertid ikke for en konstruksjon som for eksempel "x tror at α". Fra det at x tror at α følger ikke uten videre at x tror at β selvom β er en logisk konsekvens av α.[5] Dette kan man bare slutte om x *innser* at β følger fra det at α. Tilsvarende kan man fra det at α er logisk ekvivalent med det at β slutte at det er logisk nødvendig at α hvis og bare hvis det er logisk nødvendig at β. Men fra det at α er logisk ekvivalent med det at β kan man ikke slutte at x tror at α hvis og bare hvis x tror at β. To logisk ekvivalente setninger uttrykker det samme utsagn. I en setning av typen "Det er logisk nødvendig at α" er det derfor i lys av det vi har sagt ovenfor naturlig å se på uttrykket "at α" som et navn på et utsagn slik at en setning av denne type kan leses "Utsagnet at α er et logisk nødvendig sant utsagn". Men setningen "x tror at α" kan ikke leses "Utsagnet at α er et utsagn x tror er sant" for hvis da α er logisk ekvivalent med β kan man fra dette siste slutte "Utsagnet at α er et utsagn x tror er sant" og fra dette i sin tur at x tror at β. Dette i sin tur strider mot det vi kom hevdet ovenfor. I en setning av typen "x tror at α" kan derfor ikke "at α" betegne et utsagn. Det må betegne noe som er *finere individuert.* Vi skal, som antydet ovenfor kalle den typen objekter for finstrukturerte utsagn.

La oss nå gjøre rede for de grunnsetninger om finstrukturerte utsagn vi tar som utgangspunkt i denne avhandlingen. Ethvert finstrukturert utsagn er enten sant eller usant i en logisk mulig verden. Relasjonen som består av alle de par <w,x> der w er en logisk mulig verden og hvor det finstrukturerte utsagn x er sant kaller vi sannhetsrelajonen for finstrukturerte utsagn. Den funksjonen som tilordner et finstrukturert utsagn menden av alle de verdener der det er sant

5 Dette skulle være en helt ubestridelig kjennsgjerning. Fra det at Ole tror at det befinner seg nøyaktig to personer i dronningens soverom kan man ikke slutte at Ole tror at antallet personer som befinner seg i dronningens soverom er identisk med det minste naturlige tall som er en løsning av ligningen x^2-5*x+6=0. Men det skulle være opplagt at setningen "Det befinner seg nøyaktig to personer i dronningens soverom." impliserer setningen " Antallet personer som befinner seg i dronningens soverom er identisk med det minste naturlige tall som er en løsning av ligningen x^2-5*x+6=0". Videre skulle det være klart at disse to setningene er logisk ekvivalente. De utrykker derfor det samme utsagn.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

betegner vi med μ;f. Er x et finstrukturert utsagn kaller vi mengden av alle de verdenene der det er sant for sannhetsmengden til x. Man kan fra disse bemerkningene slutte at sannhetsmengden til et finstrukturert utsagn er μ;f(x). Dersom et finstrukturert utsagn og et utsagn har samme sannhetsmengde skal vi kalle dem for ekvivalente.

Vår første grunnsetning angående finstrukturerte utsagn er denne: *Er w en verden der det finstrukturerte utsagnet x er sant er w en logisk mulig verden og x et finstrukturert utsagn*[6]. Den andre grunnsetningen sier at dersom x er en mengde med mulige verdener så finnes det et finstrukturert utsagn som har denne mengden x som sin sannhetsmengde, med andre ord finnes det et finstrukturert utsagn y som er slik at enhver verden w som er med i x er en verden hvor det finstrukturerte utsagnet y er sant og omvendt hvor det er slik at hvis w er en verden hvor y er sant så er w et medlem av mengden x. Dette aksiomet impliserer at mengden av finstrukturerte utsagn er minst likemektig med potensmengden til mengden av muligeverdener. Den tredje grunnsetningen er at mengden av alle finstrukturerte utsagn finnes. Den fjerde grunnsetning vi legger til grunn sier at dersom x er en mengde med mulige verdener finnes det minst tellbart uendelig mange finstrukturerte utsagn som har denne mengden som sin sannhetsmengde.

Når det gjelder utsagn kan vi definere operasjoner på disse som er helt analoge med boolske operasjoner på mengder. For eksempel er konjunksjonen av to utsagn det utsagnet som har som sin sannhetsmengde snittet av sannhetsmengdene til de to utsagn. Negasjonen av et utsagn x er det utsagnet hvor sannhetsmengden er komplementet til sannhetsmengden til x med hensyn på mengden av alle mulige verdener. På tilsvarende vis kan man definere utsagnsoperasjoner som svarer til de setningslogiske konnektivene disjunksjon, bikondisjonal og kondisjonal. Det samme kan man imidlertid ikke gjøre når det gjelder finstrukturerte utsagn. La oss betegne mengden av mulige verdener med I. Anta x et finstrukturert utsagn. Da vil μ;f(x) være sannhetsmengden til x. Mengden av alle de verdener hvor dette finstrukturerte utsagn er usant vil i så fall være I - μ;f(x). Men ifølge den fjerde grunnsetningen om finstrukturerte utsagn som vi nevnte ovenfor vil det da finnes uendelig mange finstrukturerte utsagn y1,y2,.... som har denne mengden som sin sannhetsmengde. Man kan derfor ikke snakke om *det* finstrukturerte utsagnet som er negasjonen av x.

Når det gjelder utsagn bør det nevnes at det finnes ett og bare ett utsagn som er sant i alle logisk mulige verdener. Det kan ikke finnes to distinkte utsagn utsagn av denne art. Men i lys av den siste grunnsetningen om finstrukturerte utsagn det nødvendigvis finnes uendelig mange finstrukturerte som har mengden av alle logisk mulige verdener som sin sannhetsmengde på samme måte som det i et vanlig språk finnes uendelig mange setninger som er logisk sanne. På samme vis gjelder det at blandt utsagnene kan det bare finnes ett og bare ett utsagn som er usant i alle mulige verdener, med andre ord det kan bare finnes nøyaktig ett utsagn hvis sannhetsmengde er nullmengden. Men i lys av våre grunnsetninger om finstrukturerte utsagn finnes det uendelig mange finstrukturerte utsagn som har nullmengden som sin sannhetsmengde og som derfor er logisk nødvendig usanne, det vil si kontradiktoriske.

Vi har nå gjort rede for fire av de hovedkategoriene som er grunnleggende i vårt arbeid, nemlig mengder, egenskaper, utsagn og finstrukturerte utsagn. Vi har gjort rede for disse kategoriene på en uformell måte og uten å gjøre bruk av noe tungt formallogisk apparat og vi

6 Forklar hvorfor det er nødvendig å nevne dette.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

har formulert de grunnsetningene om størrelsene i disse kategoriene som vi legger til grunn i dette arbeid. La oss nå understreke at den teorien vi fremlegger i vårt arbeid, og som kan formaliseres fullstendig, er formulert i et vanlig predikatlogisk språk som inneholder de følgende predikater som er tilstrekkelige for å kunne for å kunne formulere alle de grunnsetningene vi har nevnt ovenfor helt presist. Det dreier seg om følgende predikater: "x er en logisk mulig verden", "x er en mengde", "x er et element i mengden y", "x er en egenskap", "x har egenskapen y i verdenen w", "x er et utsagn", " w er en mulig verden hvor utsagnet x er sant", "x er et finstrukturert utsagn" og endelig predikatet "w er en mulig verden hvor det finstrukturerte utsagnet y er sant". Dette er følgelig primitive predikater i den teorien vi skal presentere.

I dette språket som vi nå har nevnt kan man imidlertid ikke formulere noen prinsipper om viten,tro, sanseiaktagelse, observasjon etc. Dessuten kan man ikke uttrykke noe om tidsforhold, om personer, eller f.eks. noe om hva en person vet eller hvordan vedkommendes trosoppfatninger endrer seg med tiden. Uttrykksmidler som gjør det mulig å si noe om slike forhold er følgelig helt nødvendig om man ønsker å formulere en systematisk teori om viten, tro og erkjennelse.

Vi innfører derfor følgende predikater som gjør det mulig å si noe om tid: "x er et tidspunkt", "x er et tidspunkt som kommer før tidspunktet y". Når det gjelde prinsipper for tid postulerer vi at mengden av tidspunkter finner, videre at før-relasjonen mellom tidspunkter er en lineær, tett, og kontinuerlig ordning der vi dessuten har at ethvert tidspunkt etterfølges av et annet og at det for ethvert tidspunkt finnes et som kommer før det. For kunne si noe om personer innfører vi predikatet "x er en person". Til våre tidligere grunnsetninger legger vi nå til den at mengden av personer finnes og at den er ikke-tom.

Selvom vi utvider vokabularet til vår teori på denne måten kan vi fremdeles ikke si noe om kunnskap, tro, erkjennelse, sanseiaktagelse eller observasjon. Vi kommer nå til de grunnleggende predikatene vi trenger for å formulere de tesene vi ønsket å drøfte om erkjennelse og viten. Det første er dette:

(1) "y er et finstrukturert utsagn som beskriver et forhold x vet ved tidspunktet t i verdenen w at foreligger".

La oss bemerke følgende: Om man i dette uttrykket erstatter ordet "vet" med et av de følgende uttrykk: "ser", "husker", "innser" eller "tror" får man nøyaktig fire nye predikater. Disse fire predikatene, i tillegg til (1) inngår som primitive predikater i vår teori. Vi skal begrense oss til disse predikatene som vi her skal skal kalle de "epistemiske predikatene". Det er imidlertid en rekke andre predikater av denne typen man *kan* ta med, men som vi ikke *vil* ta med, f.eks. de som fremkommer når man erstatter ordet "vet" i (1) med et av de følgende uttrykk: "forestiller seg", "ser for seg", "tenker seg", "er forundret over", "forventer", "er overbevist om", "er sterkt overbevist om", "merker", "kjenner", "observerer", "iaktar", "har klart for seg", "er sikker på", "husker tydelig", "har en anelse om". Dette er et lite utvalg. Det er mulig å forlenge listen betraktelig.[7]

Ved siden av (1) og de fire andre predikatene vi nevnte ovenfor er det ytterligere to som må nevnes fordi vi inkluderer dem som primitive predikater i vår teori. Dette er for det første:

7 Man kan nevne andre predikater som fremkommer fra (1) ved erstatning av ordet "vet", predikater som er av en mer "psykologisk" natur: "er bekymret for", "ønsker", "har et sterkt ønske om", "sørger for", "vil forhindre", "er irritert over", "er rasende over", "er sint over", "er glad for", "håper", "har et intenst håp om", "er engstelig for", "er skuffet over", "er dypt skuffet over", "vil" osv.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(2) "y er et finstrukturert utsagn som beskriver et forhold x meddeler z ved tidspunktet t i verdenen w at foreligger"

Vi skal kalle dette for kommunikasjons-predikatet. Det siste predikatet vi vil nevne i denne forbindelse er:

(3) "x innser ved tidspunktet t i verdenen w at det finstrukturerte utsagn y følger fra det finstrukturerte utsagnet z"

Også ved dette predikatet finner vi det hensiktsmessig å bruke et kort uttrykk når vi skal referere til det. Vi skal omtale det som "predikatet om innsikt og implikasjon".

Vi har nå laget en liste over alle de predikatene vi trenger for å formulere de setningene vi finner at er av grunnleggende betydning når det gjelder viten å tro på samme måte som vi ovenfor formulerte grunnprinsipper for mengder, egenskaper, utsagn og finstrukturerte utsagn.

*

Erkjennelsesteorien er ikke noe annet enn en generell teori om hva som logisk sett er nødvendige og hva som er logisk sett tilstrekkelige betingelser for at en person ved et gitt tidspunkt vet at en påstand er sann. Man kan si at det er den rent logiske teorien om kunnskapsrelasjonen, det vil si den relasjonen som betegnes av predikatkonstruksjonen "y er et forhold som individet x ved tidspunktet t vet at foreligger".

Hvis y beskriver et forhold som individet x vet at foreligger ved tidspunktet t skal vi foreløpig kalle y for et tankeinnhold og vi skal av og til tillate oss, av rent stilistiske grunner og for å unngå en viss språklig monotoni å si at dette tankeinnhold er et objekt for x's viten ved dette tidspunktet t. Dette innebærer selvfølgelig at om vi bruker uttrykket "y er et tankeinnhold som er objekt for x's viten ved tidspunktet t" brukes det per definisjon synonymt med "y er et forhold som individet x vet at foreligger ved tidspunktet t".

Det virker ytterst rimelig å tenke seg at to personer ved forskjellige tidspunkter, eller ved det samme tidspunkt kan vite at ett og samme tankeinnhold beskriver et forhold som faktisk foreligger. Dette innebærer at tankeinnhold i den betydning vi her legger til grunn er intersubjektive, ikke-private entiteter. Hvis en person x vet at Ole har juridsk embetseksamen, behøver naturligvis ikke x å være den eneste som vet dette, Kari, Jens og Petter kan også vite dette. I vanlige tilfelle vil også tankeinnhold som beskriver forhold man vet er tilfelle kunne meddeles til andre. Spørsmålet om det kan finnes tankeinnhold som bare en person kan vite, og som det er logisk umulig for noen andre å vite, og som derfor ikke kan meddeles til andre, skal vi la stå åpent. La oss også bemerke at et tankeinnhold, for eksempel den tanke at jorden er kuleformet, ikke befinner seg på noe bestemt sted i rommet, ikke kan beveges hit eller dit, ikke av seg selv forflytter seg fra et sted til et annet. Kort sagt kan et tankeinnhold ikke tilordnes noen romlige koordinater. Tilsvarende kan man ikke si at et tankeinnhold per se oppstår ved et bestemt tidspunkt for så å forsvinne ved et annet tidspunkt. Et tankeinnhold er ikke noe som eksisterer i visse perioder og som ikke eksisterer i andre. Det er heller ikke noe som forandres i løpet av en tidsperiode. Vi konkluderer derfor med at tankeinnhold, i likhet med tall, mengder, funksjoner, geometriske objekter og en rekke andre størrelser, er abstrakte, intersubjektive og ikke-private objekter.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Hvilke grunnleggende, generelle og rent logiske prinsipper gjelder så for kunnskapsrelasjonen?

La oss gi en foreløpig oversikt over noen uhyre enkle og ganske opplagte prinsipper. Det første som det er naturlig å nevne er det følgende: *Hvis y er et tankeinnhold som beskriver et forhold som x vet foreligger ved tidspunktet t er y et tankeinnhold som er sant*. Formulert på en annen måte dersom x ved tidspunktet t vet at y er en sann påstand så er det faktisk slik at påstanden y er sann. Dette gjelder generelt for enhvert tankeinnhold, enhver person og ethvert tidspunkt. Det er naturligvis også selvmotsigende å benekte dette prinsipp. Det er følgelig en logisk nødvendig påstand. For lettere å kunne henvise til denne setningen skal vi kalle den for "sannhetsprinsippet".

Vårt neste prinsipp er dette: *Dersom tankeinnholdet y beskriver et forhold som x ved tidspunktet t vet foreligger, er det også slik at tankeinnholdet y beskriver et forhold x ved tidspunktet t tror at foreligger*. Også denne setningen virker uimotsigelig og nødvendig sann. Man kan kalle dette prinsippet for "Prinsippet om tro som en nødvendig betingelse for kunnskap" hvis man vil ha et navn på det. Hvis en person ikke tror at noe er tilfelle virker det selvmotsigende å si at vedkommende vet at dette er tilfelle. Man legger merke til at denne setningen bare angir et nødvendig vilkår for viten og intet tilstrekkelig vilkår. Det bør også bemerkes i denne forbindelse at dersom et stort antall personer vet at et tankeinnhold er riktig vil det råde intersubjektiv enighet blandt disse personene om at tankeinnholdet er riktig. Det omvendte er derimot ikke tilfelle. Det faktum at en mange personer er enige seg imellom om at et tankeinnhold ,eller en påstand, er riktig er ikke logisk sett noen tilstrekkelig betingelse for at denne påstands riktighet. Langt mindre kan man fra dette forhold slutte at de vet at påstanden er sann. Sannhet og viten er ikke noe som kan skapes ved konsensus, overtalelse, demokratiske avstemninger eller propaganda.

Det er naturligvis en lang rekke andre prinsipper som bør nevnes. Vårt tredje prinsipp angir en stilstrekkelig betingelse for viten: *Hvis y er et tankeinnhold som beskriver et forhold x ser at foreligger ved tidspunktet t er det også slik y beskriver et forhold som x vet er tilfelle ved dette tidspunktet*. Også denne påstanden virker opplagt. Hvis en person ser at noe er tilfelle vet vedkommende dette. Å påstå noe annet er selvmotsigende. Erstatter man uttrykket "ser" i denne setningen vi har nevnt suksessivt med "hører", "kjenner", "sanser", "sanser direkte", "iaktar", "observerer", "observerer ved direkte sanseiaktagelse" får man en rekke med syv setninger som i likhet med det prinsipp vi har nevnt virker tankenødvendige. Vi skal henvise til prinsippet ovenfor som "prinsippet om sanseiaktagelse som en tilstrekkelig betingelse for kunnskap" eller "observasjonsprinsippet"

La oss nevne endel andre grunnleggende setninger. Vårt fjerde prinsipp kan formuleres slik: *Hvis y er et tankeinnhold som beskriver et forhold x husker ved tidspunktet t så er det også slik at tankeinnholdet y beskriver et forhold x vet er tilfelle ved tidspunktet t*. Dette virker også uimotsigelig og selvinnlysende sant. Det virker vanskelig å se for seg hvordan denne påstanden kan utledes fra andre påstander som er mer opplagte. Kort sagt virker det uimotsigelig at dersom en person faktisk husker at noe er tilfelle så er det også slik at vedkommende vet at dette er tilfelle. Vi tillater oss å refere til denne setningen som "erindringsprinsippet".

Vårt femte prinsipp angår meddelelse. Vi formulerer det slik: *Hvis y er et tankeinnhold som beskriver et forhold som x ved tidspunktet t meddeler individet z så gjelder (a) at z vet at y er tilfelle ved tidspunktet t, (b) x vet ved tidspunktet t at y er tilfelle, (c) z vet ved tidspunktet t at x meddeler ham om at y er tilfelle og (d) x vet ved tidspunktet t at han*

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

meddeler z at y er tilfelle ved tidspunktet t. Vi skal kalle dette prinsipp for "kommunikasjonsprinsippet". Det følger fra dette prinsipp at man ikke kan meddele usannheter til andre. Men man kan naturligvis ved å ytre en påstand på en bestemt måte gi en annen et inntrykk av at man meddeler ham denne påstanden, og dermed gi den andre et inntrykk av at han nå vet at denne påstanden er riktig. Men fra det at man gir en annen et inntrykk av at man meddeler noe følger det ikke at man faktisk meddeler ham noe.

Så langt har vi sett på tre prinsipper som angir tilstrekkelige betingelser for kunnskap. Noe vet vi fordi vi iakter det, noe vet vi fordi vi har iaktatt det og husker det vi har iaktatt, atter andre ting vet vi fordi andre i streng forstand har meddelt oss sine iaktagelser, og atter andre ting vet vi fordi andre i streng forstand har meddelt oss tankeinnhold som de i sin tur har blitt i streng forstand meddelt. Imidlertid kan man trygt si at et menneske, i det minste noen, ikke er bare er passivt registrerende individer, men også er tenkende, og fremfor alt resonnerende individer, med sans for stringent argumentasjon og logisk gyldige argumenter.

La oss nå tenke oss et individ som presenteres for en rekke av påstander, tankeinnhold, a;0, ... ,a;n. Ved refleksjon innser denne personen at a;0 er riktig ved et bestemt tidspunkt, la oss si t. Dette innebærer at personen ved dette tidspunktet vet at a;0 er sann. Suksessivt innser imidlertid denne personen at påstanden a1 følger fra a;0, videre at a;2 følger fra påstanden a;1, osv. inntil vedkommende endelig innser at a;n følger fra a;(n-1). Siden vedkommende allerede vet at a0 er sann må vedkommende da suksessivt komme til den erkjennelse at a1 holder, videre til den erkjennelse at a;2 holder, inntil han tilslutt innser at den siste påstanden i rekken holder, såsant vedkommende husker alle påstandene som kom tidligere i rekken. En persons kunnskap kan derfor øke ved at vedkommende gjennomfører et deduktivt resonnement.

Grunnlaget for slike deduktivt pregede resonnementskjeder er det følgende prinsipp: *Hvis y er et tankeinnhold som x vet at er sant ved tidspunktet t, og x ved tidspunktet t innser at tankeinnholdet z følger fra tankeinnholdet y, er det også slik at x ved tidspunktet t vet at tankeinnholdet z er sant*. Denne generelle påstanden holder også om man overalt erstatter ordet "vet" med "tror" eller "innser". Vi skal tillate oss å kalle denne generelle tesen for "deduksjonsprinsippet". Igjen synes det som om man står ovenfor et uimotsigelig og logisk nødvendig prinsipp.

Er y et tankeinnhold skal vi kalle det for en *selvinnlysende sannhet* dersom det for det første er sant og for det andre er slik at dersom en person fullt ut skjønner hva dette tankeinnholdet y innebærer så innser vedkommende at det er sant. Det er med andre ord umulig å forstå tankeinnholdet y uten at man innser dets riktighet.

Det følger fra denne definisjonen at enhver selvinnlysende sannhet er en sannhet som kan innses uavhengig av erfaringen. Man behøver ikke å gjøre observasjoner eller eller gjennomføre eksperimenter for å bringe på det rene om den er sann. En selvinnlysende sannhet er med andre ord apriori sann.

Den tanke at Galdhøpiggen er 2798 meter er ikke en tanke man kan innse at er sann eller usann bare ved at man setter seg inn i den og forstår hva den innebærer. Man må naturligvis gjøre høydemålinger av forskjellig art, og følgelig systematiske observasjoner for å bringe på det rene om denne setningen er sann. Man kan ikke innse at den er sann uavhengig av erfaringen. Den er ikke apriori sann.

Derimot er det tankeinnhold som uttrykkes av setningen "2+2=4" en åpenbart selvinnlysende sannhet. En person som skjønner hva denne setningen uttrykker vil

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

nødvendigvis og umiddelbart innse at den er sann. Eller sagt på en annen måte: Dersom en person er i tvil om denne setningen er sann er det nødvendigvis slik at vedkommende ikke forstår den.

Nå er det et faktum at det finnes nær sagt talløse tankeinnhold som er selvinnlysende sannheter i den betydning vi har nevnt. Videre er det også et utvilsomt faktum at man med utgangspunkt i visse selvinnlysende sannheter av generell art ved hjelp av mer eller mindre kompliserte bevis kan utlede andre sannheter som langt fra har noe direkte selvinnlysende preg.

La oss på derfor på dette punkt si noen ord om hva vi akkurat her vil forstå med et bevis. Vi tenker oss at dette er en endelig rekke av setninger α;1, ... ,α;n der følgende gjelder om hver formel α;i for iê{1, ... ,n}: α;i er (a) enten en selvinnlysende sannhet eller (b) α;i er sluttet fra en eller flere setninger som kommer tidligere i rekken ved hjelp av en slutningsregel som er innlysende riktig. Dette er ikke spesielt opplysende om man ikke forklarer hva man mener med en slutningsregel som er innlysende riktig. La oss gjøre det. Med en slutningsregel av grad n (n>=1) forstår vi en mengde av n+1-tupler av setninger <α;1, ... ,α;(n+1)>. Er R en slik slutningsregel av grad n sier vi at α;(n+1) kan sluttes fra setningene α;1, ... ,α;n ved hjelp av R hvis og bare hvis <α;1, ... ,α;(n+1)> er et element i R, med andre ord hvis og bare hvis <α;1, ... ,α;(n+1)>êR. Vi sier så at en slutningsregel R av grad n er innlysende riktig hvis og bare hvis vi har for ethvert element <α;1,...,α;(n+1)>êR at (a) enhver person som fullt ut forstår hva de tankeinnhold som uttrykkes av setningene α;1,...,α;(n+1) innebærer også innser at det tankeinnhold som uttrykkes av α;(n+1) følger fra konjunksjonen av de tankeinnhold som uttrykkes av setningene α;1,...,α;n. I tillegg krever vi (b) at setningen α;(n+1) faktisk er en logisk konsekvens av setningene α;1, ... ,α;n.

Er β;1, ... ,β;n et bevis i den betydningen vi nettopp har definert kan man konstatere følgende: Dersom en person leser igjennom dette beviset og ved hvert trinn skjønner hva det tankeinnhold som uttrykkes av β;i (i=1, ... ,n) innebærer vil vedkommende ved β;1 uten videre innse at denne setningen er sann. Har nå vedkommende kommet til β;i (1<i=<n) og huske hva β;1, ... β;(j-1) uttrykker vil vedkommende innse at det tanke innhold som uttrykkes av β;j følger fra et eller flere av de tankeinnhold som uttrykkes av setninger som kommer tidligere i rekken. Siden vedkommende allerede har innsett at disse er sanne vil vedkommende også innse at taneinnholdet uttrykt av β;j er sant i kraft av det vi ovenfor kalte deduksjonsprinsippet hvis β;j er sluttet fra tidligere setninger ved en av slutningsreglene eller innse at tankeinnholdet som uttrykkes av β;j er sant hvis β;j uttrykker en selvinnlysende sannhet. Dette gjelder for alle jê{1, ... ,n}. Hvis derfor personen undersøker alle setningene i beviset vil vedkommende tilslutt innse at de alle er sanne og derfor også den siste, konklusjonen.

Fra dette følger at om vedkommende ikke tidligere visste at de selvinnlysende setningene i beviset var sanne og konklusjonen i beviset er langt fra selvinnlysende, så vil vedkommende etter å ha lest igjennom beviset vite noe som på ingen måte kan kalles trivielt eller opplagt.

La oss før vi går videre bemerke at ethvert bevis i den betydningen vi har innført ovenfor kan bringes på følgende form, nemlig α;1,....,α;k, β;1, ... ,β;j der k>=1 og j>=0 og hvor α;1,... α;k ikke er sluttet fra noen tidligere formler i rekken , det vil si uttrykker selvinnlysende sannheter, og hvor man har at hver og en av setningene β;1,...,β;j er sluttet fra en eller flere tidligere formler ved hjelp av en eller annen innlysende riktig slutningsregel.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

La oss nå sette dette inn i et større perspektiv og relatere det vi har skrevet ovenfor til noen relativt enkle kjennsgjerninger om den klassiske predikatlogikk med identitet samt matematikkens grunnlag. Vi skal gjøre dette før vi fortsetter med å gjøre rede for resten av de prinsippene i kunnskapsteorien vi skal fremlegge senere i mer presis form

Det er en kjennsgjerning at alle de logiske sannhetene som inngår i det som kalles den klassiske predikatlogikk med identitet kan ordnes og systematiseres som det man kaller et aksiomatisk system. Dette gjøres ved at man effektivt spesifiserer en mengde med aksiomer, la oss kalle denne mengden for Δ og visse slutningsregler R;1, ... , R;n. Når det gjelder vanlige aksiomatiseringer av predikatlogikken med identitet vil slutningsreglene være ganske få. I det systemet vi senere skal presentere senere er det faktisk bare en slutningsregel, nemlig modus ponens.

La oss nå si at en setning S er et teorem i predikatlogikken med identitet hvis og bare hvis det finnes en sekvens med seninger α;0, ..., α;k der k>=0 og S=α;k hvor man har for alle α;i der iê{0, ... ,k} at α;i enten er et aksiom eller hvor α;i er sluttet fra en eller foregående formler ved hjelp av en eller annen av slutningsreglene som inngår i systemet.

Mengden av teoremer i systemet kan også karakteriseres som den minste mengden av setninger som inneholder aksiomene Δ og som er lukket under slutningsreglene R;1,...,R;n.

For alle de setninger som tilhører predikatlogikken med identitet kan man angi et, at man gyldighetskriterium. Dette innebærer, og er faktisk ekvivalent med, at man definerer hva som menes med en predikatlogisk sannhet. Det er ikke nødvendig å gjøre dette på en fullstendig presis måte akkurat her. Meget grovt kan man si at en setning er en predikatlogisk sannhet hvis og bare hvis den er sann og at alle setninger med den samme predikatlogiske form er sanne. Dette er naturligvis intetsigende hvis man ikke går et skritt videre og definerer hva som menes med "prdikatlogisk form". Dette kan imidlertid gjøres ved at man sier at en setning S' har samme predikatlogiske form som setningen S dersom og bare dersom setningen S' kan fås fra S ved å erstatte uniformt alle ikke-logiske uttrykk i S med ikke-logiske uttrykk av samme kategori mens man holder de predikatlogiske uttrykkene i S konstante. De predikatlogiske konstantene, eller som man også kunne kalle dem, de predikatlogiske ordene, er kvantorene, dvs. ordene "alle" og "noen", de setningslogiske konstantene samt identitetspredikatet, "x er identisk med y". Det som nå er verdt å merke seg er at det er mulig å aksiomatisere mengden av de predikatlogiske sannhetene. Man kan med andre ord angi en mengde med aksiomer Δ som alle er predikatlogiske sannheter, og et sett med slutningsregler R;1, ... ,R;n, som alltid leder fra predikatlogiske sannheter til predikatlogiske sannheter, slik at mengden av teoremer i predikatlogikken med identitet falle sammen med mengden av predikatlogiske sannheter. Men ikke bare er det mulig å finne en slik aksiomatisering, der også mulig å finne en aksiomatisering der aksiomene i Δ alle er selvinnlysende sannheter og alle slutningsreglene er innlysende riktige i den betydningen vi tidligere har forklart.

Fra det som nå har blitt nevnt følger det at om β er en vilkårlig predikatlogisk sannhet vil det alltid finnes et bevis, dvs. en sekvens av setninger α;1, ... ,α;k, β;1, ..., β;j der β=β;j og hvor α;1, ... , α;k er predikatlogiske sannheter som er selvinnlysende og hvor β;i (i=1, ... ,j) er sluttet fra tidligere setninger ved hjelp av ev de innlysende riktige slutningsreglene som inngår i aksiomatiseringen. Fra dette kan man i sin tur slutte følgende:

Dersom en person leser igjennom denne rekken av setninger og for hver setning fullt ut forstår hva det tankeinnhold som setningen uttrykker innebærer vil vedkommende i første omgang innse at α;1, ... ,α;k er riktige. Vedkommede vil så innse at det tankeinnhold som

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

uttrykkes av β;1 følger fra konjunksjonen av visse av de tankeinnhold som uttrykkes a;1,...,α;k, og siden han nå vet at disse tankeinnhold er sannheter vi vedkommende innse at at β;1 er sann. Det samme vil skje ved β;2. Siden denne setningen er sluttet fra visse foregårnde setninger i rekken, la oss si at det dreier seg om β;1 og α;1 vil vedkommende innse at det tankeinnholdet som uttrykkes av β;2 følger fra det tankeinnhold som uttrykkes av konjunksjonen av β;1 og α;1. Siden vedkommende vet at denne konjunksjonen er riktig vil vedkommende på dette stadium vite at β;2 uttrykker et tankeinnhold som er riktig. Hvis nå personen suksesivt går igjennom de resterende setningene β;3, ..., β;j og husker det han tidligere har innsett vil vi måtte medgi at vedkommende tilslutt vet β=β;k uttrykker en sann påstand. Man ser at det prinsipp som ligger til grunn for dette resonnementet er det vi ovenfor har kalt for deduksjonsprinsippet.

Man kunne oppsummere det vi så langt har kommet frem til ved å si at *i prinsippet er enhver predikatlogisk sannhet erkjennbar*.

Selvinnlysende prinsipper er ikke noe som bare kjennetegner predikatlogikken med identitet. Det er også mulig, noe enhver vet, å formulere generelle selvinnlysende sannheter i matematikken og mengdelæren. La oss si noen ord om mengdelæren før vi går videre og gjør rede for ytterligere grunnsetninger i den kunnskapsteorien vi etterhvert, i senere deler av dette essay, ønsker å formulere helt presist.

Mengdelæren slik vi tenker oss den her er basert på to grunnbegreper, nemlig det begrep som uttrykkes av predikatet "x er en mengde" og det relasjonelle begrepet som uttrykkes av predikatet "x er et element i mengden y". Ved hjelp disse predikatene og de logiske konstantene i predikatlogikken med identitet, det vil si kvantorene, de setningslogiske konnektivene og identitetspredikatet, kan man så formulere de aksiomene som inngår i det systemet som vanligvis kalles for Zermelo-Fraenkel systemet. Aksiomene er mengdeaksiomet, alle instanser av det såkalte utsondringsaksiomskjemaet, parmengde-aksiomet, nullmengdeaksiomet, potensmengdeaksiomet, regularitetsaksiomet, alle instanser av substitusjonsaksiomskjemaet, ekstensjonalitetsaksiomet, uendelighetsaksiomet og utvalgsaksiomet.

Saken er nå denne. Ved hjelp av den vanlige beskrivelsesoperatoren, "det objektet x som er slik at - " og de to mengdeteoretiske predikatene som vi nevnte ovenfor kan man definere alle de vanlige begrepene innenfor det område som litt vagt kan kalles "den klassiske matematikk", det vil si innenfor aritmetikken, læren om de hele, rasjonale, reelle og komplekse tall, differensial og integralregningen, læren om differensialligninger og en lang rekke andre områder av algebraen og analysen. Videre kan også for eksempel den klassiske geometri, via den analytiske geometri, reduseres til mengdelære.

Antar vi nå at vi har for oss en aksiomatisering av predikatlogikken med identitet der Δ er mengden av de aksiomene som inngår, og R;1, ... ,R;n (n>=1) er slutningsreglene, kan vi utvide dette systemet med et standardsett av aksiomer for beskrivelsesoperatoren, videre kan vi utvide denne mer omfattende aksiommengden med de mengdeteoretiske aksiomene vi har nevnt ovenfor, samt legge til alle de definisjonene som gjør det mulig å redusere den klassiske matematikk til mengdelære. Vi vil da ha foran oss et langt mer omfattende aksiomatisk system enn bare predikatlogikken med identitet. Det er nå mulig å definere hva som menes med et bevis i dette mer omfattende systemet på samme måte som tidligere. Et bevis i dette nye omfangsrikere systemet er en sekvens av setninger β;1, ... β;n der vi har for alle β;i (n>=i>=1) at β;i enten (a) er et aksiom, det vil si et predikatlogisk aksiom, et identitetslogisk aksiom, et

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

aksiom i teorien om bestemte beskrivelser, et mengdeteoretisk aksiom eller en definisjon, eller (b) det finnes setninger γ;1, ... ,γ;k som kommer før β;i og β;i er sluttet fra γ;1, ... ,γ;k ved hjelp av en av slutningsreglene som inngår i systemet (og som da må være av grad k).[8] Vi kaller en setning for et teorem i dette systemet vi nå har skissert hvis og bare hvis det finnes et bevis for denne setningen i den betydningen vi nå har angitt. Det som nå kan vises er ikke bare at alle de vanlige begrepene i den klassiske matematikk kan defineres i mengdeteoretiske termer, men også at alle de vanlige satsene i den klassiske matematikk, det vil si i analysen og geometrien, kan bevises i dette systemet.

Anta nå at α er en setning i den klassiske differensial og integrasjonskalkyle, for eksempel mellomverdisetningen. Anta β;1, ... ,β;n er et bevis for α i det aksiomatiske system vi har skissert ovenfor. La oss anta at en person p leser igjennom dette beviset. Ved tidspunktet t;1 konsentrerer han seg om β;1, ved tidspunktet t;2, som kommer etter tidspunktet t;1 leser p setningen β;2, osv. La oss videre anta at p ved hvert tidspunkt t;i (i=1, ... ,n) når vedkommende konsentrerer seg om setningen β;i fullt ut skjønner hva det tankeinnhold som uttrykkes av β;i innebærer og at han også ved alle etterfølgende tidspunkter skjønner hva denne setningen innbærer. La oss ytterligere forutsette at alle aksiomene som inngår i systemet er selvinnlysende sannheter og at slutningsreglene er selvinnlysende riktige i den betydning vi tidligere har gjort rede for. La oss endelig anta at ved hvert tidspunkt t;i i rekken av tidspunkter t;1, ... ,t;n er det slik at at dersom personen p ved t;i vet at det taneinnholdet som utrykkes av β;i er sant er det også slik at at p vet at dette tankeinnholdet er sant ved ethvert senere i rekken, med andre ord vet p at β;i også holder ved t;(i+1), t;(i+2), ... ,t;n[9]. Det skulle være overflødig å nevne at vi forutsetter at tidspunktet t;(i+1) kommer etter tidspunktet t;i for i=1,... ,n-1.

Hva kan man så slutte fra de forutsetningene vi her har gjort? Det er hovedsakelig to ting man kan slutte. For det første:

(a) Fra det vi har forutsatt følger det at p ved tidspunktet t;1 forstår hva det tankeinnhold som uttrykkes av β;1 innebærer. Siden β;1 er det første ledd i beviskjeden er det et aksiom og derfor uttrykker et tankeinnhold som er en selvinnlysende sannhet. Det følger derfor på basis av definisjonen av selvinnlysende sannhet at p ved t;1 må innse at det β;1 uttrykker er sant og derfor at p ved dette tidspunkt vet at det tankeinnhold som uttrykkes av β;1 er sant.

Det andre vi kan slutte fra de forutsetningene vi har gjort rede for er dette:

(b) *Hvis* 1=< i =< (n-1) og vi har for alle j der 1 =<j=<i at p vet ved tidspunktet t;j at det tankeinnholdet som uttrykkes av β;j er sant *så* er det også slik at p ved tidspunktet t;(i+1) vet at det tankeinnhold som uttrykkes av β;(i+1) er sant.

La oss gi en begrunnelse for hvorfor (b) holder. Anta antesedenten i denne "hvis-så"-setningen er sann. Vi må da vise at p ved tidspunktet t;(i+1) vet at det tankeinnhold som uttrykkes av setningen β;(i+1) er sant. Det er to muligheter nå det gjelder β;(i+1):

(i) Setningen er et aksiom. I så fall kan man med at p vet det som uttrykkes av β;(j+1) er sant ved et resonnement som er helt analogt med det som ble fremsatt under (a) ovenfor.

Iii) β;(i+1) er sluttet fra visse tidligere setninger i beviskjeden ved hjelp av en slutningsregel som er innlysende riktig. La oss si at det dreier seg om setningene γ;1, ... ,γ;k.

8 Fra denne definisjon fremgår det at β;1 må være et aksiom.

9 Vi antar med andre ord at kunnskapsfeltet til p er monotont i tidsintervallet [t;1,t;n] relativt til mengden av de tankeinnhold som uttrykkes av setningene β;1, ... ,β;n.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Disse vil da være blant β;1, ... ,β;j. Siden vi antar at antesedenten i (b) holder følger det at p ved visse tidspunkter t;(r;1), ..., t;(r;k) som er blandt tidspunktene t;1, ... ,t;j vet at de tankeinnhold som uttrykkes av henholdsvis γ;1, ... ,γ;k er sanne. Men fra dette og den siste forutsetningen vi gjorde, nemlig den som sa at dersom p vet at det som uttrykkes av en setning i rekken β;1, ... ,β;n er sant ved et tidspunkt vet han også at dette tankeinnholdet er sant ved alle senere tidspunkter, følger at at p ved tidspunktet t;(i+1) vet at alle de tankeinnhold som uttrykkes av γ;1, ...,γ;k er sanne. Dette impliserer at p også vet at det tankeinnholdet som uttrykkes av konjunksjonen av dem er sant ved tidspunktet t;(i+1).

Nå er imidlertid β;(i+1) sluttet fra γ;1, ... ,γ;k ved hjelp av en innlysende riktig slutningsregel. Siden vi forutsetter at p ved tidspunktet t;(i+1) fullt ut forstår hva de tankeinnhold som uttrykkes av γ;1, ... ,γ;k og β;(i+1) innebærer og slutningsregelen er innlysende riktig følger det at p ved tidspunktet t;(i+1) innser at tankeinnholdet som uttrykkes av β;(i+1) følger fra tankeinnholdet som uttrykkes av konjunksjonen av γ;1, ...,γ;k. Siden dette tankeinnholdet som er konjunksjonen av γ;1, ..., γ;k også er noe vi fant ut at p vet ved tidspunktet t;(i+1) følger det ved hjelp av det vi ovenfor kalte *deduksjonsprinsippet* at p vet at det tankeinnhold som uttrykkes av β;(i+1) er sant ved tidspunktet t;(i+1). Dette er det resonnement vi kan gi til fordel for (b)

Fra de to punktene (a) og (b) følger det ved induksjon at p ved tidspunktet t;n vet at det tankeinnhold som uttrykkes av β;n=α er sant, med andre ord vet p ved sluttidspunktet t;n at mellomverdisetningen holder.

Vi konkluderer i lys av det som er sagt ovenfor med at en hvilken som helst bevisbar setning innenfor den klassiske matematikk og geometri i prinsippet er erkjennbar.

Vi har nå, riktignok noe uformelt, gjort rede for noen av de prinsipper vi oppfatter som sentrale i erkjennelsesteorien. Som man ser er disse prinsippene av en relativt enkel, selvinnlysende og "banal" karakter. Det bør understrekes at dette er som det bør være. Man kan ikke i vitenskapen og derfor heller ikke i filosofien og logikken, starte med prinsipper som er vanskelige å forstå, uhyre innviklete og som overhodet ikke har en innlysende karakter uansett hvor sanne de enn måtte være. Hvis slike prinsipper skal kunne aksepteres, hvis noen med fornuft og forstand skal kunne innse at de er riktige, må de kunne utledes fra helt opplagte prinsipper, eller andre påstander man vet er riktige, ved hjelp av slutningsregler ethver rasjonelt menneske må innse riktigheten av.

De grunnsetningene som vi nå skal skissemessig omtale kan indeles i to grupper. Den første gruppen skalvi kalle for *konjunksjonsprinsippene*. La oss se på den følgende påstand:

(1) Hvis y og z er tankeinnhold som x ved er riktige ved tidspunktet t er det også slik at det tankeinnhold som er konjunksjonen av tankeinnholdene y og z også er et tankeinnhold som x vet ved tidspunktet t.

Det omvendte virker også uimotsigelig:

(2) Er konjunksjonen av tankeinnholdene y og z et tankeinnhold som x vet ved tidspunktet t er det også slik at x , såvel som y, er et tankeinnhold som x vet er riktig ved tidspunktet t. Vi skal kalle konjunksjonen av (1) og (2) for *konjunksjonsprinsippet for viten*.

Man kunne noe unøyaktig, men kortere sammenfatte påstandene (1) og (2) ved å si at en person vet at α&β er tilfelle hvis og bare hvis vedkommende vet at α er tilfelle og vedkommende vet at β er tilfelle.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Helt tilsvarende konjunksjonsprinsipper virker ytterst plausible for de andre modalitetene som har figurert i våre betraktninger ovenfor. Erstatter man ordet "vet" i (1) og (2) med enten "ser", "husker", "innser","tror", "merker" osv. får man setninger som åpenbart virker riktige.

Den neste familien av grunnsetninger som inngår i vår teori er vanskeligere å avgrense ved en enkel formel og endel av prinsippene kan virke mer kontroversielle enn andre. Vi har i tankene slike prinsipper som for eksempel de følgende: Dersom en person ser at noe er tilfelle vet vedkommende at han ser at dette er tilfelle. Husker en person at noe er tilfelle er det også slik at han vet at han husker dette. Vet en person at noe er tilfelle må det også være slik at vedkommende vet at han vet dette. Innser en person at noe er tilfelle vil det faktum at han innser dette også være noe noe han vet er tilfelle. Likeledes vil det være slik at dersom en person innser at et tankeinnhold følger fra et annet må det nødvendigvis være slik at dette at han innser denne følgerelasjonen er noe vedkommende vet.

De påstandene vi har nevnt virker plausible. Man kan formulere lignende påstander i forbindelse med tro. For eksempel: Tror en person at noe er tilfelle må vedkommende også tro at han tror dette. Det omvendte virker også rimelig. Dersom en person tror at han tror at noe er tilfelle er det også slik at han tror dette. Man kan med andre ord ikke være overbevist om at man tror p uten at man faktisk tror p.

Vi skal omtale de prinsippene vi har gitt eksempler på ovenfor og nær beslektede prinsipper for "prinsippene for modaliteter av høyere orden". Begrunnelsen for denne litt pompøse terminologi er at det virker naturlig å si at dersom en person for eksempel vet at jorden er kuleformet representerer dette kunnskap om et forhold som ikke har noe med personen selv å gjøre. Man kunne derfor si at dette derfor representerer kunnskap av første orden. Dersom en person derimot vet at han vet at jorden er rund er objektet for hans kunnskap det forhold, eller det tankeinnhold, at han vet at jorden er rund. Objektet er ikke det forhold at jorden er rund. Det skulle være klart at det tankeinnhold at x vet at jorden er rund er helt forskjellig fra det tankeinnhold at jorden er rund. Det virker derfor ikke unaturlig å kalle viten om at man vet noe for kunnskap av annen orden. Hvis man finner dette rimelig følger det også at det vil være naturlig å kalle viten om at man vet at man vet noe for kunnskap av tredje orden. Videre vil det være natur å si at dersom Ole vet at Jens vet at Petter vet at jorden er kuleformet så vil også dette faktum representere kunnskap av tredje orden.

Det er nok en grunnsetning som vi også finner det viktig å nevne. Den sier at dersom en person x tror at et tankeinnhold y er sant ved tidspunktet t er det umulig at x ved dette tidspunktet t også tror at negasjonen av tankeinnholdet y er sant. Sagt på en annen måte sier prinsippet at dersom x ved tidspunktet t tror at α er det ikke slik at x ved dette tidspunktet t tror at ikke-α. I lys av konjunksjonsprinsippet som vi omtalte ovenfor er dette ekvivalent med at ingen person tror på noe utsagn som sier at både α og ikke-α er tilfelle. Dette prinsippet sier følgelig at ingen tror på noen direkte motsigelse. Vi skal kalle dette prinsippet for "det svake konsistensprinsippet for tro".

Det bør understrekes at dette prinsippet ikke impliserer at en persons trossystem ikke kan inneholde noen motsigelser. Det er fullt forenelig med det prinsippet vi her har nevnt, og forøvrig våre andre prinsipper, å tenke seg en person som ved et tidspunkt t tror at β er tilfelle og som også tror at γ er tilfelle og hvor det faktisk er slik at β logisk sett impliserer

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

negasjonen av γ. Det man ved hjelp av de prinsipper vi har nevnt kan slutte fra dette er at det i dette tilfelle er det umulig at personen ved tidspunktet t innser at negasjonen av γ følger fra β.

Det bør bemerkes at den språkrammen som vår teori er formulert innenfor er et rent første-ordens språk. Alle konstruksjonene i dette språk er derfor ekstensjonale. Språket inneholder derfor ikke setninger av typen "Det er nødvendig at α" eller "x tror ved tidspunktet t at α". De to siste konstruksjonene er klart ikke-ekstensjonale. Når det gjelder tro og viten inkluderer det språket vi arbeider med bare predikatet " y er et finstrukturert utsagn som beskriver et forhold som x tror ved tidspunktet t i verdenen w at foreligger". Vi kan derfor ikke ute videre innenfor dette språk formulere en påstand som for eksempel den at dersom en person x tror at α så er det også slik at han tror at at han tror at α. Det eneste man innenfor vår ramme kan uttrykke som ligner dette er at dersom y er et finstrukturert utsagn som beskriver et forhold x tror ved tidspunktet t i verdenen w at foreligger så finnes det et finstrukturert utsagn z hvis sannhetsmengde er mengden av alle de verdener w' der man har at y er et utsagn som x tror ved tidspunktet t i verdenen w' at foreligger og at x tror dette finstrukturerte utsagn z ved t i verdenen w.[10]

For derfor å kunne formulere noe som er ekvivalent med den åpenbart sanne setning at dersom x tror at α er det også slik at x tror at han tror at α, finner vi det nødvendig å innføre det vi kaller begrepsrammer. Her vil vi bare skissemessig gjøre rede for innholdet i dette begrepet. En rigorøs definisjon vil bli gitt i Del I, §2.1 og §2.2. For ytterligere å kunne gi leseren en innsikt i dette begrep er det i sin tur nødvendig å forklare hva vi forstår med *en intensjonal relasjon av type <m,n> (m>=0, n>0) over en ikke-tom mengde D*.

Vi vil se på et eksempel for å belyse dette begrep. La oss bruke "Tror;(w,t)(x,y)" som forkortelse for "y er et finstrukturert utsagn som beskriver et forhold x tror ved tidspunktet t i verdenen w at foreligger". La oss nå betrakte mengden av alle de par <<x,t>,y> der vi har at Tror;(w,t)(x,y). Denne mengden vil være fiksert for enhver mulig verden w. Den funksjonen som tilordner enhver mulig verden w mengden av alle de par <<x,t>,y> der vi har Tror;(w,t)(x,y) vil være en ekstensjonsfunksjon som entydig bestemmer en egenskap. Denne egenskapen vil vi betegne med |Tror| og den vil være et eksempel på en intensjonal relasjon av typen <2,1> over enhver mengde D som inneholder mengden av alle personer og mengden av alle tidspunkter. (Disse mengdene har vi postulert at eksisterer.)

Generelt forstår vi med en intensjonal relasjon av type <m,n> over mengden D en egenskap x der ekstensjonen til x i enhver verden er en mengde med par <<y;1,..,y;n>,<u;1,...,u;n>> der y;1, ... ,y;n êD og u;1, ... ,u;n er finstrukturerte utsagn.

Det er nå mulig å definere hva som menes med en *begrepsramme* på en presis måte. Med en begrepsramme forstås rett og slett et triple <D,X,In> der D er en ikk-tom mengde, X en ikke-tom mengde med egenskaper over D og der In er en mengde med intensjonale relasjoner av type <m,n> over D. Er derfor i êIn må det derfor finnes m>=0, n>0 slik at i er en intensjonal relasjon av type <m,n> over D.

10 Bruker vi "U;f" som navn på mengden av finstrukturerte utsagn og "Tror;(w,t)(x,y)" som forkortelse for "y er et finstrukturert utsagn som beskriver et forhold x tror ved tidspunktet t i verdenen w at forligger" kan det sistnevnte utsagn formaliseres slik:

(1) Tror;(w,t)(x,y) → (Ez)(zêU;f & μ;f(z) = Mg(w': Tror;(w',t)(x,y)) & Tror;(w,t)(x,z))

Man ser at det ikke er så lett å reformulere (1) i vanlig hverdagsspråk på en elegant og lettforståelig måte.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Vi har nå definert begrepet begrepsramme og det er derfor på dette trinn i vår fremstilling mulig å definere mengden av formler assosiert med en begrepsramme. Anta B=<D,X,In> er en begrepsramme. Først betrakter vi den endelige mengden med fire-tupler som består av <0,0,0,0>, <0,0,0,1>, <0,0,0,2>, <0,0,0,3>. Disse representerer henholdsvis negasjonstegnet, tegnet for kondisjonal, allkvantoren og tegnet for identitet. Vi setter derfor N= <0,0,0,0>, C=<0,0,0,1>, A=<0,0,0,2>, Id=<0,0,0,3>. Vi kaller disse fire fire-tuplene for de logiske konnektivene assosiert med B. Mengden av fire-tupler av typen <1,0,0,n> der n er et naturlig tall, kalle vi for variabeltegnene assosiert med begrepsrammen B. Med *konstantene assosiert med begrepsrammen B* forstår vi alle fire-tupler av typen <2,0,0,x> der xêD. Med et *n-ært egenskapsuttrykk assosiert med B* forstår vi et fire-tuple <3,n,0,x> der x er en n-ær egenskap over D og hvor x er et element i D. Endelig forstår vi med et *navn på en intensjonal relasjon av type <m,n> assosiert med begrepsrammen B* et fire-tuple <4,m,n,x> der m>=0, n>0 og hvor x er en intensjonal relasjon av type <m,n> over D som er med i In. Vi har nå avgrenset fire disjunkte mengder av fire-tupler assosiert med en begrepsramme B. Vi kaller ethvert element som er med i en eller annen av disse mengdene for et *tegn assosiert med B.* Et *uttrykk assosiert med B* er definert som enhver endelig sekvens av tegn assosiert med B. Formlene assosiert med B, Fm(B) er da en underklasse av uttrykkene assosiert med B.[11] Vi kaller mengden av alle de formlene som er assosiert med B som ikke innholder fri variabeltegn for de lukkede formlene assosiert med B, CFm(B). Er derfor B= <D,X,In> en begrepsramme er følgelig Fm(B) og CFm(B) entydig bestemt.

Det er meningen at de lukkede formlene assosiert med en begrepsramme skal uttrykke finstrukturerte utsagn. Vi betegner mengden av alle finstrukturerte utsagn med U;f. Er B=<D,X,In> en begrepsramme innfører vi derfor en funksjon ξ som avbilder CFm(B) en-entydig inn i U;f. Vi kaller det ordnete paret av B og ξ, ie. <<D,X,In>,ξ> for en utvidet begrepsramme og vi sier at denne utvidete begrepsrammen representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn hvis og bare hvis den oppfyller de følgende krav:

(i) Er e et n-ært egenskapsnavn assosiert med B og er a;1,...a;n konstanter assosiert med B har man for alle wêI:

w ⊨;f ξ(ea;1....a;n) ↔ <(a;1);4,....,(a;n);4>êEkst;w((e);4)

(ii) Er i et navn på en intensjonal relasjon av type <m,n> assosiert med B, a;1, ... ,a; m konstanter assosiert med B og β;1, ..., β;nêCFm(B) har man for alle wêI:

w ⊨;f ξ(ia;1...a;nβ;1...β;n) ↔

<<(a;1);4,....,(a;n);4>, <ξ(β;1),...,ξ(β;n)>>ê Ekst;w((i);4)

(iii) Er a;1, a;2 konstanter assosiert med B har man for alle wêI:

w ⊨;f Ida;1a;2 ↔ (a;1);4 = (a;2);4

(iv) Er α,β êCFm(B) har man for alle wêI:

(a) w ⊨;f ξ(Nα) ↔ ¬(w ⊨;f ξ(α))

(b) w ⊨;f ξ(Cαβ) ↔ (w ⊨;f ξ(α) → w ⊨;f ξ(β))

11 Fm(B) er definert induktivt slik: (i) Er F et n-ært egenskapsuttrykk assosiert med B og e;1...e;n en sekvens der e;i enten er et variabeltegn eller en konstant så er Fe;1... e;n en fomel assosiert med B. (ii) Er α;1, ..., α;n formler assosiert med B og g e;1...e;m en sekvens der e;i (i=1.. m) enten er et variabeltegn eller en konstant, og er i et navn på en intensjonal relasjon av type <m,n> assosiert med B er ie;1,...,e;mα;1,...,α;n en formel assossiert med B. Er α,β fomler assosiert med B og x et variabel tegn assosiert med B er Nα, Cαβ og Axα formler assosiert med B.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(v) Er αêFm(B), og er x det eneste variabeltegnet som forekommer fritt i α, har man for alle wêI:

w ⊨;f ξ(Πxα) ↔ (Az)(zêD → w ⊨;f ξ(α;x[<2,0,0,z>]))

Vi har ovenfor avgrenset en meget omfattende klasse av strukturer, nemlig klassen av begrepsrammer. Vi kan imidlertid se på begrepsrammer som oppfyller en del mer spesifikke krav. Anta B=<D,X,In> er en begrepsramme. Man kan da kreve for det første at mengden av tidspunkter, denne betegner vi med T og mengden av personer, P, er inkludert i domenet til begrepsrammen, ie at T,P Inkl D. Videre kan kreve at det konstante attributtet hvis ekstensjon i enhver mulig verden er T er med i X, og at det tilsvarende gjelder for P. Disse to monadiske attributtene skal vi betegne med |T| og |P|. Vi har innført før-relasjonen mellom tidspunkter, <;f. Den binære egenskapen som i enhver verden w har som sin ekstensjon mengden Mg(<x,y>: x <;f y) betegner vi med |<;f|. Man kan kreve at denne også er med i X. Vi nevnte som eksempel på en intensjonal relasjon den intensjonale relasjonen |Tror| av type <2,1> over D. Man kan kreve at denne er med i In. Som man skjønner fra det vi har nevnt tidligere kan man definere tilsvarende intensjonale relasjoner av type <m,n> over D i forbindelse med predikatene man får når man setter inn "vet", "ser", "husker", "innser" istedet for tror i predikatet "y er et finstrukturert utsagn som beskriver et forhold x tror ved tidspunktet t i verdenen w at foreligger". Disse betegner vi med henholdsvis |Vet|, |Ser|, |Husk| og |Innse|. En begrepesramme B=<D,X,In> som oppfyller de kravene vi nå har nevnt skal vi kalle for en standard begrepesramme. La oss før vi går videre nevne at vi setter Tror_ = <4,2,2,|Tror|>, videre Vet_ = <4,2,2,|Vet|>, Ser_ = = <4,2,2,|Ser|> og tilsvarende for |Husk| og |Innse|.

Igjen en definisjon før vi kommer til hvordan vi kan formulere konjunksjonsprinnsippene, prinsippene for modaliteter av høyere orden og det svake konsistensprinsippet for tro innenfor vår ramme. Anta B=<D,X, In> er en begrepsramme og ξ : CFm(B) -(1-1)→U;f og at <B,ξ> representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Anta αêFm(B). Da betyr ⊨;B α at man har at w ⊨;f α' holder for enhver verden w og enhver instans α' av α. Uttrykket " ⊨;B α" leses "Formelen α er gyldig i begrepsrammen B".

La oss nå se på noen av de prinsippene vi har nevnt ovenfor. Vi starter med det såkalte "konjunksjonsprinsippet" for tro. Dette kan uformelt formuleres slik: En person tror at det både er slik at α og slik at β hvis og bare hvis vedkommende tror at α og vedkommende tror at β. Siden konstruksjonen "tror at" ikke inngår i språket til vår teori kan vi ikke formulere dette direkte. Et prinsipp som vi imidlertid kan formulere innenfor vår rent predikatlogiske ramme er dette: *Anta <B,ξ> er en utvidet standard begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn, anta videre at α,β êFm(B) og at x,t er variabeltegn assosiert med B. Da har man:*

⊨;B Tror_;(x,t)(α&β) ↔ Tror_;(x,t)(α) &Tror_;(x,t)(β)

Tilsvarende prinsipper fremkommer om man i dette prinsippet erstatter "Tror_" med ett av de følgende uttrykk: "Vet_", "Ser_", "Husk_", "Innse_"

Når det gjelder det vi ovenfor kalte for det svake konsistensprinsippet om tro kan dette formuleres slik: *Anta <B,ξ> er en utvidet standard begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn, anta videre at α,β êFm(B) og at x,t er variabeltegn assosiert med B. Da har man:*

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

$\models_{;B} Tror_;(x,t)(\alpha) \leftrightarrow \neg Tror_;(x,t)(\neg\alpha)$

Tidligere nevnte vi også en rekke prinsipper som vi kalte prinsippene for modaliteter av høyere orden. Også noe som svarer til disse prinsippene kan nå uttrykkes innenfor den rammen vi har satt opp. I vår teori tar vi også med det følgende som et grunnleggende prinsipp:

Anta <B,ξ> er en utvidet standard begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn, anta videre at α,β êFm(B) og at x,t er variabeltegn assosiert med B. Da har man:

$\models_{;B} Ser_;(x,t)(\alpha) \rightarrow Vet_;(x,t)(Ser_;(x,t)(\alpha))$
$\models_{;B} Innse_;(x,t)(\alpha) \rightarrow Vet_;(x,t)(Innse_;(x,t)(\alpha))$
$\models_{;B} Husk_;(x,t)(\alpha) \rightarrow Vet_;(x,t)(Husk_;(x,t)(\alpha))$
$\models_{;B} Vet_;(x,t)(\alpha) \rightarrow Vet_;(x,t)(Vet_;(x,t)(\alpha))$
$\models_{;B} Tror_;(x,t)(\alpha) \rightarrow Tror_;(x,t)(Tror_;(x,t)(\alpha))$

Vi har nå faktisk sett på de viktigste grunnprinsippene som inngår i det vi kaller vår kunnskapsteori, samt gitt en redegjørelse, om ikke helt fullstendig, for de grunnbegrepene som inngår i den. De grunnsetningene vi har omtalt i forbindelse med mengder, egenskaper, utsagn og det vi kaller finstrukturerte utsagn, samt en rekke teoremer som relaterer utsagn til finstrukturerte utsagn formulerer vi helt presist i Del I, §1. I denne delen gir vi også en presis definisjon av hva vi forstår med en intensjonal relasjon, samt gir en presis definisjon av begrepet begrepsramme. Vi gir også et konsistensbevis for den påstand at det finnes begrepsrammer som representerer delmengder av finstrukturerte utsagn. Dette skjer i Del I, §2 og i underparagrafer til denne paragrafen.

Når det gjelder det vi har skrevet om grunnleggende setninger om viten, tro, iaktagelse og meddelelse ovenfor blir disse setningene presist formulert i Del II §1. Her avgrenser vi språket til vår kunnskapsteori helt eksakt og formulerer de grunnsetningene vi har nevnt ovenfor. Videre gjør vi rede for de grunnsetningene som ikke kan formuleres uten at man trekker inn begrepsrammer, og gjør eksplisitt rede for hva som forstås med en standard utvidet begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Vi formulerer så presist grunnsetningene om modaliteter av høyere orden, konjunksjonsprinsippene for de ulike modalitetene og formulerer det svake konsistensprinsippet for tro. Dessuten gir vi en helt eksakt og formell definisjon av teorien.

I Del II, §2 utvikler vi en del av konsekvensene til teorien, slik at leseren får et klarere innblikk i hva som faktisk følger fra den. Spesielt gir vi bevis for de tesene vi nevnte ovenfor, nemlig at enhver setning i logikken og matematikken som er bevisbar i prinsippet også er erkjennbar. I det hele tatt skulle de teoremene vi beviser i Del II, §2.1 - §2.3 gi en et ganske tydelig og forholdsvis fyldig bilde av hva slags teoremer som kan utledes i den kunnskapsteorien vi har oppstilt i Del II, §1.1 - §1.5.[12]

12 Den tenkning som har brakt oss fra Evklids geometri til Perelmans løsning av Poicares gjetning står i den deduktive tenknings tegn. Ingen empiriske undersøkelser ligger til grunn for disse tankeprestasjoner, utelukkende det prinsipp at man fra et utgangspunkt som ikke bare virker opplagt, men er uigjendrivelig sant, skrittvis ved hjelp av enkle slutningsregler som også er ugjendrivelig evidente og sikre kan oppnå resultater som ingen visste på forhånd og som krever den aller største oppfinnsomhet, utholdenhet og åndelige tankekraft. Det å forstå *grunnlaget* for disse prestasjoner er å forstå grunnlaget for vestens vitenskap, sivilisasjon og kultur. Den epistemiske logikk beskjeftiger seg nettopp med dette grunnlag. Vårt beskjedne

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

La oss nå gå over til å gi et forholdsvis kortfattet resymé av innholdet i den tredje delen av dette arbeid, ie. Del III.

Som man husker brukte vi "Tror;(w,t)(x,y)" som forkortelse for predikatet "y er et finstrukturert utsagn som beskriver et forhold x tror ved tidspunktet t i verden w at er tilfelle." Setter man inn i dette predikatet ett av uttrykkene "vet", "ser", "husker", "innser" eller "meddeler z" i stedet for utrykket "tror" får man fem nye predikater som vi forkorter medd henholdsvis "Vet;(w,t)(x,y)", "Ser;(w,t)(x,y)", "Husk;(w,t)(x,y)", "Innse;(w,t)(x,y)" og "Med;(w,t)(x,z,y)". Nå er det klart at dersom det er tilfelle at Tror;(w,t)(x,y) så er w en logisk mulig verden, ie. wêI, t et tidspunkt i mengden T, x en person, ie. xêP og y et finstrukturert utsagn. Dette innebærer at dersom vi setter per definisjon

Tror = Mg(<w,t,x,y>: Tror;(w,t)(x,y))

så har man at Tror Inkl IxTxPxU;f. På tilsvarende måte kan man definere relasjonene Vet, Ser, Husk, Innse og Med. Også disse relasjonene er naturligvis inkludert i IxTxPxU;f. Vi skal kalle disse seks relasjonene vi har definert for *de epistemiske relasjonene*.

La oss nå formulere en viktig definisjon: Er R en vilkårlig relasjon som er inkludert i IxTxPxU;f kaller vi mengden av alle de finstrukturerte utsagn y der vi har at <w,t,x,y>êR for *utsagnsfeltet til R med hensyn på x,t og w*. Denne definisjonen kan derfor anvendes på de seks epistemiske relasjonene vi har nevnt ovenfor. Derfor er utsagnsfeltet til f. eks. relasjonen Vet med hensyn på x,t og w mengden av alle de finstrukturerte utsagn y der vi har at Vet;(w,t)(x,y). Vi skal betegne det utsagnet som sier at utsagnet y er en logisk konsekvens av alt det personen x tror ved tidspunktet t med "Tror°;(x,t)(y)". Dette lar seg eksplisitt definere ved hjelp av grunnbegrepene i vår teori.[13]

Er x et utsagn som er sant i alle mulige verdener skriver vi " ⊨ x". Dette uttrykket betyr derfor at x er et logisk nødvendig utsagn. Er x og y to utsagn betegner "x =>y" kondisjonalutsagnet som har x som antesedent og y som konsekvent. Har man at ⊨ (x =>y) sier vi at utsagnet x impliserer utsagnet y. Er nå y et utsagn er naturligvis også Tror°;(x,t)(y) et utsagn. Tror°;(x,t) kan derfor oppfattes som en funksjon som avbilder U inn i U.

Det er nå ikke så vanskelig å se på grunnlag av definisjonen av operasjonen Tror°;(x,t) at denne har de følgende to egenskaper:

(a) Er α et nødvendig sant utsagn ie. ⊨α så er også utsagnet Tror°;(x,t)(α) nødvendig sant, med andre ord: ⊨ Tror°;(x,t)(α).

(b) Er α, β to vilkårlige utsagn har man at kondisjonalen som har konjunksjonen av utsagnet Tror°;(x,t)(α) og utsagnet Tror°;(x,t)(α=>β) som antesedent og utsagnet Tror°;(x,t)(β) som konsekvent er logisk nødvendig sant. Vi har med andre ord:

⊨ Tror°;(x,t)(α) ∩ Tror°;(x,t)(α=>β). => Tror°;(x,t)(β)

forsøk på å forstå dette grunnlag er dermed et forsøk på å forstå nettopp den høye vitenskapelige kultur som har gjennomsyret vesteuropa. Det er derfor intet eiendommelig i å kalle teoremene i Del II, §2.1 for epistemologiens fundamentalsatser.

13 Man har at utsagnet y er en logisk konskevens av mengden av finstrukturerte utsagn Δ hvis og bare hvis I ∩ SN(Mg(μ;f(z): zêΔ)) Inkl μ(y). Er Δ tom har man da at I Inkl μ(y), med andre ord at y er det nødvendig sanne utsagn. Tror°;(x,t)(y) er da utsagnet hvis sannhetsmengde er mengden av alle de verdener w der man har: I∩SN(Mg(μ;f(z): Tror;(w,t)(x,z))) Inkl μ(y). Eksplisitt kan Tror°;(x,t) defineres slik: Tror°;(x,t)(y) = μ;-1(Mg(w: I∩SN(Mg(μ;f(z): Tror;(w,t)(x,z))) Inkl μ(y))). Se Del III, §2, Definisjon 2.1.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Vi har ovenfor brukt den epistemiske relasjonen Tror som et eksempel og vist hvordan vi kan definere operasjonen Tror°;(x,t). Det skulle imidlertid være klart at vi på helt analogt vis kan definere operasjoner som Vet°;(x,t)(α), Ser°;(x,t)(α), Med;(x,z,t)(α) osv. i forbindelse med de fem predikatene vi har nevnt ovenfor. Med andre ord holder punktene (a) og (b) ovenfor om vi overalt erstatter "Tror" med ett av uttrykkene "Vet", "Ser", "Husk", "Innse" eller "Med".

I stedet for å undersøke egenskapene til hver og en av disse operatorene separat undersøker vi i Del III det som i en viss forstand er felles for dem. I Del III, §2.2 intoduserer vi derfor begrepet *K-funksjon*.

En K-funksjon er en funksjon F som oppfyller de følgende tre krav

(i) $F: U \rightarrow U$

Er α,β vilkårlige utsagn har man at

(ii) $\models \alpha \rightarrow \models F(\alpha)$

(iii) $\models F(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (F(\alpha) \Rightarrow F(\beta))$[14]

I Del II, §2.2, viser vi hva slags egenskaper K-funksjoner i denne betydningen har og sammenfatter disse elementære egenskapene i tre teoremer som vi kaller for Elementær I - III.[15] Siden operasjonene Tror°;(x,t), Ser°;(x,t) osv. som vi allerede har sett er K-funksjoner følger det at alle disse operasjonene har de egenskapene som er omtalt i de nevnte elementærteoremer.

Et viktig teorem om K-funksjoner er at dersom F;1 og F;2 er slik funksjoner så er også sammensetningen av dem ie. funksjonen λ/αêU/(F;1(F;2(α))) en K-funksjon. Hvis derfor K;1, ... , K;n, ... er en uendelig sekvens av K- funksjoner og vi induktivt definerer L;n ved:

(i) $L;1(\alpha) = K;1(\alpha)$ og

(ii) $L;(n+1)(\alpha) = K;(n+1)(L;n(\alpha))$

kan man også vise at L;n for ethvert $n>=1$ er en K-funksjon.

Som et korollar til dette faktum har man at de tre elementærteoremene vi nevnte ovenfor også gjelder for enhver funksjon i rekken L;n/n>=1/. Vi formulerer og beviser disse tre teoremene som følger fra Elementærteorem I - III og kaller dem Iterasjonsteorem I - III.[16]

Når det gjelder relasjonen Tror (eller for den saks skyld noen av de andre epistemiske relasjonene vi har nevnt), kan man definere en annen type operator enn Tror°;(x,t) som det er naturlig å betrakte. En ting er at et utsagn er implisert av utsagnene i utsagnsfeltet til relasjonen Tror med hensyn på x,t og w. En annen ting er at et utsagn er ekvivalent med et finstrukturert utsagn som er med dette utsagnsfelt. Vi betegner det utsagnet som sier at utsagnet y er ekvivalent med et finstrukturert utsagn som x tror ved tidspunktet t med

14 Vi kaller en funksjon av denne typen for en K-funksjon fordi man i modal setningslogikk kaller systemet som er en utvidelse av setningslogikken med modaloperatoren Nec og med den følgende slutningsregel |- α → |-Nec(α) og det følgende aksiomskjema |- Nec(α→β)→. Nec(α) → Nec(β) for systemet K.

15 Se Del III, §2.2, Teorem 2.2.1 - 2.2.4.

16 Se Del III, §2.3, Teorem 2.3.4 - Teorem 2.3.6. Det er også viktig å studere Korollar 2.3.1 som er et korollar til det andre iterasjonsteoremet, ie. Teorem 2.3.5.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

"Tror*;(x,t)(y)".[17] Tror*;(x,t) er følgelig en operasjon som avbilder ethvert utsagn y på utsagnet Tror*;(x,t)(y), med andre ord er det en operasjon som avbilder mengden av utsagn,U, inn i mengden av utsagn. Man kan naturligvis definere helt analoge operasjoner i forbindelse med de epistemiske relasjonene Vet, Ser, Husk, Innse, og Med.

Når det gjelder lover som gjelder for som det er naturlig å nevne for operasjonen Tror*;(x,t) er dette færre en for operasjoner av typen Tror°;(x,t). De mest grunnleggende er de følgende to:

(a) Tror*;(x,t) : U → U

(b) ⊨ α <=> β → ⊨ Tror*;(x,t)(α) <=> Tror*;(x,t)(β)

Man kan naturlig nok generalisere dette noe, (uten at man derfor får frem noe som fra en logisk elle matematisk synsvinkel er spesielt interessant) ved å definere hva man mener med en *E-funksjon*. Dette er en funksjon E som oppfyller de følgende krav (om α,β êU) :

(a) E: U → U

(b) ⊨ α <=> β → ⊨ E(α) <=> E(β)

Man ser da at alle funksjoner av typen Ser*;(x,t). Husk*;(x,t) osv. er E-funksjoner i denne betydning.

Når det gjelder E-funksjoner har disse i seg selv ikke mange særlig interessante egenskaper. Det man imidlertid kan vise som har en viss interesse er at utsagnene Ser*;(x,t)(α), Husk*;(x,t)(α), Innse*;(x,t)(α) og Med*;(x,z)(α) alle impliserer Vet*;(x,t)(α) som i sin tur impliserer Tror*;(x,t)(α) og α. Dette kan man gi et i og for seg rigorøst bevis for på grunnlag av grunnsetningnene i vår kunnskapsteori.

En annen ting som også kan nevnes er at for eksempel Tror*;(x,t)(α) impliserer utsagnet Tror°;(x,t)(α), med andre har man om α er et utsagn som er ekvivalent med et finstrukturert utsagn som x tror ved tidspunktet t så er α også implisert av alle de finstrukturerte utsagnene som x tror ved tidspunktet t. Tilsvarende satser gjelder for de andre epistemiske relasjonene vi har nevnt.

Vi har nå sett på den på de viktigste temaene som tas opp i den første halvdelen av Del III. La oss nå gi en skisse av innholdet i den siste delen.

I Del I gjorde vi rede for hva vi mente med at en mengde med finstrukturerte utsagn, Δ, var *rasjonelt organisert*. Dette innebar at Δ oppfylte de følgende krav: (i) Ethvert finstrukturert utsagn som er sant i enhver mulig verden er med i Δ. (ii) Er α og β to finstrukturerte utsagn som er med i Δ finnes det et finstrukturert utsagn γ som er med i Δ og der sannhetsmengden til γ er snittet av sannhetsmengden til α og β. (iii) Det finnes en mulig verden der alle de finstrukturerte utsagnene i Δ er sanne. (iv) Er Γ en delmengde av Δ og snittet av alle sannhetsmengdene til de finstrukturerte utsagnene som er med i Γ er inkludert i sannhetsmengden til det finstrukturerte utsagnet y så er også y med i Δ.

I Del I gir vi også en tilsvarende definisjon av hva vi mener med at en *utsagnsmengde* er rasjonelt organisert. Dette innebærer at den inneholder det nødvendig utsagn, er deduktivt lukket, at den er lukket under konjunksjon og at den er konsistent. Man kan da vise at dersom Δ er en mengde med finstrukturerte utsagn som er rasjonelt organisert og Δ* er mengden av alle de utsagn y der man har at det finnes et ekvivalent finstrukturert utsagn i Δ så er også utsagnsmengden Δ* rasjoneltvi organisert.

17 Den presise definisjonen er den følgende:
Tror*;(x,t)(α) = μ;-1(Mg(w: wêI & αêU & (Ez)(zêU;f & μ(α)=μ;f(z) & Tror;(w,t)(x,α))))

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

I det følgende skal ta vårt utgangspunkt i den epistemiske relasjonen Tror. Vi kunne i stedet ha betraktet en av relasjonene Vet, Husk, Innse, Med eller en vilkårlig relasjon R som er inkludert i IxTxPxU;f.

Vi betegner det utsagnet som sier at utsagnsfeltet til Tror med hensyn på x og t er en rasjonelt organisert mengde med finstrukturerte utsagn med η(Tror);(x,t).[18] Merk at utsagnsfeltet assosiert med relasjonen Tror med hensyn på x,t og w er mengden av alle de finstrukturerte utsagn y der man har at <w,t,x,y>êTror. På tilsvarende vis definerer vi: η(Vet);(x,t), η(Ser);(x,t) osv. for de andre epistemiske relasjonene. Man har da at for eksempel η(Vet);(x,t) er påstanden at utsagnsfeltet til Vet med hensyn på x,t er rasjonelt organisert, eller sagt på en annen måte: η(Vet);(x,t) er utsagnet som sier at kunnskapsfeltet til x ved tidspunktet t er rasjonelt organisert.

En person med et rasjonelt organisert trosfelt i betydningen ovenfor er naturligvis en fiksjon i den forstand at ingen alminnelig dødelig person som ved et visst tidspunkt tror at et bestemt utsagn y beskriver noe som forligger også tror absolutt alle de utsagn som logisk sett følger fra dette utsagnet y. På den annen side kunne man si at en slik person representerer et epistemisk ideal. Det å være en person med fullkommen, momentan oversikt over alt som logisk sett følger fra det man tror representerer i en viss forstand det mål enhver forsker og tenker har. Til en viss grad forutsetter vi også i vårt daglige liv at andre tenker rasjonelt og ser de viktigste konsekvensene av de naturlover og empiriske lovmessigheter de kjenner til selvom vår tenkning til tider kan være smertelig mangelfull logisk sett. Fra en epistemologisk synsvinkel er det derfor ikke uberettiget å danne seg et mer utførlig bilde av hva som følger om man antar at utsagnsfeltene assosiert med de epistemiske relasjonene Vet, Tror, Ser, Husk, Innse og Med er rasjonelt organisert.[19]

La oss derfor gi en skisse av de viktigste lovene som involverer η(Tror);(x,t) ie. den påstand at trosfeltet til x er rasjonelt organisert ved tidspunktet t.

Anta α er et utsagn og at ⊨ α, med andre ord at α er et nødvendig sant utsagn. Anta videre at utsagnet η(Tror);(x,t) er sant i verdenen w, ie. w ⊨ η(Tror);(x,t). Fra det siste følger at alle de finstrukturerte utsagnene som er sanne i alle mulige verdener er med i trosfeltet til x ved tidspunktet t i verdenen w. Men fra dette følger i sin tur at det finnes et finstrukturert utsagn i dette trosfelt som er ekvivalent med α. Fra dette følger i sin tur at w ⊨ Tror*;(x,t)(α). Vi har derfor at den følgende påstand holder:

(i) ⊨ α → ⊨ η(Tror);(x,t) => Tror*;(x,t)(α)

Med andre ord: Er α det nødvendig sanne utsagn har man at det er nødvendig at dersom trosfeltet til x ved tidspunktet t er rasjonelt organisert så er α ekvivalent med et finstrukturert utsagn x tror ved tidspunktet t.

En annen lov som følger ved hjelp av vår definisjon av η(Tror);(x,t) er denne: Anta trosfeltet til x ved tidspunktet t er rasjonelt organisert og anta at w ⊨ Tror*;(x,t)(α) og

18 Vi kan gi en helt formell definisjon av η(Tror);(x,t). Er Δ en mengde med finstrukturerte utsagn bruker vi uttrykket "Rasj;f(Δ)" som forkortelse for "Δ er en mengde med finstrukturerte utsagn som er rasjonelt organisert". Gitt denne definisjonen kan vi definere utsagnet η(Tror);(x,t) slik:
η(Tror);(x,t) = μ;-1[Mg(w: wêI & Rasj;f(Mg(y: <w,t,x,y>êTror)))].

19 Dette er hva vi gjør i Del III, §4 og i underparagrafene til §4.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

w ⊨ Tror*;(x,t)(α=>β). Da må utsagnene α og α=>β være ekvivalente med to finstrukturerte utsagn z1 og z2. Siden β er et utsagn må også β være ekvivalent med et eller annet finstrukturert utsagn z3. Siden z1 er ekvivalent med α og z2 er ekvivalent med α=>β følger det at z1 og z2 impliserer z3. Men siden trosfeltet til x ved t er rasjonelt organisert må z3 være med i dette. Men dette innebærer at β er ekvivalent med et finstrukturert utsagn som er med itorsfeltet til x ved t med hensyn på w, med andre ord at w ⊨ Tror*;(x,t)(β). Disse overveielsene viser at

(ii) ⊨ η(Tror);(x,t) =>. Tror*;(x,t)(α) ∩Tror*;(x,t)(α=>β) => Tror*;(x,t)(β)

Det er imidlertid en tredje tese som også må nevnes. Har man at trosfeltet til x er rasjonelt organisert ved tidspunktet t må dette trosfelt være motsigelsesfritt. Det kan derfor ikke finnes noe utsagn α og finstrukturerte utsagn z1 og z2 som beskriver forhold x tror er tilfelle ved tidspunktet t slik at μ(α) =μ;f(z1) & μ(¬α) = μ;f(z2). For i så fall vil ikke trosfeltet til x ved tidspunktet t være konsistent. Man må med andre ha at w ⊨ ¬Tror*;(x,t)(α∩¬α). Sammenfattende har vi derfor:

(iii) ⊨ η(Tror);(x,t) => ¬Tror*(α∩¬α)

Man ser at prinsippene (i) - (iii) rett ovenfor også gjelder om man tar sitt utgangspunkt i de andre epistemiske relasjonene som vi har nevnt. Vi har derfor for eksempel at

(iv) ⊨ η(Husk);(x,t) =>. Husk*;(x,t)(α) ∩Husk*;(x,t)(α=>β) => Husk*;(x,t)(β)

Nå har man åpenbart at η(Tror);(x,t)êU ie. at η(Tror);(x,t) er et utsagn. Videre skulle det være klart at Tror*;(x,t) er en operasjon som avbilder mengden av utsagn U inn i U. Det er derfor nærliggende å generalisere tesene (i) - (iii). Vi gjør dette ved å innføre begrepet *betinget modalstruktur*. Dette defineres slik:

En betinget modalstruktur er et ordnet par <η, T> som oppfyller de følgende krav:

(a) ηêU & T: U → U
(b) ⊨ α → ⊨ η => T(α)
(c) ⊨ η =>. T(α=>β) =>. T(α) => T(β)
(d) ⊨ η => ¬T(α ∩ ¬α)[20]

Fra (i) fremgår det η må være et utsagn og T en funksjon som avbilder mengden av utsagn inn i mengden av utsagn.

Man ser fra (i) - (iii) ovenfor at paret <η(Tror);(x,t), Tror*;(x,t)> oppfyller kravene (a) - (b) i definisjonen ovenfor og derfor er en betinget modalstruktur. Tilsvarende har man at <η(R);(x,t), R*;(x,t)> også er en betinget modalstruktur om R er en av de epistemiske relasjonene Vet, Ser, Husk, Innse eller Mod.

20 Det kan bemrkes at dersom α0 er et kontingent utsagn og I er identitetsfunksjonen over mengden av utsagn så er <α0, I> en betinget modalstruktur. Er F en konsistent K-funksjon, ie en K-funksjon som oppfyller kravet ⊨ F(α) => ¬F(¬α) for alle αêU, og er α0 et fiksert utsagn så er også <α0,F> en betinget modalstruktur. Man ser derfor at begrepet betinget modalfunksjon i en viss forstand er et ganske omfattende begrep.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Når det gjelder betingede modalstrukturer i betydningen ovenfor beviser vi en rekke temmelig elementære satser som vi sammenfatter i tre teoremer som vi kaller Elentærteorem I - III.[21] Disse satsene er helt analoge med dem vi beviste i tilknytning til det vi ovenfor kalte K-funksjoner. Som et eksempel på en slik sats som inngår i et av disse elementær-teoremene nevner vi den følgende sats:

$\models \eta \Rightarrow . T(\alpha \Leftrightarrow \beta) \Rightarrow . T(\alpha U \gamma) \Leftrightarrow T(\beta U \gamma)$[22]

Det følger at dersom man her setter inn "η(Ser);(x,t)" for "η" og uttrykket "Ser*;(x,t)" for alle forekomster av uttrykket "T" får man som resultat en påstand som holder.

Vi nevnte under omtalen av K-funksjoner at sammensetningen av to slike funksjoner selv var en K-funksjon. Noe lignende, nærmest helt analogt, gjelder for betingede modalstrukturer. I forbindelse med slike strukturer kan man vise at *dersom <η1,T;1> og <η2, T;2> er to betingede modalstrukturer har man at også < η2∩T;2(η1), T;2oT;1> er en betinget modalstruktur*.[23]

Anta nå at <η;i, T;i> der i = 1, 2, 3, ... er en uendelig rekke av betingede modalstrukturer. Vi kan da induktivt definere Q;n og φ(n) slik:

(1.1) $Q;1(\alpha) = T;1(\alpha)$
(1.2) $Q;(n+1)(\alpha) = T;(n+1)(Q;n(\alpha))$
(1.3) $\varphi(1) = \eta;1$
(1.4) $\varphi(n+1) = \eta;(n+1) \cap T;(n+1)(\varphi(n))$

Det man nå kan vise er at dersom <η;i, T;i>/i >=1/ er en slik uendelig sekvens av betingede modalstrukturer er også <φ(n), Q;n> en betinget modalstruktur. Dette kan bevises ved hjelp av det teoremet vi nettopp har nevnt. Dette innebærer at alle de elementærteoremene vi har vist at holder for en vilkårlig betinget modalstruktur <η,T> også holder for alle de betingede modalstrukturene <φ(n), Q;n> såsant <η;i,T;i>/i >=1/ er en sekvens av betingede modalstrukturer og φ(n) og Q;n er definert som ovenfor. I likhet med de tre elementærteoremene for vilkårlige betingede modalstrukturer kan vi derfor formulere tre tilsvarende teoremer som gjelder for <φ(n), Q;n> under de forutsetningene vi har nevnt ovenfor. Vi kaller disse tre teoremene for Iterasjonsteorem I - III.[24]

Nå er de teoremene vi har omtalt generelle satser, men de kan umiddelbart anvendes på de epeistemiske oeratorene vi har nevnt som Tror*;(x,t), Vet*;(x,t), Ser*;(x,t), Husk*;(x,t), Innse*;(x,t) og Med*;(x,z,t) siden vi har f.eks. at <η(Tror);(x,t), Tror*;(x,t)> er en betinget modalstruktur og det samme gjelder for de andre operasjonene. Vi har derfor for eksempel i kraft av disse teoremene at utsagnet Vet*;(x,t)(Tror*;(y,t')(α) impliserer utsagnet Vet*;(x,t)(Tror*;(y,t')(¬¬α) om vi forutsetter at kunnskapsfeltet til x ved t er rasjonelt organisert og at x vet ved tidspunktet t at trosfeltet til y ved tidspunktet t' er rasjonelt organisert. Formelt kan denne påstanden formuleres slik:

$\models \eta(Vet);(x,t) \cap Vet*;(x,t)(\eta(Tror);(y,t')) \Rightarrow .$

21 Se Teorem 4.3.1 - Teorem 4.3.3 i §4.3 i Del III som man kan sammenligne med Teorem 2.2.2 - Teorem 2.2.4 i §2.2 i Del III.

22 Se Teorem 4.3.2 punkt (iv) i §4.3 i Del III.

23 Merk at $T;2oT;1 = \lambda/\alpha\hat{e}U/(T;2(T;1(\alpha)))$

24 Se Del III, §4.4, Teorem 4.4.4 - Teorem 4.4.6 for å få et innblikk i hvordan disse teoremene ser ut.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Vet*;(x,t)(Tror*;(y,t')(α) => Vet*;(x,t)(Tror*;(y,t')(¬¬α)

Alle de teoremene vi har nevnt gjelder derfor for de spesielle epistemiske operasjonene vi har listet opp og viser hva slags logiske lover som gjelder for dem.

De satsene som vi har nevnt ovenfor har sine motstykker som vi kan formulere innenfor en begrepsramme. La oss forklare hva vi har i tankene ved å se på et eksempel, nemlig operasjonen Tror*;(x,t). Dette er en funksjon som avbilder U inn i U. Vi kan imidlertid definere en intensjonal relasjon av type <2,1> som svarer til denne operasjonen Tror*;(x,t). Vi betegner denne intensjonale relasjonen med |Tror*|. Den er entydig bestemt ved at ekstensjonsfunksjonen til denne relasjonen til enhver verden w tilordner denne verden w mengden av par <<x,t>,y> der vi har at yêU;f og der det finnes et finstrukturert z som er ekvivalent med y og hvor vi har Tror;(w,t)(x,z). Navnet på denne intensjonale relasjonen av type <2,1> som vi betegner med Tror*_ er <4,2,1,|Tror*|>.[25] Tenker vi oss nå at B = <<D,X,In>,ξ> er en standard utvidet begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn der |Tror*| er med i In vil Tror*_;(x,t)(α) være en formel over B om αêFm(B) og x,t er variabeltegn assosiert med B.

I forbindelse med utsagnet η(Tror);(x,t) kan man definere et tilsvarende binært attributt som vi betegner med "|η(Tror)|". Ekstensjonsfunksjonen til denne egenskapen tilordner hver mulig verden w mengden av alle de person-tidspunkt par <x,t> der man har at utsagnsfeltet til Tror-relasjonen med hensyn på x,t og w er rasjonelt organisert (i den betydningen vi har forklart tidligere).[26] Dette er åpenbart en binær egenskap. Navnet på denne egenskap betegner vi med "η(Tror)_". Med andre ord har vi η(Tror)_ =<3,2,0,|η(Tror)|>. Er følgelig B=<D,X,In> en begrepsramme der |η(Tror)| er med i X har vi at η(Tror)_;(x,t) er en formel over B om x og t er variabeltegn assosiert med B.

Fra de definisjonene vi har gitt ovenfor er det svært nærliggende å sammenligne paret <η(Tror)_, Tror*_> med den betingede modalstrukturen <η(Tror);(x,t), Tror*;(x,t)>. Man ser at det er en viss formel analogi. Det vil også fremgå i det følgende at de logiske lovene som gjelder for uttrykkene i det første paret er helt analoge med de logiske lover som gjelder for betingede modalstrukturer.

Tidligere har vi også ne vnt operasjonen Tror°;(x,t) som avbilder mengden av utsagn inn i seg selv. Svarende til denne har vi en intensjonal relsjon av typen <2,1> som vi betegner med |Tror°|. Ekstensjonen til denne intensjonale relasjonen i verdenen w er mengden av alle de par <<x,t>,y> der y er er et finstrukturert utsagn som er en logisk konsekvens av alle de finstrukturerte utsagn som beskriver forhold x tror ved tidspunktet t i verdenen w.[27]

Vi setter Tror°_ = <4,2,1,|Tror°|>. "Tror°_" er derfor navnet assosiert med |Tror°|.

25 Relasjonen |Tror*| kan defineres eksplisitt slik:
|Tror*| = Ekst;-1[λ/wêI/(Mg(<<x,t>,y>>: yêU;f & (Ez)(zêU;f & μ;f(y) = μ;f(z) & Tror;(w,t)(x,z))))]
Se §5, Del III, Definisjon 5.2 og kommentarene til denne definisjonen.

26 Den formelle definisjonen av |η(Tror)| er denne:
|η(Tror)| = Ekst;-1[λ/wêI/(Mg(<x,t>: xêP &têT & Rasj;f(Mg(y: <w,t,x,y>êTror))))]
Merk at Rasj;f(Δ) innebærer at Δ er en mengde med finstrukturerte utsagn som er rasjonelt organisert.

27 Den formelle definisjonen er:
|Tror°| = Ekst;-1[λ/wêI/(Mg(<<x,t>,y>: yêU;f & I∩SN(Mg(μ;f(z): <w,t,x,z>êTror)) Inkl μ;f(y))]
Jmf. Del III, §5, Definisjon 5.3.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

La oss nå tenke oss en standard utvidet begrepsramme B= <<D,X,In>,ξ> som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn som oppfyller de følgende to krav: For det første skal |Tror*| og |Tror°| være med i In. For det andre krever vi at |η(Tror)| ê X.

Antar man at B er en slik begrepsramme er det ganske lett å vise at dersom B ⊨ α har man også at B ⊨ Tror°_;(x,t)(α) forutsatt selvfølgelig at α er en formel assosiert med B og x,t er variabeltegn assoiert med B. Videre er det ikke vanskelig å vise at man under disse forutsetningene også har B ⊨ Tror°_;(x,t)(α) & Tror°_;(x,t)(α→β) → Tror°_;(x,t)(β)

Man ser fra dette at om vi antar B er en begrepsramme som oppfyller de kravene vi nevnte så har man at operatoren Tror°_ adlyder alle de lovene som gjelder for modaloperatoren i det velkjente modalsystemet K. Dette innebærer at at dersom man gjør de forutsetningene vi har nevnt kan utlede teoremer for Tror°_ som svarer fullstendig til de elemntærteoremene og iterasjonsteoremene vi viste at holdt for det vi kalte K-funksjoner.

La oss igjen forutsette at begrepsrammen B oppfyller kravene vi nevnte ovenfor. Da er |Tror*| med i In og vi har at |η(Tror)|êX. Det er da ingen vanskeligheter forbundet med å vise at dersom α er en formel og x,t er variabeltegn assosiert med B og vi har α er gyldig i B, dvs. B ⊨ α så har man også B ⊨ η(Tror)_;(x,t) → Tror*_;(x,t)(α). Videre er det heller ikke vanskelig å vise at følgende holder:

B ⊨ η(Tror)_;(x,t) →. Tror*_;(x,t)(α→β) → (Tror*_;(x,t)(α) → Tror*_;(x,t)(β))

Man ser i lys av disse to lovene at man kan utlede teoremer som svarer, punkt for punkt, til de tre elementærteoremene og de tre iterasjonsteoremene vi nevnte i forbindelse med betingede modalstrukturer.

Vi har ovenfor tatt vårt utgangspunkt i den epistemiske relasjonen Tror og vist hvordan vi hjelp av denne kan definere det binære attributtet |η(Tror)| og de to intensjonale relasjonene |Tror°| og |Tror*|. Det skulle imidlertid ikke være så vanskelig å se at vi istedet for relasjonen Tror kunne ha tatt vårt utgangspunkt i en hvilken som helst av de andre epistemiske relasjonene vi har nevnt: Vet, Ser, Husk, Innse og Med. Vi kan for eksempel om vi tar vårt utgangspunkt i relasjonen Husk definere de intensjonale relasjonene |Husk°| og |Husk*|, det binære attributtet |η(Husk)| samt de tre navnene Husk°_, Husk*_ og η(Husk)_. Helt tilsvarende overlegninger kan gjøres i forbindelse med Vet, Ser, Innse og Med.

Tenker man seg nå at begrepsrammen B=<<D,X,In>,ξ> som vi nevnte ovenfor ikke bare oppfyller det krav at |Tror*| og |Tror°| ê In og |η(Tror)| ê X, men også at |R*|, |R°| ê In og |η(R)| êX for alle R som er med i mengden {Vet, Ser, Husk,Innse, Med} kan man vise en rekke satser om implikasjonsforholdene mellom de diverse operatorene Ser*_, Vet*_, Husk°_ osv. Man kan for eksempel vise at B ⊨ Ser*_;(x,t)(α) → Ser°_;(x,t)(α), videre at B ⊨ Ser*_;(x,t)(α) → Vet*_;(x,t)(α). En rekke slike satser er nevnt mot slutten av §5 i Del III.

Vi har nå gitt et forholdsvis utførlig resymé av hovedinnholdet i Del III. Som tidligere nevnt er hensikten og formålet med denne delen og gi leseren et tydelig og utførlig bilde av hva som faktisk kan utledes av satser i den kunnskapsteorien som vi omhyggelig definerte i Del II.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Vi skal nå forsøke å gi en kortfattet redegjørelse for innholdet og poenget med Del IV i denne avhandlingen. Del IV er inndelt i to underavdelinger, Del IV A og Del IV B.

I Del IV A fremstiller vi grunnsetningene i en teori om akseptanse og sannsynlighet. Først fremstiller vi de grunnleggende grunnsetningene i denne teorien, dernest gir vi utstrakte kommentarer til teorien av en mer filosofisk karakter.

Del IV B er mer teknisk preget. Vi definerer her to typer av mengdeteoretiske strukturer. Den første klassen av strukturer kaller vi for *relative sannsynlighetsstrukterer*. Den andre klassen med strukturer kalles for *preordningsstrukturer med assosierte sannsynlighets-rom*. Gitt en relativ sannsylighetsstruktur S kan man definere en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom som man kan betegne med $\varphi(S)$. $\varphi(S)$ kaller vi den *kanoniske preordningsstrukturen med assosierte sannsynlighetsrom* bestemt av S. Tilsvarende kan man, om S' er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom, definere en relativ sannsynlighetsstruktur $\psi(S')$ som vi kaller den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av S'. I Del IV B viser vi at funksjonene φ,ψ faktisk er funksjoner og at $\psi(S')$ faktisk er en relativ sannsynlighetsstruktur om S' er en preordningsstruktur. Vi viser det tilsvarende for funksjonen φ. Bevisene for dette er foholdsvis lange og gis i detalj i denne delen av arbeidet. Vi viser også at dersom S er en relativ sannsynlighetsstruktur så er $\psi(\varphi(S)) = S$ og likeledes at dersom S' er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom så har man at $\varphi(\psi(S')) = S'$. Det mest interessante ved dette er at det gir oss en mulighet for å formulere alternative aksiomatiseringer av de hovedteoriene vi presenterer i Del IV A.

La oss nå gå over til å se litt nærmere på hovedtankene i Del IV A. I denne delen utvider vi språket til den kunnskapsteorien vi stillte opp i Del II med hovedsakelig tre nye predikater. For det første dreier det seg om predikatet " w er en mulig verden som har minst like stor grad av enkelhet, indre koherens og harmoni som verdenen w' ". Vi forkorter dette predikatet med "Enk(w,w')". For det andre innfører vi konstruksjonen "z representerer den sannsynlighet som kan tilskrives utsagnet x gitt at utsagnet y representerer all den evidens som kan tas for gitt". Dette tre-plass predikatet forkorter vi med "Cd(z,x,y)".

La oss nå først nevne de grunnleggende lovene for predikatet "Enk(w,w')". Mengden av de par <w,w'> som oppfyller dette predikatet kaller vi for *enkelhetsrelasjonen*. Vi betegner denne med R. Det skulle være klart at R er en refleksiv og transitiv relasjon over mengden av mulige verdener. De følgende tre aksiomer er derfor inkludert i vår utvidelse av den kunnskapsteorien vi har beskrevet:

(1) $\text{Enk}(w,w') \rightarrow w,w' \hat{e} I$
(2) $w \hat{e} I \rightarrow \text{Enk}(w,w)$
(3) $\text{Enk}(w,w') \,\&\, \text{Enk}(w',w'') \rightarrow \text{Enk}(w,w'')$

Vi finner det nå nødvendig å gjøre rede for tre begreper før vi forklarer en viktig hovedtese i den første halvdelen av Del IV A. Vi sier at en verden w er *strengt enklere* enn en verden w' hvis og bare hvis $wRw' \,\&\, \neg(w'Rw)$. To verdener w,w' er *like enkle* hvis og bare hvis $wRw' \,\&\, w'Rw$. Vi betegner disse to relasjonene med med henholdsvis "R*" og "Ekv;R".

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Er α en mengde med mulige verdener kan man snakke om de enkleste verdenene i α, eller, om man vil, de R-maksimale elementene i α. Vi betegner denne mengden med Max(R,α) og definerer mengden slik:

$$Max(R,\alpha) = Mg(w: w\hat{e}\alpha \ \& \ (Aw')(w'\hat{e}\alpha \rightarrow wRw'))$$

Vi innfører nå nok et predikat i vår kunnskapsteori, nemlig predikatet "x er et utsagn som det er fornuftig å akseptere gitt at utsagnet y representerer all den evidens som foreligger". Vi skal bruke uttrykket "Ba(x,y)" som forkortelse for dette predikatet.

Man kan knapt benekte at dette predikatet gir mening helt uavhengig av enkelhetspredikatet som vi nevnte ovenfor. For eksempel virker det rimelig å tenke seg at dersom det er fornuftig å akseptere et utsagn x relativt til utsagnet y så er det også fornuftig å akseptere et hvert utsagn som er en logisk konsekvens av x relativt til y. Videre virker det ytterst rimelig å hevde at dersom det er fornuftig å akseptere et utsagn relativt til y er det også fornuftig å akseptere utsagnet y relativt til y. Endelig virker det rimelig å hevde at dersom det er fornuftig å akseptere to utsagn x1 og x2 relativt til y er det også fornuftig å akseptere konjunksjonen av dem relativt til y, og at dersom det er fornuftig å akseptere et eller annet utsagn relativt til y så vil mengden av alle de utsagn som det er fornuftig å akseptere relativt til y utgjøre en konsistent mengde med utsagn. Kaller vi Ba for akseptanserelasjonen synes det følgelig som om man har noen ganske rimelige og klare intuisjoner om hvilke egenskaper denne relasjonen har.

Etter at vi nå har omtalt enkelhetsrelasjonen og akseptanserelasjonen kommer vi til en grunnleggende tese i Del IV A. Den sier at det er fornuftig å akseptere et utsagn x relativt til utsagnet y hvis og bare hvis de enkleste verdenene i sannhetsmengden til y er inkludert i sannhetsmengden til x *og* det faktisk finnes noen enkleste verdener i sannhetsmengdentil y. Denne tesen kan formaliseres slik:

$$(+) \qquad Ba(x,y) \leftrightarrow \text{ø} \neq Max(R, \mu(y)) \text{ Inkl } \mu(x)$$

Det bør nevnes at alle de lovene for akseptanserelasjonen som vi nevnte ovenfor meget lett kan utledes om vi antar at (+) holder og postulerer at enkelhetsrelasjonen er en preordning over mengden av alle mulige verdener.

La oss nå gå over til å se nærmere på sannsynlighetspredikatet "Cd(z,x,y)". Vi nevnte de offisielle lesemåten av dette uttrykket ovenfor. Her skal vi tillate og lese det "z er sannsynligheten til utsagnet x relativt til utsagnet y". Vi setter per definisjon:

$$C = Mg(\langle\langle x,y\rangle,z\rangle: Cd(z,x,y))$$

En første grunnleggende setning for sannsynlighetspredikatet er at dersom man har at Cd(z,x,y) så er z et reellt tall i intervallet [0,1] og x,y utsagn. Den andre grunnleggende setningen sier at dersom z er sannsynligheten for x relativt til y så finnes det ett og bare ett reelt tall z som reperesenterer sannsynligheten til x relativt til y. Hvis man anser sannsynlighetspredikatet "Cd(z,x,y)" som meningsfullt skulle disse to grunnsetningene være komplett innlysende. Ved hjelp av disse to grunnsetningene følger det at C, som vi definerte ovenfor, er en funksjon. Vi betegner domenet til denne funksjonen med Dom(C). Dette er

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Mg(<x,y>: (Ez)Cd(z,x,y)). Når det gjelder C skal vi kalle dette for den relative sannsynlighetsfunksjonen.

Vi trenger en definisjon før vi går videre. Er y et utsagn er det intet i noe av det som vi så langt har nevnt som tilsier at det finnes noe reellt tall z og noe utsagn x der vi har at Cd(z,x,y), med andre ord at C(x,y)=z. Er y et utsagn der vi har Cd(z,x,y) for noe z og x kaller vi y for en *sannsynlighetsbasis*.

Er nå y et utsagn som utgjør en sannsynlighetsbasis virker det ytterst rimelig å kreve at Mg(x: <x,y>êDom(C)) er lukket under konjunksjon og negasjon og at utsagnet y selv er med i denne mengden. Det virker også rimelig å nedfelle som en grunnsetning at dersom y representerer en sannsynlighetsbasis så har man at C(μ;-1(I),y) =1, med andre ord at det tautologisk utsagn - det utsagn som er sant i alle mulige verdener -har en sannsynlighet lik 1 relativt til y. En annen grunnsetning som virker ytterst rimelig er denne: Er x1,x2 to uforenelige utsagn som begge kan tilskrives en sannsynlighet relativt til utsagnet y, ie utsagn der vi har <x1,y>, <x2,y>êDom(C) så har man at C(x1Ux2,y) =C(x1,y)+C(x2,y), med andre ord at sannsynligheten til disjunksjonen av de to utsagnene relativt til y er summen av sannsynligheten til hver av disjunktene relativt til y. Endelig virker det også rimelig å ta med som en grunnsetning at dersom et utsagn x kan tilskriver en viss sannsynlighet relativt til y så har man at C(x∩y,y) =C(x,y). De grunnsetningene vi her har nevnt er de mest grunnleggende for den relative sannsynlighetsfunksjonen C. Man kan også legge merke til at disse grunnsetningene bare inneholder predikatet "Cd(z,x,y)", pluss mengdeteoretiske og utsagnsteoretiske predikater, og at man ikke på noe punkt behøver å trekke inn enkelhetsrelasjonen for å formulere dem.

Det er imidlertid fem aksiomer i den teorien om akseptanse og sannsynlighet som vi fremstiller i Del IV A som forbinder akseptanserelasjonen med den relative sannsynlighetsfunksjonen C. Vi skal i denne innledningen bare nevne to av dem. Først vil vi imidlertid definere et begrep som er hensiktsmessig ved formuleringen av disse grunnsetningene. Vi sier at et utsagn y *representerer en akseptansebasis* hvis og bare hvis det finnes et utsagn x der vi har at Ba(x,y), med andre ord hvis og bare hvis (Ex)(Ba(x,y)).

Gitt denne definisjonen kan det første aksiomet som forbinder den relative sannsynlighetsfunksjonen formuleres slik: Ethvert utsagn y som representerer en sannhetsbasis representerer også en akseptansebasis. Denne grunnsetningen kan også formaliseres slik: (Ex)(<x,y>êDom(C)) → (Ex)(Ba(x,y)). Denne setningen er ikke direkte evident men vi gir en mer utførlig begrunnelse for den under fremstillingen av vår teori.

Det andre aksiomet som vi innlemmer i vår teori kan virke uvanlig og overraskende. Det sier at dersom et utsagn y representerer en sannsynlighetsbasis og utsagnet x er et som det er fornuftig å akseptere relativt til y så er sannsynligheten til x relativt til y lik 1. Siden vi senere argumenterer for at f.eks. den påstand at Newtons lover holder tlnærmet under visse forutsetninger er en påstand som det er fornuftig å akseptere relativt til all den evidens vi har ved det nåværende tidspunkt følger det at sannsynligheten for at denne teori holder tilnærmet er lik 1 relativt til all den evidens vi har nå, så sant all den evidens vi har ved det nuværende tidspunkt representerer en akseptansebasis. Strengt tatt burde det ikke være noe spesielt overraskende ved dette hvis man baserer seg på oppfatninger om vitenskapelige teoriers sikkerhet som er utbredt blandt mer brede lag som er utstyrt med en mer robust sans for common sense enn den man finner hos Popper.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

I tillegg til disse to grunnsetningene som forbinder akseptanserelasjonen og den relative sannsynlighetsfunksjonen C betrakter vi tre andre grunnsetninger som vi betegner med F3 - F5. De to vi allerede har nevnt betegnes med F1 og F2. Vi skal ikke gi noen nærmere drøftelse av grunnsetningene F3 - F5 her siden vi gjør dette temmelig detaljert i §3 og §5.6 i Del IV A. Det skulle derfor være nok å henvise leseren til disse paragrafene.

Det er imidlertid tre andre grunnsetninger som vi også betrakter i forbindelse med den relative sannsynlighetsfunksjonen C. Vi kaller disse for de multiplikative aksiomene og betegner dem med M1 - M3. Det viktigste av dem sier at dersom $\langle x,y\rangle$ og $\langle z,y\rangle$ er med i domenet til C og $C(x,y) > 0$ så har man at $C(x \cap z,y) = C(z,x \cap y)*C(x,y)$. Igjen skal vi ikke utførlig drøfte disse grunnsetningene her, men bemerker bare at de er helt konsistente med de øvrige aksiomene i vår teori og at de åpenbart virker plausible.

Vi har nå nevnt og delvis omtalt alle grunnsetningene som inngår i den teorien om akseptanse og sannsynlighet som vi detaljert undersøker i Del IV A. Grunnsetningene består av aksiomene for enkelhetsrelasjonen, definisjonen av akseptanserelasjonen, de grunnleggende setningene om funksjonen C som vi betegner med D1 - D8, de grunnsetningene som forbinder akseptanserelasjonen og den relative sannsynlighets-funksjonen C, dvs. aksiomene F1 - F5 , samt de multiplikative aksiomene M1 - M3.

Teorien som består av alle disse aksiomene unntatt M1- M3 kaller vi for den svake teorien om akseptanse og sannsynlighet. Utvider vi denne svake teorien med de multiplikative aksiomene får vi den *fulle*, eller *sterke*, teorien om akseptanse og sannsynlighet.

Vi har nå gjort rede for hovedtrekke i selve den formelle teorien som presenteres i Del IV A. Men i denne delen går vi også videre og gir i §5.4 en lang rekke eksempler på setninger av typen Ba(x,y) der y er totaliteten av alt det vi vet ved det nuværende tidspunkt, mao. all den evidens vi har nå. Dette utsagnet betegner vi med e(t0), (t0 betegner da det nuværende tidspunkt). Vi betrakter altså eksempler på utsagn som det er fornuftig å akseptere gitt at e(t0) representerer alt den evidens som kan tas for gitt.

Vi skal selvfølgelig ikke gjenta alle disse eksemplene her, men nevner på nytt det eksempel som vi såvidt var innom tidligere. La for eksempel N være den påstand at Newtons lover holder med temmelig stor nøyaktighet om de materielle legemene som den anvendes på ikke er for små og beveger seg med en hastighet som ligger langt under lyshastigheten. Det virker da fornuftig å akseptere denne påstanden relativt til *all den evidens vi har nå*. Det er imidlertid to ting som bør bemerkes i forbindelse med denne påstanden Ba(N, e(t0)). For det første impliserer ikke denne påstanden at det er fornuftig å akseptere N relativt til den evidens vi har om hundre år. Dette skulle være opplagt. For det andre Ba(N,e(t0)) ikke en påstand som kan bekreftes eller avkreftes ved empiriske undersøkelser, eksperimenter, innsamling av statistiske data eller innsamling av andre data. Påstanden er åpenbart sann og man innser dens sannhet ved omhyggelig refleksjon over meningen til konstruksjonen "Ba(x,y)" samt hva e(t0) og N innebærer. Det er også etter vår mening åpenbart at dette er en påstand som er nødvendig sann. En person som benekter denne påstand viser bare at han ikke forstår betydningen til uttrykket "fornuftig å akseptere" og motsier dypest sett seg selv. Siden påstanden er en nødvendig sannhet og det ikke kan dreie seg om en analytisk setning er det nærliggende å karakterisere setningen som en *syntetisk apriori* sann setning. Forøvrig kan nøyaktig det samme sies om alle de andre eksemplene som gis i §5.4 i Del IV A.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

La oss nevne et siste tema som tas opp i Del IV. Med en slutning forstår vi et ordnet par <Δ,x> der Δ er en ikke-tom mengde med utsagn, x er et utsagn og hvor vi krever at Δ er en konsistent mengde med utsagn. Er <Δ,x> en slutning i denne forstand kalle vi utsagnene i Δ for premissene i slutningen og x for konklusjonen. En slutning er konsistent om det finnes en mulig verden der alle utsagnene i Δ U {x} er sanne, i motsatt fall er den inkonsistent. Blandt de konsistente slutningene har vi de deduktive slutningene der utsagnet x er implisert av utsagnene i Δ. De konsistente slutningene som ikke er deduktive kaller vi for de induktive slutninger. Disse kan i sin tur inndeles i to underklasser: De som er *akseptable,* det vil si de induktive slutningene <Δ,x> der det er fornuftig å akseptere utsagnet x gitt at snittet av utsagnene i Δ representerer alt den evidens som kan tas for gitt. De uakseptable induktive slutningene er så de induktive slutningene som ikke er akseptable. Siden de akseptable induktive slutningene er definert ved hjelp av akseptanserelasjonen følger det at vi på basis av de grunnsetningene vi har formulert om enkelhetsrelasjonen og definisjonen av akseptanserelasjonen kan utlede en lang rekke satser om akseptable induktive slutninger. Dette avslutter vårt innledene resymé av hovedinnholdet i Del IV

I den siste delen av vårt arbeid, Del V, er det særlig tre begreper som er spiller en svært viktig rolle. Det første begrepet er det vi vil omtale som *den totale strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for personen x i tidsintervallet X i verdenen w*. De to andre begrepene er definitiv evidens og evidens, dvs. de begrepene som uttrykkes av de følgende to predikater: "y er et utsagn som x ved tidspunktet t har definitiv evidens for at er sant i verdenen w" og predikatet "y er et utsagn som x ved tidspunktet t har evidens for at er sant i verdenen w". La oss bemerke at de to siste begrepene defineres ved hjelp av det første, akseptanserelasjonen og begrepet om insidens mellom to verdener ved et gitt tidspunkt. Vi bruker en god del sider for å vise i detalj hvordan dette gjøres og hvordan vi begrunner disse definisjonene.

Det er to bemerkninger som det er naturlig å komme med i denne sammenheng. Den første er at dersom y er et finstrukturert utsagn som beskriver noe x ved ved tidspunktet t så må det utsagnet z som har samme sannhetsmengde som y være et utsagn som x har definitiv evidens for ved tidspunktet t. Viten impliserer definitiv evidens. Videre skulle det være åpenbart at dersom y er utsagn som x har definitiv evidens for ved tidspunktet t så har x også evidens for dette utsagnet ved tidspunktet t. Defintiv evidens impliserer evidens.

Vår andre bemerkning har å gjøre med det vi kalte den totale strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for individet x over tidsintervallet X i verdenen w. Det må i denne forbindelse noteres at vi bruker uttrykket "bevissthetsinntrykk" i en forholdsvis vid betydning. For det første inkluderer det alle former for *sanseinntrykk* som fremtrer for bevisstheten til x, dvs. hørsels- og synsinntrykk og alle mulige inntrykk av lukt, smak og berøring. Videre inkluderes alle mulige mer eller mindre komplekse inntrykk av smerte med varierende intensitet og varighet. Endelig regner vi forestillingsbilder, erindringbilder, etterbilder som fremtrer for en person som bevissthetsinntrykk, men også den slags inntrykk som en person opplever når vedkommende taler innvendig for seg selv, men også for den slags skyld de inntrykk en person opplever når vedkommende taler høyt hva enten det er for seg selv eller for en annen.

En viktig del av vårt arbeid i Del V består i å gi en analyse av begrepet 'den totale strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for individet x over tidsintervallet X i verdenen w'. For dette formål innfører vi predikatet "y er et momentant bevissthetsinntrykk som fremtrer for x ved

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

tidspunktet t i verdenen w". Vi innfører dette som et nytt primitivt predikat i vår teori og forkorter det med "Frem;(w,t)(y,x)". I tillegg til dette predikatet innfører vi også predikatet " Verdenen w er insident med verdenen w' ved tidspunktet t". Dette forkorter vi med "Ins;t(w,w')". At to verdener er insidente ved tidspunktet t innebærer at de faller fulstendig sammen ved tidspunktet t. Det skulle være klart at denne insidensrelasjonen er en ekvivalensrelasjon. En ting er insidens ved et tidspunkt en annen sak er insidens over en mengde av tidspunkter X. Vi sier at to verdener er insidente over tidspunktmengden X hvis og bare hvis de er insidente ved ethvert tidspunkt i mengden X. Man ser at også dette vil være en ekvivalensrelasjon.

La oss nå betrakte den totale strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for x over intervallet X i verdenen w. Vi betegner denne totalstrømmen akkurat her med "TS;X(x,w)".

La nå t være et tidspunkt i tidspunktmengden X og betrakt mengden av alle de momentane bevissthetssinntrykk som fremtrer for x ved tidspunktet t i verdenen w, med andre Mg(z: Frem;(w,t)(z,x)). Det virker rimelig å betrakte denne mengden som den *tilstand* som TS;X(x,w) befinner seg i ved tidspunkt t. Betrakter vi så de diverse Mg(z: Frem;(w,t)(z,x)) ettersom t gjennomløper hele intervallet X, ie

λ/têX/(Mg(z: Frem;(w,t)(z,x)))

er det nærliggende å identifisere TS;X(x,w) med denne funksjonen. Vi kan derfor sette per definisjon:

TS;X(x,w) = λ/têX/(Mg(z: Frem;(w,t)(z,x)))

La oss nå se på mengden av alle de par <w,w'> der vi har at TS;X(x,w) = TS;X(x,w'). Man ser lett at dette er en ekvivalensrelasjon. Betrakter man videre mengden av alle de verdenene w' der vi har at TS;X(x,w') = TS;X(x,w) er dette selvfølgelig en mengde med mulige verdener og som sådan sannhetsmengden til et utsagn. Vi skal kalle dette utsagnet for *utsagnet som beskriver den totale strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for x over tidspunktmengden X i verdenen w*. Dette utsagnet betegner vi med "M;X(x,w)". I lys av det vi har sagt kan det defineres slik:

M;X(x,w) = μ;-1(Mg(w': TS;X(x,w') = TS;X(x,w)))

Vi skal også tillate oss å lese uttrykket "M;X(x,w)" som *utsagnet som beskriver den totale indre erfaring til personen x over tidspunktmengden X i verdenen w*. De to kursiverte uttrykkene i dette avsnittet brukes altså synonymt. Av og til foretrekker vi det siste uttrykket fordi det er litt kortere enn det første.

I betraktningene ovenfor har vi ikke forutsatt mer om X enn at dette er en mengde med tidspunkter. Men det virker rimelig å tro om x er en person at den strøm av bevissthetsinntrykk som vedkommende opplever starter ved et visst tidspunkt t;f, tidspunktet hvor denne personen kom til verden, og avsluttes ved tidspunktet for vedkommendes død, t;d. I intervallet <t;f, t;d> vil i så fall bevissthetsinntrykk fremtre for x. og ikke ved noe tidspunkt før t;f eller etter t;d vil det fremtre noen bevissthetsinntrykk for x.

La oss nå anta at x er en person og t er et tidspunkt. Vi kan da betrakte utsagnet

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

M;<-inf,t](x,w). Dette er det utsagnet som beskriver den strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for x fra "tidenes morgen" og frem til tidspunktet t. Det bør i denne forbindelse bemerkes at utsagnet M;<-inf,t](x,w) selvfølgelig er forenelig med den antagelse at det finnes et visst tidspunkt t1 som kommer før t og ved alle de tidspunkter som kommer før t1 har det overhodet ikke fremtrådt noen bevissthetsinntrykk for x i det hele tatt. Man kan lese uttrykket "M;<-inf,t](x,w)" slik: "Den totale strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for x intil og inkludert tidspunktet t i verdenen w". Denne totale strøm av bevissthetsinntrykk representerer *det som empirisk sett er det ultimate grunnlag* for en persons trosoppfatninger og viten.

Vi har nå gjort rede for visse trekk ved det første begrepet som spiller en viktig rolle i Del V. Men vi nevnte to andre begreper som også tas opp i denne delen, nemlig *evidens* og det som vi kaller *definitiv evidens*. I det følgende vil vi gi en skisse av hovedtrekkene i den teori om evidens og definitiv evidens som vi fremlegger i Del V.

Vi nevnte tidligere predikatet " y er et utsagn som x ved tidspunktet t har evidens for at er sant i verdenen w". Et alternativ til dette predikatet er uttrykket "x har ved tidspunktet t i verdenen w evidens for at utsagnet y er sant". Disse to uttrykkene brukes synonymt i det følgende. Vi forkorter det sistnevnte uttrykket med "Ev;(w,t)(x,y)". Dette er strengt tatt ikke noe primitivt predikat i den teorien som fremlegges i Del V. Men defineres ved hjelp av predikatet "Frem;(w,t)(z,x)" og akseptanserelasjonen Ba. Det virker rimelig å hevde at x ved tidspunktet t i verdenen w har evidens for at utsagnet y er sant hvis og bare hvis det er fornuftig akseptere utsagnet y relativt til det utsagnet som beskriver den totale strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for x over intervallet <-inf,t] i verdenen w. Denne definisjonen kan formaliseres slik:

Ev;(w,t)(x,y) ↔ Ba(y, M;<-inf,t](x,w))

Vi har nå sett på og omtalt to av de tre viktigste begrepene i Del V, nemlig strømmen av bevissthetsinntrykk og hva som menes med at y er et utsagn som x har evidens for ved tidspunktet t i verdenen w.

Imidlertid nevnte vi tidligere en strengere betingelse for viten, nemlig *definitiv evidens*. For at man skal ha evidens for et utsagn er det, som det fremgår fra den definisjonen vi har gitt, nødvendig og tilstrekkelig at det er fornuftig å akseptere utsagnet relativt til den strøm av bevissthetsinntrykk man har hatt inntil nå. Men dette impliserer ikke at det er fornuftig å akseptere utsagnet relativt til den strømmen av bevissthetsinntrykk man eventuelt vil ha om en uke, en måned eller et år. Skal man imidlertid ha *definitiv evidens* for et utsagn ved et gitt tidspunkt t må det også være fornuftig å akseptere utsagnet uansett hvordan ens strøm av bevissthetsinntrykk vil være *etter* dette tidspunktet t. Fremtidige sanseinntrykk sammen med dem man har hatt inntil nå kan ikke på noen måte endre det forhold at det er fornuftig å akseptere utsagnet.

La oss se på hvordan denne tanken kan formaliseres.

Anta w er en mulig verden, x en person og t et tidspunkt. Anta videre at

(1) Ba(y, M;<-inf, t](x,w)

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Anta nå at (i) w' er en vilkårlig mulig verden som er insident med w i intervallet <-inf,t] og at (ii) t' er et vilkårlig tidspunkt som kommer etter t. Da vil M;<t,t'](x,w') være det utsagnet som beskriver den totale strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for x over intervallet <t,t'] i verdenen w'. Hvis x da skal ha definitiv evidens for utsagnet y ved tidspunktet t i verdenen w må vi ikke bare kreve at (1) holder, men også at det er fornuftig å akseptere y relativt til konjunksjonen av utsagnene M;<-inf,t](x,w) og M;<t,t'](x,w') og at dette må gjelde for alle w' og t' som oppfyller kravene (i) og (ii). Vi kan derfor formulere det siste kravet slik:

(2) $(Aw')(At')(Ins;<\text{-}inf, t](w',w) \ \&\ t' > t \rightarrow Ba(y, M;<\text{-}inf,t](x,w) \cap M;<t,t'](x,w')))$

Bruker vi uttrykket "DEv;(w,t)" som forkortelse for "x har ved tidspunktet t i verdenen w definitiv evidens for utsagnet y" har vi at DEv;(w,t)(x,y) holder hvis og bare hvis (1) og (2) rett ovenfor holder. Dette er den definisjonen vi gir av definitiv evidens i Del V.

Det bør noteres at hvis man betrakter det språket som vi presist avgrenset i Del II har vi Del IV og Del V utvidet dette språket med kun de følgende nye primitive predikater: For det første: "w er en verden med minst like stor grad av enkelhet, indre koherens og harmoni som verdenen w' ". For det andre: "z er et momentant bevissthetsinntrykk som fremtrer for x ved tidspunktet t i verdenen w". For det tredje: "w er en verden som er insident med verdenen w' ved tidspunktet t". Endelig predikatet "z er den sannsynlighet som kan tilskrives utsagnet x gitt at utsagnet y representerer all den evidens som kan tas for gitt". Alle de begrepsdannelsene som vi har nevnt i forbindelse med Del V kan defineres ved hjelp av de tre første predikatene vi nå har nevnt. Vi har antydet ovenfor hvordan dette kan gjøres.

Når det gjelder nye grunnsetninger for "insidens"-predikatet og "fremtredelses"-predikatet som vi nevnte ovenfor har vi formulert dem i §2.1 og §2.2 i Del V. Det dreier seg om setningene Ins1 - Ins3 og Bev1 - Bev5. Det er imidlertid ytterligere noen grunnsetninger utover disse som kommer i tillegg: For det første antar vi at at dersom en person vet noe så har vedkommende definitiv evidens for det han vet. Den andre grunnsetningen sier at dersom x vet at y er et sant utsagn så har også vedkommende definitiv evidens for at han vet y. Den tredje grunnsetningen er at definitiv evidens for et utsagn y imliserer at utsagnet y er sant.[28]

iOvenfor har vi forsøkt å gi leseren et innblikk i hovedinnholdet i §1 og §2 (med underparagrafer) i Del V. La oss avslutte med å gi en skissemessig redegjørelse for innholdet i §3 i Del V. I denne paragrafen gjør vi først rede for de grunnsetningene som som forbinder begrepet viten med definitiv evidens. Vi nevnte dem rett ovenfor, det dreier seg om setningene K1 - K3. Disse setningene er viktige fordi *de relaterer kunnskapsbegrepet til strømmen av de sanseinntrykk, og mer generelt bevissthetsinntrykk, som ifølge de klassiske empiristene utgjør selve grunnlaget for kunnskapsteorien*.[29] I §3.1 beviser vi så en rekke setninger som kaster et visst lys over begrepene evidens og definitiv evidens. I §3.2 i Del V innfører vi to

28 Se grunnsetningene K1 - K3 i §3 i Del V for en presis formulering av disse påstandene.

29 En som har lest det vi har skrevet ovenfor skulle imidlertid umiddelbart være i stand til å iakta hvor langt vekk vårt arbeid ligger fra de klassiske empiristene, Locke, Berkeley og Hume, og de logiske positivistene, for eksempel representert ved Carnap.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

utsagnsoperasjoner, nemlig Ev*;(x,t) og DEv*;(x,t) som er definert ved hjelp av predikatene "Ev;(w,t)(x,y)" og "DEv;(w,t)(x,y)". Definisjonene av disse operasjonene kan formuleres slik:

(1) $Ev^*;(x,t)(y) = \mu;\text{-}1(Mg(w: Ev;(w,t)(x,y))$
(2) $DEv^*;(x,t)(y) = \mu;\text{-}1(Mg(w: DEv;(w,t)(x,y))$

Vi kaller en funksjon L for en *svak KD-funksjon* om den oppfyller følgende krav for alle utsagn α,β:p

(i) $L: U \rightarrow U$
(ii) $\models \alpha \rightarrow \models L(\beta) \Rightarrow L(\alpha)$
(iii) $\models L(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow L(\alpha) \Rightarrow L(\beta)$
(iii) $\models L(\alpha) \Rightarrow \neg L(\neg\alpha)$

En svak T-funksjon L oppfyller alle kravene (i) - (iii), men istedetfor å kreve (iv) er oppfylt krever vi den følgende sterkere betingelse er oppfylt, nemlig: $\models L(\alpha) \Rightarrow \alpha$

I §3.2 i Del V viser vi at Ev*;(x,t) er en svak KD-funksjon og at DEv*;(x,t) er en svak T-funksjon om man aksepterer grunnsetningen K3.

Når det gjelder svake KD-funksjoner og svake T-funksjoner beviser vi tre elementærteoremer som er helt analoge med dem vi beviste i Del III §2.2. Videre beviser vi tre iterasjonsteoremer som igjen er helt anaologe med dem som vi formulerte og beviste i Del III §2.3. Siden Ev*;(x,t) og DEv*;(x,t) er henholdvis en svak KD-funksjon og en svak T-funksjon kan disse teoremene anvedes direkte på disse funksjonene.

Dermed har vi nådd slutten på denne innledningen i det vi har gitt en skissemessig oversikt over innholdet i de fem hoveddelene av denne avhandlingen.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Del I

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

DEL I

§1 Kortfattet fremstilling av teorien om utsagn og egenskaper

I det følgende betegner "L;e" det vi tidligere har kalt språket for mengdelære.[30] Dette språket er et vanlig predikatlogisk språk med identitet utvidet med de følgende ikke-logiske predikater, nemlig "x er en mengde" og "x er et element i mengden y". Disse to predikatene forkortes med "M(x)" og "xêy".[31] Siden L;e er et vanlig predikatlogisk språk inneholder det de vanlige setningslogiske konnektivene, allkvantoren og eksistenskvantoren, samt identitetspredikatet. Dette siste predikatet er det eneste rent logiske predikatet som inngår i dette språket.

Er Δ en mengde med predikater som ikke inngår blant predikatene i L;e betegner "L;e(Δ)" språket L;e utvidet med predikatene i Δ som nye ikke-logiske predikater. Vi bruker uttrykket "Fm(L)" for å betegne mengden av formler i et predikatlogisk språk L med identitet. Uttrykket "CFm(L)" betegner mengden av de lukkede formlene i L. Fra de forklaringer som så langt er gitt ser man umiddelbart at CFm(L;e) Inkl CFm(L;e(Δ))[32] og at Fm(L;e) Inkl Fm(L;e(Δ)) om Δ er en mengde med predikater. Er Δ;1 og Δ;2 to ikke-tomme mengder med predikater der Δ;1 Inkl Δ;2 og som ikke inneholder noen av de predikatene som inngår i L;e har man at Fm(L;e(Δ;1)) Inkl Fm(L;e(Δ;2)).

Anta Δ er en mengde med ikke-logiske predikater som ikke er blant de predikatene som inngår i L;e. Under disse omstendigheter betegner "ZFCu(L;e(Δ))" den minste mengden med formler X i L;e(Δ) som oppfyller de følgende krav, nemlig: (i) X inneholder alle de setningslogiske, predikatlogiske og identitetsteoretiske aksiomene i L;e(Δ), (ii) X inneholder alle ZFCu-aksiomene i L;e(Δ) og (iii) formelmengden X er lukket under slutningsreglene modus ponens og universell generalisering.

Systemet ZFCu(L;e) er beskrevet utførlig tidligere.[33] I det vesentlige kan det karakteriseres som en versjon av ZFC (det mengdeteoretiske systemet ZF utvidet med utvalgsaksiomet) som tillater eksistensen av urindivider, dvs. eksistensen av ikke-mengder.

Anta L;e(Δ) er en utvidelse av L;e av den typen som ble beskrevet ovenfor. Anta videre at θ Inkl CFm(L;e(Δ)). Da betegner "ZFCu(L;e(Δ))[θ]" den minste formelmengden X i L;e(Δ) som oppfyller de følgende krav, nemlig: (i) X inneholder alle de setningslogiske, predikatlogiske og identitetsteoretiske aksiomene i L;e(Δ), (ii) X inneholder alle ZFCu-aksiomene i L;e(Δ), (iii) X innholder alle formlene i θ og (iv) formelmengden X er lukket under slutningsreglene modus ponens og universell generalisering.

30 Se Rognes [3]

31 Bestemte beskrivelser og mengdeabstraksjonstermer innføres ved kontekstuelle definisjoner på den måten som er beskrevet i Rognes [3]

32 Det bør bemerkes at vi bruker "x Inkl y" som forkortelse for "mengden x er inkludert i mengden y". Uttrykket "x SInkl y" forkorter "mengen x er *strengt* inkludert i mengden y".

33 Se Rognes [3].

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Det følger fra denne definisjonen at dersom Δ og θ er tomme mengder har man at ZFCu(L;e(Δ))[θ] = ZFCu(L;e). I dette tilfellet har man altså at ZFCu(L;e(Δ))[θ] faller sammen med det mengdeteoretiske systemet som vi refererer til som "ZFCu".

Som vi har nevnt i tidligere arbeider, og noe som forøvrig er velkjent, kan alle de vanlige begrepene i mengdelæren og alle de begrepene som er involvert i den klassiske matematikk og geometri, samt andre grener av matematikken, defineres i rent mengdeteoretiske termer. Dette innebærer at de også kan defineres innenfor rammen av systemet ZFCu(L;e) og dermed innenfor rammen av ZFCu(L;e(Δ))[θ] om Δ og θ er to mengder med henholdsvis predikater og formler som er slik at man mekanisk kan avgjøre om en formel er med i L;e(Δ) eller ikke, og også kan avgjøre for enhver formel i α i Fm(L;e(Δ)) om α er med i θ eller ikke.

Vi har nå klargjort endel generelle forhold angående den rammen vi vil arbeide innenfor i dette skrift. De teoriene vi skal behandle vil alle være formulert innenfor et språk av typen L;e(Δ). De vil dessuten alle være utvidelser av systemet ZFCu(L;e) noe som innebærer at de alle vil være teorier av typen ZFCu(L;e(Δ))[θ] der Δ er en mengde med predikater og θ Inkl CFm(L;e(Δ)).

De kunnskapsteoriene vi vil betrakte, formulere og undersøke i dette skrift er imidlertid også utvidelser av en teori om utsagn og egenskaper vi har undersøkt i tidligere arbeider.[34] For klarhetens skyld skal vi derfor gi et sammendrag av denne teorien. Etter at dette er gjort skal vi så utvide teorien ytterligere slik at vi får en teori som ikke bare dreier seg om utsagn og egenskaper, men også om en type entiteter som vi skal kalle "finstrukturerte utsagn".

I teorien ZFCu(L;e) inngår bare to primitive, ikke-logiske predikater, nemlig "x er en mengde" som vi forkorter med "M(x)" og det binære predikatet "x er medlem av mengden y" som vi forkorter med "xêy". Utvider vi nå denne mengden med predikater med de følgende, nemlig: "x er en mulig verden", "x er et presist deskriptivt utsagn" og "x er en mulig verden hvor utsagnet y er sant" som vi forkorter med henholdsvis "MV(x)", "U(x)" og "True(w,x)" får vi en mer omfattende mengde med predikater. La oss betegne mengden som inneholder kun de tre sistnevnte predikatene med Δ;0. Man kan så betrakte språket L;e(Δ;0). Dette er språket til den utsagnsteorien som inngår som en integrert del av de mer omfattende teoriene vi senere skal betrakte. La oss nå betrakte grunnsetningene i denne teorien om utsagn. Det dreier seg om de følgende formler i L;e(Δ;0):

U1	(Ef)(f: N -(1-1)→ Mg(x: MV(x))) & (Ey)(M(y) & (Az)(zêy ↔ MV(z))
U2	True(w,x) → MV(w) & U(x)
U3	U(x)&(U(y) → (x=y ↔ (Aw)(MV(w) → (True(w,x) ↔ True(w,y))))
U4	M(x) & (Aw)(wêx → MV(w)) → (Ey)(U(y)& Mg(w: True(w,y)) =x)

Det bør bemerkes i forbindelse med den første av disse formlene at "N" betegner mengden av naturlige tall. N kan derfor defineres ved hjelp av de primitive predikatene i ZFCu(L;e). Det samme gjelder uttrykket "f: N -(1-1)→ Mg(x: MV(x))" som uttrykker at f er en funksjon som avbilder mengden N en-entydig inn i mengden av mulige verdener. Det mer generelle ttrykket "f: a-(1-1)→b" leses "f er en funksjon som avbilder mengden a en-entydig inn i

34 Se Rognes [4], Rognes [5], Rognes [6] og Rognes [7]

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

mengden b". Dette innebærer i sin tur intet annet enn at f er en-entydig funksjon der domenet til f er mengden a og hvor verdiområdet til f er inkludert i b. Også dette begrepet kan defineres på standard vis i rent mengdeteoretiske termer, dvs ved hjelp av de primitive predikatene i ZFCu(L;e). Det bør også nevnes at vi i det følgende vil bruke ordet "utsagn" i stedet for det mer klumsete uttrykket "presist deskriptivt utsagn" der det ikke kan føre til misforståelser. Det må også understrekes at vi i det følgende betegner mengden av mulige verdener med "I". Man har altså per definisjon at I = Mg(x: MV(x)) og det følger derfor fra aksiom U1 at I er en mengde, med andre ord at (Ex)(M(x) & x=I).

La oss si noen ord om hva formlene ovenfor uttrykker. Grunnsetningen U1 sier at mengden av mulige verdener faktisk finnes og at den er av større mektighet enn de naturlige tall. Mengden av mulige verdener er derfor minst tellbart uendelig. Den neste formelen, U2, sier at dersom w er en mulig verden hvor utsagnet x er sant så er w faktisk en mulig verden og x et utsagn. U2 uttrykker derfor en påstand som knapt er overraskene om man iaktar lesemåten til uttrykket "True(w,x)". U3 sier at to utsagn er identiske hvis og bare hvis de er sanne i nøyaktig de samme mulige verdenene. Endelig uttrykker U4 at dersom x er en hvilken som helst mengde med mulige verdener finnes det et utsagn y hvor mengden av de mulige verdener hvor dette utsagnet y er sant er identisk med x. Tatt sammen impliserer U3 og U4 at det er en en-entydig korrespondanse mellom mulige verdener og utsagn.

La nå θ;0 være den formelmengden i L;e(Δ;0) som inneholder lukningene av formlene U1 - U4. Da vil ZFC;u(L;e(Δ;0))[θ;0] være en helt fiksert predikatlogisk teori. Denne teorien er identisk med den teorien som i Rognes [5], *En teori om presise deskriptive utsagn ,*ble betegnet "T;1". I det følgende vil vi ta det for gitt at leseren er fortrolig med dette arbeidet og vi vil benytte de begrepsdannelsene som er definert i Rognes [5] uten videre. Dette gjelder også alle de vanlige mengdeteoretiske og matematiske begrepsdannelsene som kan defineres innenfor rammen av språket til ZFCu(L;e) og som vi har gjort rede for i Rognes [3], *En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære.*

Den egenskapsteorien som er en del av den kunnskapsteorien vi senere skal formulere er en utvidelse av den utsagnsteorien som vi har beskrevet ovenfor. Vi utvider språket L;e(Δ;0) med de følgende predikater: " x er en egenskap av grad y", "x har egenskapen y i verdenen w" og "x er et mulig individ". Disse tre predikatene forkorter vi med henholdsvis "At;y(x)", "H(x,y,w)" og "MI(x)". Betegner vi den predikatmengden som inneholder nøyaktig disse tre predikatene med Γ vil språket til den egenskapsteorien vi skal arbeide med være L;e(Δ;0 U Γ).

I dette mer omfattende språket betrakter vi de følgende formler som utgjør de grunnleggende setningene i vår teori om egenskaper:

EG1 At;y(x) → yê(N-{0})
EG2 H(x,y,w) → At;1(y) & wêI
EG3 At;1(y) → (Aw)(wêI → (Ez)(M(z)& (Ax)(xêz ↔ H(x,y,w))))
EG4 A;1(x) & At;1(y) → (x=y ↔ (Aw)(wêI →(Az)(H(z,x,w) ↔ H(z,y,w))))
EG5 M(x) & f: I → Pt(x) →
(Ey)(At;1(y) &(Aw)(wêI → (Az)(H(z,y,w) ↔ zêf(w))))
EG6 At;n(x) ↔. n> 1 & At;1(x) &
(Ea)(M(a) & a≠ø & (Aw)(wêI → Mg(z: H(z,x,w)) Inkl a^n))
EG7 MI(x) ↔ x=x

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

I forbindelse med disse formlene bør det bemerkes at dersom x er en eller annen mengde betegner "Pt(x)" potensmengden til x, det vil si dmengden av alle delmengder av x. Videre bør det bemerkes i forbindelse med EG6 at dersom a er en mengde betegner "a^n" mengden av alle n-tupler over a, det vil si mengden av alle de n-tupler der elementene er hentet fra mengden a.

Det er hensiktsmessig å forklare hva disse formlene uttrykker. Den første grunnsetningen sier at hvis x er en egenskap av grad y så er y alltid et naturlig tall som er større enn 0. Dette utelukker selvfølgelig at graden til en egenskap kan være mindre enn null eller for eksempel et reelt tall. EG1 skulle derfor være en fullstendig ukontroversiell påstand.

Det andre aksiomet sier at hvis x er en entitet som har egenskapen y i verdenen w må y være en monadisk egenskap og w en mulig verden. Også dette er en påstand som er direkte innlysende. Den tredje påstanden, EG3, uttrykker at dersom y er en monadisk egenskap så vil det, for enhver mulig verden w, finnes en mengde som inneholder nøyaktig de og bare de entitetene som har egenskapen y i verdenen w. Er y en egenskap kan man kalle mengden av alle de objektene som har egenskapen y i verdenen w for ekstensjonen til egenskapen y i w. Det det tredje aksiomet sier er derfor at dersom y er en egenskap og w en mulig verden finnes ekstensjonen til y i verdenen w. Det fjerde aksiomet, EG4 angir et identitetskriterium for egenskaper. Det sier at to egenskaper er identiske hvis og bare hvis de har den samme ekstensjon i enhver logisk mulig verden.

Anta x er en mengde og at f er en funksjon som oppfyller kravet f: I → Pt(x). Vi skal kalle en slik funksjn for en ekstensjonsfunksjon over mengden x. Det er med andre ord en funksjon som til enhver mulig verden w tilordner denne verdenen w en delmengde av mengden x. Er f en ekstensjonsfunksjon over x kaller vi f(w) for ekstensjonen til f i verdenen w. Det aksiomet EG5 uttrykker er derfor at hvis f er en ekstensjonsfunksjon over mengden x finnes det en egenskap y hvor man har for enhver verden w at ekstensjonen til y i verdenen w er identisk med ekstensjonen til f i denne verden w.

EG6 kan oppfattes som en definisjon av hva som menes med en egenskap av grad n der n er et naturlg tall som er større eller lik 1. Det fremgår fra EG6 at en egenskap av grad n er en egenskap x av grad 1 hvor det finnes en mengde a slik at ekstensjonen til x i enhver verden w er en mengde av n-tupler over a. Er derfor x en egenskap av grad n vil alltid de objekter som har egenskapen x i en verden w være n-tupler.

Endelig sier EG7, som kan oppfattes som en definisjon av uttrykket "mulig individ", ikke noe annet en at et mulig individ er et objekt som er identisk med seg selv. Fra dette sammen med aksiomene for identitet følger det selvfølgelig at absolutt alt som finnes er mulige individer.

Betegner man den mengden av formler i L;e(Δ;0 U Γ) som inneholder lukningene av EG1 - EG7, og bare lukningnene av disse formlene, for θ;1har man at den egenskapsteorien vi skal arbeide med i dette skrift er ZFCu(L;e(Δ;0U Γ))[θ;0 U θ;1].

Det bør bemerkes at denne egenskapsteorien, som vi i tidligere arbeider har betegnet med "E;3", er utførlig omtalt i Rognes [6] , *Egenskaper. Del I,*og Rognes [7], *Egenskaper. Del II*. I det følgende vil det derfor forutsettes at leseren er fortrolig med innholdet i disse arbeidene. Vi vil også, stort sett uten videre og uten at det gis utførlige kommentarer, benytte oss av de begrepsdannelsene som er innført i disse skrifter.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

I det følgende vi foreta ytterligere to utvidelser av den teorien som har blitt beskrevet. Vi skal først utvide teorien slik at den ikke bare blir en teori som sier noe om mengder, utsagn og egenskaper, men som også gjør det mulig å omtale en mer spesiell type av entiteter, finstrukturerte utsagn. Senere vil vi ytterligere utvide teorien med en lang rekke predikater slik at man i tillegg kan formulere en ganske omfattende teori om viten.

§1.1 Uttrykk, konstruksjoner og intensjonale språk

Før vi går videre og beskriver hvordan teorien om egenskaper og utsagn kan utvides med en teori om det vi skal kalle finstrukturerte utsagn finner vi det nødvendig å gjøre rede for det som kan kalles intensjonale språk.

Språket for mengdelære, L;e, er, som ethvert predikatlogisk språk, eller første-ordens språk som det også kalles, et rent ekstensjonalt språk. Dette innebærer ikke noe annet enn at man alltid får et koekstensjonalt uttrykk som resultat om man i et gitt uttrykk, hva enten det er en formel eller en term, erstatter en delformel eller en term som inngår i uttrykket med en annen formel/term som har samme ekstensjon.

Vårt vanlige språk inneholder imidlertid konstruksjoner som ikke er av denne ekstensjonale natur. Et eksempel er konstruksjonen "Det er logisk nødvendig at - " hvor man for streken "-" kan sette inn en setning. Det er åpenbart at setningen "Det er logisk nødvendig at 9=9" er sann. Det er også slik at setningen "Antallet planeter = 9" er en sann setning. Men erstatter man den første forekomsten av "9" i setningen "Det er logisk nødvendig at 9=9" med "antallet planeter" får man som resultat "Det er logisk nødvendig at antallet planeter = 9" som åpenbart er en usann setning. Dette viser at konstruksjonen "nødvendig at" ikke er noen ekstensjonal konstruksjon. Vi skal kalle konstruksjoner som ikke er ekstensjonale for intensjonale.

Vi har ovenfor brukt uttrykket "konstruksjon" på en temmelig løs måte. La oss nå gi en mer utførlig redegjørelse for dette begrepet. La oss først definere hva vi mener med et språklig uttrykk. Dette er en hvilken som helst endelig sekvens av tegn som brukes i det norske skriftspråk. I det vesentlige er disse tegnene de små og store bokstavene i det norske alfabet sammen med vanlige tegn som mellomromstegnet, paranteser, hakeparanteser, talltegn, likhetstegnet osv. En tegnsekvens som for eksempel "#ha?+" vil derfor være et uttrykk i vår betydning. Likeledes vil tegnsekvenser som "2+7=10", "7 > 5", "Oslo er en by i Norge" osv. være uttrykk i den betydningen vi her har i tankene[35].

Blant uttrykkene har vi en bestemt sekvens av tegn som vi kaller variabeltegnene. Dette er rett og slett de følgende tegn: "x", "y", "z", "w", "x'", "y'", "z'", "w'", "x" " osv. ad infinitum.

35 I stedet for å bruke ordet "uttrykk" kunne vi ha brukt det lengere uttrykket "norsk skriftspråklig uttrykk". De lydsekvenser som produseres av en person når vedkommende taler norsk er selvfølgelig også uttrykk, men neppe sekvenser av små og store bokstaver i det norske alfabet. De er derfor ikke uttrykk i den snevere betydning som vi har avgrenset ovenfor.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Vi kan nå definere hva vi mener med en n-ær konstruksjon (n>=1). En n-ær konstruksjon er rett og slett en funksjon som tilordner enhver sekvens av n språklige uttrykk et språklig uttrykk.

Et eksempel er den funksjonen som til to språklige utrykk u og u' tilordner dette det uttrykket man får når man etter tegnsekvensen u føyer til tegnsekvensen " og " og etter denne sekvensen legger til uttrykket u'. Er for eksempel u = "Per er en advokat" og u' = "Kari er en dommer" vil denne konstruksjonen gi som resultat, når den anvendes på disse to uttrykkene, utrykket: "Per en advokat og Kari er en dommer".

I det følgende skal vi tenke oss at at vi arbeider med tre kategorier av uttrykk: variabeltegn, termer og formler. Vi har avgrenset mengden av variabeltegn ovenfor. La oss nå gi definisjoner av uttrykkene "term" of "formel". En term er et språklig uttrykk som pretenderer å refere til ett og bare ett objekt om alle variabeltegnene som eventuelt forekommer fri i det har blitt tilordnet bestemte objekter som referanse. Dette er ingen presis definisjon, men den er tilstrekkelig for våre formål her. En formel er enten et språklig uttrykk som er sant eller falskt. Inneholder det variabeltegn som forekommer fri er det sant eller usant om alle disse variabeltegn tilordnes bestemte objekter som referanse. I det følgende oppfatter vi variabeltegn som en delmengde av mengden av termer.

Det er nå mulige å skille mellom to typer av språklige konstruksjoner. På den ene side har man konstruksjoner som, når de anvendes på visse uttrykk, gir som resultat formler. Vi kaller dette for formeldannende konstruksjoner. På den annen side har man konstruksjoner som når de anvendes på visse uttrykk gir en termer. Disse konstruksjonene kalles for termdannende konstruksjoner. Nå er det intet i veien for at man kan tenke seg en konstruksjon som gitt n distinkte variabeltegn, m termer og p formler gir som resultat en formel. En slik konstruksjon kaller vi for en formeldannende konstruksjon av type <n,m,p>. En konstruksjon som gitt n distinkte variabeltegn, m termer og p formler gir som resultat en term kaller vi for en termdannende konstruksjon av type <n,m,p>.

La oss gi noen eksempler på forskjellige typer av konstruksjoner. Uttrykket "Det er ikke slik at - " kan sies å representere en formeldannende konstruksjon på én formel, altså en formeldannende konstruksjon av type <0,0,1>. Man ser at når man setter inn en formel for streken "-" får man en ny formel som resultat. Ser man videre på det følgende uttrykk "Det er både slik at α og slik at β" ser man at dette kan oppfattes som en formeldannende konstruksjon på to formler, med andre ord som en formeldannende konstruksjon av type <0,0,2>. Setter man inn to formler for henholdsvis tegnene "α" og "β" vil resultatet være en ny formel. På tilsvarende vis representerer de andre setningslogiske konnektive "Enten α eller β", "Hvis α så β" og "α hvis og bare hvis β" formeldannende konstruksjoner av type <0,0,2>.

La oss se på noen andre eksempler. Et monadisk predikat som eksempelvis "- er et menneske" kan oppfattes som en formeldannende konstruksjon på én term, med andre ord som en formeldannende konstruksjon av type <0,1,0>. Setter man inn en term, f.eks. "Sokrates" for streken "-" i uttrykket " - er et menneske" får man som resultat setningen, og dermed formelen, "Sokrates er et menneske". Tilsvarende representerer ethvert n-ært predikat en formeldannende konstruksjon på n termer, med andre ord er det en formeldannende konstruksjon av type <0,n,0>. Likeledes representerer det binære predikatet "- er identisk

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

med -" en formeldannende konstruksjon på to termer, det vil si en formeldannende konstruksjon av type <0,2,0>.

All-kvantoren kan oppfattes som en formeldannende konstruksjon på én variabel, ingen termer og én formel. Med andre ord er dette en konstruksjon av type <1,0,1>. Den kan representeres ved uttrykket "For alle - er det slik at -- ". Tenker man seg et vilkårlig par <v,α> der v er et variabeltegn og α er en formel og setter man variabeltegnet inn for "-" og formelen α inn for "--" i uttrykket som vi nettopp nevnte får man som resultat en formel. På tilsvarende vis forholder det seg med eksistenskvantoren "Det finnes et objekt - slik at --". Også denne kvantoren kan oppfattes som en konstruksjon som tilordner én variabel og én formel en formel. Den kan med andre ord oppfattes som en konstruksjon av type <1,0,1>.

Vi har ikke gitt noen eksempler på termdannende konstruksjoner. La oss derfor før vi går videre si noen ord om bestemte beskrivelser. La oss betrakte uttrykket "Det objektet - som er slik at --" Man ser at om man setter inn et variabeltegn og en formel for henholdsvis uttrykkene "-" og "--" får man som resultat en term. Dette innebærer at konstruksjonen "Det objektet - som er slik at --" er en termdannende konstruksjon på én variabel og én formel, med andre en termdannende konstruksjon a type <1,0,1>

Gitt de setningslogiske konstruksjonene, kvantorene og beskrivelsesoperatoren kan man, om man tar sitt utgangspunkt i en ikke-tom mengde med predikater, la oss kalle den Pr, rekursivt avgrense en mengde med formler og termer som er entydig bestemt av denne mengden med predikater Pr. En formel som ikke inneholder noen fri variabler kalles en setning. En formel som inneholder en eller flere fri variabler kalles en åpen setning. Tilsvarende for termer.

Man kan skille mellom konstruksjoner som er det man kaller for ekstensjonale og dem som ikke er det. Vi skal straks definere dette uttrykket "ekstensjonal konstruksjon". To lukkede formler α og β er koekstensjonale hvis og bare hvis de har den samme sannhetsverdi. Anta α og β er to formler som inneholder frie variabler, la oss si at de variablene som forekommer fri i α og β er x;1,...,x;n. Da sies α og β å være koekstensjonale hvis og bare hvis α har nøyaktig samme sannhetsverdi som β for enhver tilordning av objekter til variablene x;1,....,x;n. På tilsvarende hvis definerer vi koekstensjonalitet mellom termer. Anta t og t' er to lukkede termer. De sies da å være koekstensjonale hvis og bare hvis de referer til nøyaktig det samme objekt. Er t og t' to termer som inneholder fri variabler sies de å være koekstensjonale hvis og bare hvis de har nøyaktig samme referanse for enhver tilordning av objekter til de variablene som forekommer fri i dem.

Vi kan nå definere hva som menes med at en formeldannenende konstruksjon av type <n,m,p> er ekstensjonal. La c være en slik konstruksjon. Da sies c å være ekstensjonal hvis og bare hvis man har c(x;1,.....x;n,t;1,...,t;m, f;1,...,f;p) er koekstensjonal med c(x;1,.....x;n,t';1,...,t';m, f';1,...,f';p) såfremt man har at t;i er koekstensjonal med t';i for i =1,...,m og formelen f;j er koekstensjonal med formelen f';j for j=1,..,p. En helt tilsvarende definisjon kan gis for termdannende konstruksjoner av type <n,m,p>

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

På basis av disse definisjonene kan man forholdsvis lett vise at de setningslogiske konstruksjonene, kvantorene og identitetspredikatet er ekstensjonale konstruksjoner i denne forstand.

En konstruksjon som ikke er ekstensjonal kaller vi for intensjonal. Det kan følgelig finnes intensjonale termdannende såvel som formeldannende konstruksjoner av type <m,n,p>.

Vi skal gå et steg videre og definere hva som menes med at en konstruksjon er logisk gjennomsiktig.

To lukkede formler α og β er logisk ekvivalente hvis og bare hvis det er logisk nødvendig at de har den samme sannhetsverdi. Anta α og β er to formler som inneholder frie variabler, la oss si at de variablene som forekommer fri i α og β er x;1,...,x;n. Da sies p og q å være logisk ekvivalente hvis og bare hvis det er logisk nødvendig at α har nøyaktig samme sannhetsverdi som β for enhver tilordning av objekter til variablene x;1,....,x;n. På tilsvarende hvis definerer vi logisk ekvivalens mellom termer. Anta t og t' er to lukkede termer. De sies da å være logisk ekvivalente hvis og bare hvis det er logisk nødvendig at de referer til nøyaktig det samme objekt. Er t og t' to termer som inneholder fri variabler sies de å være logisk ekvivalente hvis og bare hvis det er logisk nødvendig at de har nøyaktig samme referanse for enhver tilordning av objekter til de variablene som forekommer fri i dem.

Vi kan nå definere hva som menes med at en formeldannenende konstruksjon av type <n,m,p> er logisk gjennomsiktig. La c være en slik konstruksjon. Da sies c å være logisk gjennomsiktig hvis og bare hvis man har c(x;1,.....x;n,t;1,...,t;m, f;1,...,f;p) er logisk ekvivalent med c(x;1,.....x;n,t';1,...,t';m, f';1,...,f';p) såfremt man har at t;i er logisk ekvivalent med t';i for i =1,...,m og formelen f;j er logisk ekvivalent med formelen f';j for j=1,..,p. En helt tilsvarende definisjon kan gis for termdannende konstruksjoner av type <n,m,p>.

Endel bemerkninger kan gjøres i forbindelse med definisjonene ovenfor. Er to uttrykk av samme kategori logisk ekvivalente vil de også ha samme ekstensjon. Dette impliserer at dersom en konstruksjon er ekstensjonal så er den også logisk gjennomsiktig. Det omvendte holder imidlertid ikke. Konstruksjonen "Det er logisk nødvendig at - " er som vi allerede har påpekt ikke ekstensjonal. Men den er logisk gjennomsiktig. Man kan imidlertid ikke fra dette konkludere med at alle intensjonale konstruksjoner er logisk gjennomsiktige.

Et språk der alle formler og termer er bygget opp ved hjelp av variabeltegn, samt rent ekstensjonale konstruksjoner kaller vi for et ekstensjonalt språk. Et språk der alle formlene og termene er bygget opp ved hjelp av variabeltegnene, et visst antall ekstensjonale predikatkonstruksjoner av forskjellig grad, identitetspredikatet, de setningslogiske konnektivene og kvantorene kaller vi for et predikatlogisk språk, eller førsteordens språk. Det følger fra de definisjonene vi har gitt at et predikatlogisk språk nødvendigvis er et ekstensjonalt språk. Med et intensjonalt språk forstår vi et språk som inneholder intensjonale setningsdannende og/eller termdannende konstruksjoner i tillegg til de konstruksjonene som inngår i et vanlig predikatlogisk språk. Det er intet i veien for at et intensjonalt språk i denne betydning kan inneholde logisk gjennomsiktige såvel som logisk ugjennomsiktige konstruksjoner.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

La oss nå nevne endel eksempler på intensjonale konstruksjoner. Vi skal innndele dem ganske grovt i forskjellige grupper. For det første har vi de alethiske, kausale og deontiske modalitetene. Det dreier seg for det første om de følgende setningsdannenede konstruksjoner av type <0,0,1>, nemlig "Det er logisk mulig at α" og "Det er logisk nødvendig at α ". Dette er de alethiske modalitetene. Når det gjelder de kausale modalitetene nevner vi følgende: "Det er kausalnødvendig at α ", "Det er kausalt mulig at β ". Når det gjelder de deontiske modalitetene nevner vi de følgende konstruksjoner: "Det er etisk sett påbudt at α ", "Det er etisk sett forbudt at α " og "Det er etisk sett tillatt at α ". Man ser at alle disse konstruksjonene er logisk gjennomsiktige.

Ved siden av denne kategorien av intensjonale konstruksjoner har vi hva man kan kalle "epistemisk-doxastiske" og "psykologiske" intensjonale konstruksjoner. Blant de "epistemiske" konstruksjonene har vi:

(i) "x vet ved tidspunktet t at α"
(ii) "x har ved tidspunktet t adekvat evidens for at α"
(iii) "x har ved tidspunktet t definitiv evidens for at α"
(iv) "x innser ved tidspunktet t at α"
(v) "x innser ved tidspuntet t at α følger fra β"

Eksempler på doxastiske konstruksjoner er:

(vi) "x tror ved tidspunktet t at α"
(vii) "x mener ved tidspunktet t at α"
(viii) "x er av den mening at α"
(ix) "Det fortoner seg for x ved tidspunktet t som om det er slik at α".

La oss nå se på eksempler på det vi vil kalle "psykologiske" konstruksjoner.
Vi nevner først de følgende eksempler:

(x) "x ser ved tidspunktet t at α"
(xi) "x merker ved tidspunktet t at α"
(xii) "x kjenner ved tidspunktet t at α"
(xiii) "x hører ved tidspunktet t at α"
(xiv) "x observerer ved sanseiaktagelse ved tidspunktet t at α"

Disse konstruksjonene har åpenbart med sanseiaktagelse å gjøre. Videre har vi slike konstruksjoner som har med hukommelse å gjøre som for eksempel:

(xv) "x husker ved tidspunktet t at α"
(xvi) "x erindrer ved tidspunktet t at α"

Andre konstruksjoner har med forestilling å gjøre:

(xvii) "x forestiller seg ved tidspunktet t at α"
(xviii) "x ser for seg ved tidspunktet t at α"

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(xix) "x tenker seg i fantasien ved tidspunktet t at α"
(xx) "x tenker seg ved tidspunktet t at α"

Også de følgende konstruksjoner er det nærliggende å karakterisere som "psykologiske":

(xxi) "x ønsker ved tidspunktet t at α"
(xxii) "x håper ved tidspunktet t at α"
(xxiii) "x frykter ved tidspunktet t at α"
(xxiv) "x er ved tidspunktet t nedtrykt over at α"

Man kan forlenge denne listen betraktelig. Vi avslutter denne listen med de følgende konstruksjoner som er av en mer handlingsteoretisk natur:

(xxv) "x sørger ved tidspunktet t for at α"
(xxvi) "x sier ved tidspunktet t at α"
(xxvii) "x meddeler y ved tidspunktet t at α"

Det bør bemerkes at denne listen over intensjonale konstruksjoner ikke er ment som noe uttømmende og fullstendig liste. Heller ikke er den klassifikasjonen av de intensjonale konstruksjonene vi har gitt ment som noe annet enn tentativ og midlertidig. Tenker man seg nå et førsteordens språk utvidet med alle de konstruksjonene vi har nevnt vil resulatet være et eksempel på et intensjonalt språk.

Vi skal imidlertid også tenke oss dette språket utvidet med ytterligere en konstruksjon, nemlig konstruksjonen "at α". Dette er en termdannende konstruksjon på nøyaktig en formel, med andre ord en termdannende konstruksjon av type <0,0,1>. Naturlig nok tenker vi oss at termen "at α" betegner nøyaktig ett og bare ett objekt uansett hva slags formel i språket vi setter inn for α, så sant alle de fri variablene i α har blitt tilordnet en referanse. Den mengden av entiteter som er referanser for alle termer av typen "at α" ettersom α gjennomløper alle formler i språket L skal vi akkurat her kalle for mengden av utsagn som kan uttrykkes i L. Teoretisk sett er det mulig at det kannskje mulig at det kan finnes utsagn som ikke kan uttrykkes i noe språk. Vi skal betrakte denne muligheten senere.

La oss nå se næremere på den rent logiske analyse av de intensjonale konstruksjonene vi har nevnt ovenfor når man forutsetter at språket vi arbeider innenfor inneholder den termdannende operatoren "at α". Vi skal ta vårt utgangspunkt i konstruksjonen "x tror ved tidspunktet t at α" og først kommentere denne forholdsvis utførlig. Helt analoge bemerkninger kan da gjøres i forbindelse med alle de andre konstruksjonene vi har nevnt ovenfor.

Hvis man ser på en setning av formen "x tror ved tidspunktet t at α" virker det svært nærliggende, nesten naivt, å tenke seg at det er logisk nødvendig at denne setningen er sann hvis og bare hvis det finnes noe y der (i) y er et utsagn og (ii) y er identisk med det at α og (iii) y beskriver et forhold x tror foreligger ved tidspunktet t.

La oss innføre noe notasjon slik at vi kan formalisere denne tesen. V bruker uttrykket "Tror;(x,t)(α)" som forkortelse for "x tror ved tidspunktet t at α". Videre skal vi bruke "tror;

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(x,t)(y)" som forkortelse for treplass-predikatet "y beskriver et forhold som x tror foreligger ved tidspunktet t". Dessuten bruker videre uttrykket "u(α)" som forkortelse for "at α". Endelig bruker vi "Ut(x)" som forkortelse for det monadiske predikatet "x er et utsagn".

Den tesen vi nettopp nevnte kan da formaliseres slik:

(1) Tror;(x,t)(α) ↔ (Ey)(Ut(y) & y= u(α) & tror;(x,t)(y))

Man legger merke til at "y er et forhold som x tror er tilfelle ved tidspunktet t" er et predikat, altså en formeldannende konstruksjon av type <0,3,0>, mens "x tror ved tidspunktet t at p" er formeldannende konstruksjon på to termer og en formel, med andre ord en konstruksjon av type <0,2,1>. "tror;(x,t)(y)" er følgelig ikke en konstruksjon som tar formler som argumenter, bare termer. Man kan si at predikatet "tror;(x,t)(y)" svarer til selve den intensjonale operatoren "Tror;(x,t)(y)".

Man ser nå at det til hver og en av de intensjonale konstruksjonene vi har nevnt ovenfor svarer et tilsvarende predikat. Til for eksempel konstruksjonen "Det er logisk nødvendig at p" svarer predikatet "x beskriver et forhold som det er logisk nødvendig at er sant". Til den intensjonale konstruksjonen "Det er logisk mulig at p" svarer predikatet "x beskriver et forhold som er logisk mulig". Bruker vi "Nec(α)" som forkortelse for "Det er logisk nødvendig at α" og "nec(x)" som forkortelse for predikatet "x beskriver et forhold som er logisk nødvendig", kan en tese som er helt analog med (1) formuleres for logisk nødvendighet:

(2) Nec(α) ↔ (Ex)(Ut(x) & x=u(α) & nec(x))

La oss studere et annet eksempel: Ser man på konstruksjonen (v) ovenfor er dette konstruksjonen: "x innser ved tidspuntet t at α følger fra β". Man ser at det dreier seg om en formeldannende konstruksjon av type <0,2,2>. Uttrykket representerer derfor en konstruksjon som anvendt på to termer og to formler gir som resultat en formel. Det predikatet som svarer til denne konstruksjonen vil være uttrykket: "x innser ved tidspunktet t at y følger fra z" Innfører vi nå uttrykket Inns;(x,t)(α,β)" som forkortelse for den intensjonalekonstruksjonen "x innser ved tidspuntet t at α følger fra β" og uttrykket "inns;(x,t)(y,z)" som forkortelse for det nevnte predikat 4-plass predikat kan man formulere et prinsipp som er helt analogt med (1) og (2):

(3) Inns;(x,t)(α,β) ↔ (Ey)(Ez)(y=u(α) &z=u(β) & inns;(x,t)(y,z))

Hvis man finner prinsippene (1) og (2) plausible er det selvfølgelig vanskelig å skjønne hvorfor man skulle finne (3) uplausibel. Det siste prinsippet er derfor av nøyaktig den samme karakter som de to foregående. Det må medgis at vi naturligvis ikke kan utlede noen av setningene (1) - (3) fra mer evidente, fullstendig selvinnlysende setninger.

På samme måte som tre-plasspredikatet "y er et forhold som x tror foreligger ved tidspunktet t" svarer til den intensjonale operatoren "x tror ved tidspunktet t" kan man lett formulere lignenede predikater som svarer til de andre intensjonale operatorene som vi har nevnt ovenfor. For eksempel vil tre-plass predikatet "y er et forhold som x forestiller seg ved tidspunktet t" svare til predikatet "x forestiller seg ved tidspunktet t at α". Leseren kan på egenhånd gå igjennom rekken av konstruksjoner (i) - (xxvii) og til hver av de intensjonale

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

operatorene som er nevnt formulere et korresponderende flerplass predikat. Gitt dette forhold kan man til hver og en av de intensjonale operatorene (i) - (xxvii) som vi har nevnt formulere grunnsetninger som er helt analoge med dem vi har skrevet ned rett ovenfor, nemlig (1) - (3). Det bør bemerkes at så lenge vi ikke bare opererer med intensjonale operatorer som "Tror", "Vet", "Forestiller seg at", men også med tilsvarende predikater, er det mulig å uttrykke slike generelle påstander som at endel av det a vet er noe b tror, a tror på en rekke påstander som b ikke vet at er tilfelle, men som c vet er riktige, osv. Slike setninger er setninger vi ofte bruker i vanlig tale, men som er umulige å uttrykke om vi bare har til rådighet intensjonale operatorer av den typen har eksemplifisert ovenfor. Før vi går videre vil vi gjøre oppmerksom på at vi skal kalle de predikatene som svarer til de intensjonale operatorene (i) - (xxvii) samt de andre vi har nevnt for predikater som uttrykker intensjonale relasjoner.

La oss nå betegne med L det følgende språk. Uttrykkene i L er det vi tidligere har definert som uttrykk. Variabeltegnene i språket er den rekken av uttrykk som vi har avgrenset tidligere. Språket inneholder de vanlige setningslogiske konnektivene, kvantorene og identitetstegnet. Videre inneholder språket beskrivelsesoperatoren "Det objektet som er slik at α". I tillegg til dette inneholder språket L alle de intensjonale konstruksjonene som vi har nevnt tidligere (i) - (xxvii) samt konstruksjonene "Det er logisk nødvendig at α" og "Det er logisk mulig at α". Videre innkluderer vi alle de predikatene som uttrykker intensjonale relasjoner som korresponderer til de intensjonale operatorene vi har nevnt ovenfor. Naturligvis er også utsagnsabstraksjonsoperatoren "at α" og predikatet "x er et utsagn" med i språket. I tillegg til disse konstruksjonene antar vi at L inneholder et stort antall ikke-logiske og ekstensjonale predikater som kan brukes til å uttrykke all verdens påstander om alt fra spiker til forhold i fjerne galakser. Vi skal også tenke oss at L inneholder de mengdeteoretiske predikatene "x er en mengde" og "x er et objekt som er medlem av mengden y". Mengden av formler og mengden av termer defineres på vanlig måte ved simultan rekursjon.

Når det gjelder logiske lover for de enkelte konstruksjonene i L virker det naturlig tenke seg et standard aksiomsett for kvantifikasjonsteori med identitet når det gjelder de setningslogiske konstruksjonene, kvantorene, identitet og beskrivelsesoperatoren. Til disse aksiomene kan vi så legge til et standard aksiomsett, S5, for modalopertorene "Det er logisk mulig at α" og "Det er logisk mulig at α". Når det gjelder de mengdeteoretiske predikatene "x er en mengde" og "x er et element i mengden y" er det naturlig å bruke en eller annen versjon av ZFC som tillater urindivider. Når det så tilslutt gjelder alle de intensjonale konstruksjonene vi har nevnt vil det være naturlig å formulere aksiomer for dem som er analoge med formlene (1) - (3) som vi nevnte ovenfor. Men dette vil trolig bare være en liten del av de logiske lover som man med plausibilitet kan formulere. Videre vil det være naturlig å ta med:

(4) $Ut(u(\alpha))$

Som et aksiom for utsagnsabstraksjonsoperatoren u. Dessuten vil det være naturlig å tenke seg at man for for eksempel predikatet "tror;(x,t)(y)" legger til et aksiom av typen:

(5) $tror;(x,t)(y) \rightarrow Ut(y)$

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Tilsvarende aksiomer kan formuleres for de andre predikatene vi har nevnt som uttrykker intensjonale relasjoner og som svarer til de intensjonale konstruksjonene (i) - (xxvii).

Vi nevnte tidligere et skille mellom intensjonale og ekstensjonale konstruksjoner. Dessuten sondret vi mellom det vi kalte for logisk gjennomsiktige og logisk ugjennomsiktige konstruksjoner. Nå skulle det være klart at de alethiske, kausale, deontiske, samt alle konstruksjonene (i) - (xvii) ikke er ekstensjonale konstruksjoner. Man kan ikke erstatte koekstensjonale uttrykk i formler eller termer som befinner seg innenfor området av dem og få som resultat formler eller termer med samme ekstensjon. Alle disse konstruksjonene er derfor intensjonale. Det virker imidlertid ikke som om de alle av de konstruksjonene vi har nevnt er logisk gjennomsiktige. Det synes hinsides tvil at de aletiske, deontiske og kausale modalitetene er logisk gjennomsiktige. Erstatter man logisk ekvivalente uttrykk innenfor området til slike operatorer i formler og termer får man alltid som resulatet nye formler og termer som er logisk ekvivalente. Når det på den annen side gjelder de konstruksjonene ovenfor som vi kalte for epistemiske, doksastiske og psykologiske virker det imidlertid ikke direkte at åpenbart de er logisk gjennmsiktige. La oss for eksempel ta vårt utgangspunkt i konstruksjonen "x tror ved tidspunktet t at α", eller i symboler: "Tror;(x,t)(α)". Fra en formel av typen:

(6.1) Tror;(x,t)(α)

virker det tvilsom om man kan slutte:

(6.2) Tror;(x,t)((α&~β)v(α&β))

Heller ikke implikasjonen den andre veien virker særlig plausibel. Selvom formlene "α" og "(αv~β)&(αvβ)" er logisk ekvivalente virker det ikke som om formlene (6.1) og (6.2) er logisk ekvivalente. Enda mindre opplagt virker det som om man fra (6.1) kan slutte:

(6.3) Tror;(x,t)((α→β)→(α&β))

Det er ganske klart at det kan finnes situasjoner der (6.1) er sann, mens derimot (6.3) er usann. Men "α" og "(α→β)→(α&β)" er logisk ekvivalente. Det følger at konstruksjonen "x tror ved tidspunktet t at α" er logisk ugjennomsiktig.

Det er hovedsakelig to grunner til at alt det en person tror er tilfelle ikke utgjør en mengde med utsagn som er lukket under logisk konsekvens. Den ene grunnen er at selvom en person x ved tidspunktet t tror at α kan det finnes utsagn som er såpass kompliserte at x ved t ikke er i stand til å innse at de er ekvivalente med α. Hvis β er et slikt utsagn vil x i noen tilfelle ikke ha noen formening om hvorvidt β er tilfelle og derfor heller ikke tro at β er tilfelle. Den andre grunnen er at det logisk sett ikke er noe som utelukker at en person x på grunn av feilresonnering faktisk kan tro at et svært komplisert utsagn β er sant selvom det faktisk impliserer en selvmotsigelse. I så tilfelle vil det være slik at, om trosfeltet til x er lukket under ekvivalens og vedkommende tror noe annet α, at x tror at både α&~β. For i dette tilfelle vil ~β være nødvendig sant siden β er selvmotsigende. Men da er α logisk sett ekvivalent med α&~β. Hvis vi nå antar at x har minimalt med "logisk sans" og innser at β impliserer ~(α&~β)

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

og ikke tror på noen direkte motsigelse av typen γ&~γ, følger det at vedkommendes trosfelt ved t ikke er lukket under logisk ekvivalens. Man kan derfor konkludere med at konstruksjonen "tror at" ikke er logisk gjennomsiktig.

Argumenter av den typen som har blitt fremlagt her kan også brukes for å begrunne at andre av konstruksjonene (i) - (xxvii) ovenfor ikke er logisk gjennomsiktige.

Vi har nå argumentert for at følgende skjema ikke holder.

(6.4) $\mathrm{Nec}(\alpha \leftrightarrow \beta) \rightarrow \mathrm{Tror};(x,t)(\alpha) \rightarrow \mathrm{Tror};(x,t)(\beta)$

Som man ser uttrykker skjemaet (6.4) at konstruksonen "x tror ved tidspunktet t at α" er logisk gjennomsiktig. Men dette innebærer også at det følgende skjema, som angir et identitetskriterium for de utsagn som lar seg uttrykke ved formler i L, heller ikke kan holde:

(6.5) $\mathrm{Nec}(\alpha \leftrightarrow \beta) \leftrightarrow u(\alpha)=u(\beta)$

Grunnen er at (6.5) impliserer (6.4) om man aksepterer (1).

Det er enkelt å innse at dette er tilfelle. Anta at (6.5) holder. Vi skal vise at (6.4) holder. Anta derfor at (+) $\mathrm{Nec}(\alpha \leftrightarrow \beta)$ og at $\mathrm{Tror};(x,t)(\alpha)$. Fra det siste følger ved hjelp (1) at det finnes y slik at $\mathrm{Ut}(y)$ & $y=u(\alpha)$ & $\mathrm{tror};(x,t)(y)$. Men fra (+) og (6.5) har man $u(\alpha)=u(\beta)$. Det følger derfor at

$\mathrm{Ut}(y)$ & $y= u(\beta)$ & $\mathrm{tror};(x,t)(y)$.

Men i lys av (1) følger herav $\mathrm{Tror};(x,t)(\beta)$. Dette viser at påstanden holder.

Aksepterer man derfor at (1) ovenfor holder, noe som virker rimelig, og aksepterer man at (6.4) ikke holder generelt, noe som også virker rimelig, er man følgelig tvunget til å forkaste (6.5) som et identitetskriterium for det vi her har kalt utsagn.

Vi kan definere en synonymitetsrelasjon ved å si at to formler α,β i språket er synonyme hvis og bare hvis $u(\alpha)=u(\beta)$. Det skulle være klart at denne synonymitetsrelasjonen er en ekvivalensrelasjon. Vi minner om at "$u(\alpha)$" betegner det utsagnet som formelen α uttrykker. En påstand av typen $u(\alpha)=u(\beta)$ sier derfor at det utsagnet som uttrykkes av α er identisk med det utsagnet som uttrykkes av formelen β.

Siden denne synonymitetsrelasjonener en ekvivalensrelasjon følger det at den er refleksiv, transitiv og symmetrisk. Som enhver ekvivalensrelasjon inndeler den derfor sitt domene, i dette tilfelle mengden av lukkede formler i L, i en mengde av innbyrdes eksklusive, ikke-tomme mengder som samlet uttømmer mengden av de lukkede formler i L.

Det er to andre ekvivalensrelasjoner over mengden av lukkede formler i L som kan sammenlignes med den synonymitetsrelasjonen vi nettopp har definert. For det første har vi identitesrelasjonen begrenset til mengden av alle lukkede formler i L. Det er åpenbart at dette er en ekvivalensrelasjon. For det andre har vi den følgende relasjon som vi kaller "kognitiv synonymitet". Domenet til denne relasjonen er igjen mengden av lukkede formler i L. Vi

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

definerer denne relasjonen slik: To lukkede formler α,β i L sies å være kognitivt synonyme hvis og bare hvis man har at Nec(α ↔ β). Siden vi åpenbart har at

(6.6) Nec(α ↔α)

videre at

(6.7) Nec(α↔β)→ Nec(β↔α)

og endelig at

(6.8) Nec(α↔β) & Nec(β↔γ)→ Nec(α↔γ)

følger det at denne relasjonen er refleksiv, symmetrisk og transitiv, og derfor at den er en ekvivalensrelasjon.

Vi skal ikke presentere noen fullstendig semantikk for dette språket L. Men vi skal presentere visse sider ved en slik teori. Hvis man ønsker å angi sannhetsbetingelsene for de enkelte formlene i L virker det naturlig å tenke seg at variabeltegnene i L tar som verdier elementene i en svært omfattende mengde av entiteter D. Blant elementene i D vil det være naturlig å tenke seg at man har to delmengder, nemlig mengden av tidspunkter T og mengden av personer P. Hvor "stor" er så mengen D? Vel, vi tenker oss at den må minst være likemektig med mengden av reelle tall. Det er imidlertid av underordnet betydning å angi et "eksakt" kardinaltall for denne mengden her. Vi må imidlertid nevne at vi tenker oss at språket L utvides med en mengde navn, N, på alle elementene i D. "L(N)" betegner språket L utvidet med med disse navnene i N. Vi forutsetter at det er en en-entydig korrespondanse mellom navnene i N og elementene i D. Er x et element i D skal vi la n(x) være det navnet i mengden N som er navn på entiteten x.

Siden språket L inneholder modale operatorer som "Det er logisk nødvendig at" og "Det er logisk mulig at" er det naturlig å innføre en mengde av mulige verdener. Vi skal betegne denne mengden med I. Siden de enkelte lukkede formlene i språket L(N) uttrykker utsagn er det nærliggende, semantisk sett, å tenke seg at det finnes en mengde med utsagn U og at denne mengden med utsagn er inkludert i mengden av individer D. Det er også naturlig å tenke seg en funksjon ex som til enhver lukket formel α i L(N) tilordner α et utsagn som er med i U. ex vil da være den funksjonen som til ethver lukket formel α i L(N) tilordner α det utsagnet som α uttrykker. Vi har derfor,om vi betegner de lukkede formlene i L(N) med "CFm(L(N))", at ex: CFm(L(N)) → U. Siden ethvert utsagn som er med i U enten er sant eller usant i enhver verden w som er med i I, må det også finnes en relasjon tr som er inkludert i IxU, og som er slik at <x,y>êTr hvis og bare hvis x er en mulig verden, y er et utsagn og x er en mulig verden der utsagnet y er sant.

Ethvert predikat av grad n vil i enhver mulige verden være sant om visse entiteter og usant om andre. Har man for seg et n-ært predikat P og en mulig verden w vil P være sant om visse n-tupler av individer i verdenen w og usant i verdenen w om alle andre. De n-tupler av individer eller entiteter som et n-ært predikat er sant om i verdenen w kaller vi ekstensjonen til dette predikatet i denne verdenen. Ethvert predikat vil derfor ha en ekstensjon i enhver verden. Det

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

virker derfor rimelig å tenke seg at det finnes en funksjon F som til ethvert n-ært predikat P (n>=1) i L tilordner P en ekstensjonsfunksjon, det vil si en funksjon som tilordner enhver logisk mulig verden w en mengde med n-tupler av individer. Dette vil være de n-tupler som predikatet P er sant om i verdenen w.

Det er noen predikater som fortjener spesiell omtale. blant de predikatene som inngår i L har vi identitetspredikatet. Dette vil være sant om visse objekter a,b i en verden w hvis og bare hvis a er identisk med b. Dette innebærer at ekstensjonsfunksjonen til identitetspredikatet er en funksjon som til enhver verden tilordner den samme mengden av par, nemlig mengden av par av entiteter x,y der x=y. I sintur innebærer dette at ekstensjonen til identitetspredikatet ikke avhenger av hvilken verden man befinner seg i. Er x identisk med y så er x identisk med y i enhver logisk mulig verden. Med andre ord har man at om x er identisk med y så er det logisk nødvendig at x er identisk med y. På tilsvarende vis vil det forholde seg om x og y er entiteter som er distinkte. De vil være distinkte i enhver mulig verden og derfor nødvendigvis distinkte[36].

Vi nevnte ovenfor en spesiell klasse av predikater, nemlig det vi kalte for predikater som uttrykker intensjonale relasjoner. Disse predikatene korresponderer med de intensjonale konstruksjonene vi nevnte ovenfor. Til enhver av disse intensjonale konstruksjonene (i) - (xvii) svarer det et predikat. Er for eksempel k en intensjonal konstruksjon av typen <0,2,2> vil det finnes et predikat P;k av type <0,4,0>. Til for eksempel den intensjonale konstruksjonen "x tror ved tidspunktet t at p" svarer predikatet "x tror ved tidspunktet t at y er et sant utsagn". Dette predikatet vil da være det vi kaller for et predikat som uttrykker en intensjonal relasjn. Etpredikat som uttrykker en intensjonal relasjon vil derfor ha visse variabler som kan ta som verdier ethvert objekt i D og visse variabler som kun tar utsagn som verdier. Det bør bemerkes at et slikt predikat alltid må inneholde en variabel som tar utsagn som verdier. Ser man på predikatet "x tror ved tidspunktet t at y er et sant utsagn" vil "x" og "t" være variabler som har hele D som verdiområde, mens derimot variabeltenet "y" bare tar som verdier elementene i Ut, mengden av utsagn. Den funksjonen som derfor tilordner ethvert predikat i L som uttrykker en intensjonal relasjon en ekstensjonsfunksjon må derfor tilordne et slikt predikat en mengde med n-tupler hvor visse elementer i hvert n-tuple som befinner seg i en viss posisjon alltid er utsagn. Er for eksempel predikatet "x tror ved tidspunktet t at y er et sant utsagn" vil ekstensjonen til dette predikatet i verdenen w være en mengde av tripler <x,t,y> der y alltid er et utsagn. Tilsvarende gjelder for alle de andre predikatene vi har nevnt som svarer til de intensjonale konstruksjonene som inngår i L(N).

Vi kan nå skissere prinsippene for hvordan man kan fastsette sannhetsverdien og referansen for alle lukkede formler og termer i språket L(N). Dette skjer ved induksjon på lengden av lukkede velformede uttrykk, dvs. formler og termer, i L(N). La oss se nærmere på dette.

De korteste lukkede formlene er de atomære formlene i L(N), det vil si formler av typen Pi;1,...,i;n der P er et n-ært predikat og i;1,...,i;n navn I L(N). En slik formel vil være sann i verdenen w hvis og bare hvis <a;1,...,a;n>, der a;i er det objektet navnet i;j er navn på (i=1,..,n) er med i ekstensjonen til predikatet P i w. Valuasjonsreglene for de setningslogiske

36 Vedrørende tesen x=y → Nec(x=y) kan man konsultere Kripke [1]. Det finnes naturligvis en ganske stor litteratur om akkurat dette tema.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

konnektivene er de vanlige. For eksempel vil en formel av typen p&q være sann i verdenen w hvis og bare hvis både p er sann i w og q er sann i verdenen w.

La oss se på kvantorene. En lukket setning i L(N) av typen "For alle x er det slik at α" er sann i verdenen w hvis og bare hvis man har at α;x[i],det vil si den formelen man får når man erstatter alle fri forekomster av "x" med navnet i, er sann i verdenen w for alle navn i L(N). En helt analog regel gjelder for eksistenskvantoren.

Når det gjelder lukkede termer i L(N) er de korteste uttrykkene navnene som i inngår i L(N). Referansen til en slik term er naturligvis objektet som navnet er navn på. Referansen til en bestemt beskrivelse av typen "Det objektet x som er slik at α" i verdenen w er enten det objektet som betegnes av det eneste navnet som satt i for alle fri forekomster av x i α gir som resulatet en formel som er sann i verdenen w, eller så er det objektet * (et objekt som ikke er med i D) om det ikke finnes noe slikt navn. Endelig er referansen til en utsagnsabstraksjons-term "u(α)"i verdenen w det utsagnet som den lukkede formelen p uttrykker. Dette innebærer at referansen til "u(α)" i verdenen w alltid er et element i Ut Inkl D. En slik term vil derfor alltid ha en referanse, og den vil ha den samme referanse i alle verdener.

La oss tilslutt se på sannhetsverdier skal tilordnes formler som inneholder intensjonale konstruksjoner. Anta $ er en intensjonal konstruksjon av typen <0,n,m>. Vi ser på en lukket formel av typen $(t;1,...,t;n,α;1,...,α;m) der t;1,...,t;n er lukkede termer og α;1,....,α;m er lukkede formler i L(N). La oss betegne det predikatet som korresponderer til denne intensjonale konstruksjonen med "F;$". Dette vil være et predikat av typen <0,n+m,0>, altså et n+m'ært predikat der de siste m variabeltegnene i en setning av typen F;$ (x;1,...,x;n,y;1,...,y;m) tar elementer i mengden Ut, det vil si mengden av utsagn, som verdier. En lukket setning av typen $(t;1,...,t;n,α;1,...,α;m) vil da være sann i verdenen w hvis og bare hvis n+m-tuplet <a;1,...,a;n,b;1,...,b;m> der a;i er referansen til termen t;i (i=1,...,n) og b;j er det utsagnet som p;j uttrykker (j=1,..,m) er med i ekstensjonen til predikatet F;$ i verdenen w.

La oss se på noen eksempler for å illustrere denne valuasjonsregelen. Som vårt første eksempel tar vi den intensjonale konstruksjonen "Det er logisk nødvendig at α". Dette er en konstruksjon av typen <0,0,1>. Det tilsvarende predikat er "y er et utsagn som er logisk nødvendig sant". Holder man seg til regelen ovenfor har man at en lukket formel av typen "Det er logisk nødvendig at α" er sann i verdenen w hvis og bare hvis det utsagnet som uttrykkes av formelen α er med i ekstensjonen i verdenen w til predikatet "y er et utsagn som er nødvendig sant".

Vårt andre eksempel er konstruksjonen "x tror ved tidspunktet t at α". Som man husker forkortet vi denne konstruksjonen med "Tror;(x,t)(α)". Det tilsvarende treplasspredikatet forkortet vi med "tror;(x,t)(y)". Dette kan leses "x tror ved tidspunktet t at utsagnet y er sant". Anta at t,t' er lukkede termer i L(N) og at α er en lukket formel. Anta videre at referansene til termene t,t' i verdenen w er hhv. a og b og at u er det utsagnet som uttrykkes av α. Da har vi at setningen Tror;(t,t')(α) er sann i verdenen w hvis og bare hvis triplet <a,b,u> er med i ekstensjonen til predikatet "x tror ved idspunktet t at utsagnet y er sant" i verdenen w, med andre ord hvis og bare hvis u er et utsagn som a ved tidspunktet b tror er sant i verdenen w.

Valuasjonsreglene for de andre intensjonale konstruksjonene vi har nevnt tidligere blir helt analoge med dem vi så langt har formulert. Vi har nå skissert hovedtrekkene i vår semantiske teori for det intensjonale språket L

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Man ser at de følgende størrelser spiller en avgjørende rolle i denne teorien. For det første har vi mengden D som representerer domenet man kvantifiserer over i språket L, med andre ord den mengden av entiteter som variablene i språket L tar som verdier. For det andre har vi mengden av mulige verdener I. For det tredje har vi mengden av utsagn Ut.Siden vi kvantifiserer over utsagn i L har vi antatt at Ut utgjør en delmengde av D. Naturligvis vil, om D er en mengde med "meget høy kardinalitet" også Ut være det samme; dette vil i særdeleshet være tilfelle om vi tenker oss at utsagnene er meget "fint individuert", f.eks. slik at to distinkte lukkede formler i L(N) uttrykker distinkte utsagn. Den fjerde komponenten vi nevnte var sannhetsrelasjonen tr. Siden et utsagn enten er sant eller usant i enhver mulig verden har vi at tr er en relasjon mellom mulige verdener og utsagn, med andre ord har vi at tr Inkl IxUt. Det bør imidlertid noteres at denne relasjonen ikke spiller noen rolle i de valuasjonsreglene for formlene i L(N) som vi har skissert ovenfor. Disse reglene fastsetter under hvilke omstendigheter en lukket formel p i L(N) er sann i en verden w. Vi kan derfor definere tr for de utsagn som uttrykkes av lukkede formler i L(N). Er α en lukket formel i L(N) og w en logisk mulig verden har vi at <w,ex(α)>ê tr hvis og bare hvis α er sann i verdenen w. Dette fastsetter imidlertid tr bare for de utsagnene som kan uttrykkes i L(N). Det er imidlertid intet som apriori utelukker at mengden av utsagn uttømmes av dem som kan uttrykkes i språket forestillt oss her. Det er heller ikke noe i det vi har nevnt som utelukker at det kan finnes talløse utsagn som ikke kan uttrykkes i dette språket eller for den saks skyld i noe språk overhodet.

Vi nevnte en funksjon ovenfor nemlig ex. ex var som man den funksjonen som til enhver lukket formel i L(N), altså enhver formel i αêCFm(L(N), tilordner denne det utsagnet den uttrykker. Vi har derfor at ex: CFm(L(N)) → Ut. Vi skal stanse litt opp ved denne funksjonen.

Tenker man seg altså at språketL utvides med navn på alle objektene i D til språket L(N), slik vi har gjort ovenfor, og begrenser vi oss til å betrakte CFm(L(N)), kan man slik vi har vist tidligere definere minst tre ekvivalensrelasjoner over CFm(L(N):

For det første har vi identitetsrelasjonen over CFm(L(N)). Dette er åpenbart en ekvivalensrelasjon som inndeler CFm(L(N)) i en mengde ikke-tomme, innbyrdes disjunkte ekvvalensklasser som samlet uttømmer CFm((L(N)). Et spesielt trekk ved denne ekvivalensrelasjonen er at hver ekvivalensmengde som er indusert av den inneholder ett og kun ett element.

For det andre har vi den relasjonen som består mellom to formler α,βêCFm(L(N)) hvis og bare hvis setningen "u(α)=u(β)" er sann, det vil si hvis og bare hvis formlene α og β uttrykker det samme utsagn. Det er åpenbart at denne synonymitetsrelasjonen også er en ekvivalensrelasjon.

For det tredje har vi det vi ovenfor kalte for kognitiv synonymitet; med andre ord den relasjonen som består mellom to formler α,βêCFm(L(N)) hvis og bare hvis α og β er nødvendig ekvivalente, det vil si hvis og bare hvis setningen "Nec(α ↔β)" er sann.

La oss betegne disse tre relasjonene over CFm(L(N)) med henholdsvis Id, Syn og kSyn. Det følger umiddelbart fra det vi har vist ovenfor at

(+) Id Inkl Syn Inkl kSyn

Nå finnes det uendelig mange ekvivalensrelasjoner X over CFm(L(N)) som er slik at

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Id Ink X Inkl kSyn.

Som man ser er relasjonen Syn en av disse relasjonene. Et spørsmål som reiser seg i denne forbindelse er om Syn strengt inkluderer Id og samtidig er strengt inkludert i kSyn. Et annet og relatert spørsmål er om det er mulig å definere Syn på en tilfredstillende måte slik at Syn er strengt inkludert i kSyn og Id er strengt inkludert i Syn. I denne forbindelse kan man vise til forskjellige forslag i litteraturen, for eksempel den relasjonen Carnap i sin bok "Meaning and Necessity" kaller for "intensjonal isomorfi". Imidlertid er det vanskelig å se hvordan hvordan Syn kan defineres uten at definisjonsforslagene får et visst preg av å være vilkårlige og ad hoc. Hvis man derfor forkaster at Syn kan strengt inkludere Id og være strengt inkludert i kSyn, men samtidig holder fast ved (+), følger det at Syn enten er identisk med identitetsrelasjonen over CFm(L(N)) eller identisk med kSyn. Siden vi ovenfor argumenterte for at den siste muligheten er utelukket, i og med at en rekke intensjonale konstruksjoner er logisk uigjennomsiktige, gjenstår bare den mulighet at Syn=Id. Dette innebærer at to lukkede formler i L(N) er synonyme hvis og bare hvis de er identiske. Dette synes derfor å være den løsning som er minst vilkårlig og ad hoc.

Hvis man aksepterer denne løsningen kan man slutte at det må finnes en en-entydig korrespondanse mellom formlene i CFm(L(N)) og de utsagnene som lar seg uttrykke ved lukkede formler i L(N). Siden det kan virke rimelig at det vi ovenfor har kalt for utsagn er så fint individuert at to utsagn er distinkte hvis og bare hvis de uttrykkes av distinkte formler i L(N) er det nærliggende å kalle den typen av utsagn vi har hatt i tankene for finstrukturerte utsagn.

I den semantiske teorien som ble skissert ovenfor for språket L er det tre komponenter som må oppfattes som språkuavhengige, det vil si at man kan oppfatte dem som entiteter som eksisterer uavhengig av de enkelte formler, termer etc. som inngår i L. Det dreide seg for det første om mengden av mulige verdener I. De to andre komponentene var mengden av utsagn, Ut, og sannhetsrelasjonen mellom mulige verdener og utsagn, tr. Den siste relasjonen holder mellom en mulig verden w og et finstrukturert utsagn u hvis og bare hvis w er en logisk mulig verden der utsagnet u er sant.

La oss nå forlate språket L og vende tilbake til språket for teorien om utsagn og egenskaper som vi gjorde rede for i forrige paragraf. Dette språket betegnet vi med L;e(Δ;0 U Γ). Hvis man nå ønsker å utvide teorien om utsagn og egenskaper til en teori som også inneholder generelle satser om finstrukturerte utsagn og sannhetsrelasjonen mellom finstrukturerte utsagn og mulige verdener, må man åpenbart utvide vokabularet til språket L;e(Δ;0 U Γ) med nye uttrykksmidler.

Vi innfører først predikatet "x er et finstrukturert utsagn". Dette forkorter vi med "U;f(x)". For å kunne si noe om sannheten til finstrukturerte utsagn innfører vi to-plass predikatet "w er en mulig verden hvor det finstrukturerte utsagnet x er sant". Vi skal bruke "True;f(w,x)" som forkortelse for dette predikatet. Den mengden som bare innholder disse to predikatene betegner vi med Γ;1. Vi ser nå på utvidelsen av språket L;e(Δ;0 U Γ) til L;e(Δ;0 U Γ U Γ;1). Innenfor dette mer uttrykksrike språket kan man nå formulere en lang rekke påstander om finstrukturerte utsagn. Hvis vi nå bare utvider språket

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

til vår teori om utsagn og egenskaper med de to nevnte predikatene og ikke med noen nye grunnsetninger følger det ikke at mengden av finstrukturerte utsagn finnes.
Påstanden kan imidlertid formuleres ved hjelp av predikatene som inngår i L;e(Δ;0 U Γ U Γ;1) og den kan formaliseres slik:

(+) (Ey)(M(y) & (Az)(zêy ↔ U;f(z)).

Nå skulle det være klart at dersom w er en logisk mulig verden der det finstrukturerte utsagnet x er sant så er w en logisk mulig verden og x et finstrukturert utsagn. Dette virker fullstendig opplagt. Påstanden kan formaliseres slik:

(++) True;f(w,x) →. MV(w) & U;f(x)

Siden mengdenav mulige verdener eksisterer og ifølge (+) også mengden av finstrukturerte utsagn eksisterer følger det at relasjonen True;f også eksisterer siden den er inkludert i kryssproduktet av mengden av mulige verdener og mengden av utsagn.

Mengden av alle de mulige verdener hvor det finstrukturerte utsagnet x er sant, med andre ord Mg(w: MV(w) & True;f(w,x)), kaller vi for sannhetsmengden til x. Vi betegner denne mengden med μ;f(x). Siden sannhetsmengden til et finstrukturert utsagn alltid er en delmengde av mengden av mulige verdener følger det at den alltid eksisterer. Man kan imidlertid spørre om det omvendte holder, med andre ord om det er slik for enhver mengde med mulige verdener a at det finnes et finstrukturert utsagn x som har a som sin sannhetsmengde, ie. hvor μ;f(x)=a. Man kan neppe si at denne påstanden er direkte innlysende. Det er neppe mulig å utlede den fra mer innlysende sannheter. Det eneste vi kan anføre til fordel for den for det første at den forenkler vår teori, for det andre at påstanden er helt analog med den grunnsetningen i teorien om presise deskriptive utsagn som vi kalte for "fullstendighetsaksiomet" og for det tredje at det virker eiendommelig å benekte den.

Påstanden kan formaliseres på følgende måte:

(+++) M(y) &(Aw)(wêy → MV(w)) → (Ez)(U;f(z) &
(Aw')(MV(w') → (True;f(w',z) ↔ w'êy)))

Det siste aksiomet vi skal betrakte er et som faktisk impliserer (+++) og derfor er sterkere enn denne påstanden. Denne grunnsetningen sier at dersom a er en vilkårlig mende med mulige verdener finnes det minst tellbart uendelig mange finstrukturerte utsagn x;0, x;1, x;2,.... osv. ad inf. som har a som sin sannhetsmengde. Denne påstanden kan formaliseres slik:

(++++) M(a) &(Aw)(wêa -> MV(w)) →
Cd(Mg(y: U;f(y) & Mg(w:wêI & True;f(w,y))=a)) >= Alef;0

I denne formelen leses uttrykket "Cd(x)" som "kardinaltallet til mengden x". Videre betegner uttrykket "Aleph;0" det første uendelige kardinaltallet i rekken av kardinaltall.

I den neste paragrafen skal vi utvide teorien om utsagn og egenskaper på den måten som vi har antydet her, slik at vi får en mer omfattende teori som også tar i betraktning finstrukturerte utsagn. Vi skal også der gi en litt mer utførlig drøftelse av de grunnsetningene som vi har antydet ovenfor, nemlig (+) - (++++).

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

La oss oppsummere det vi har gjort i denne paragrafen. For det første har vi ønsket å gjøre rede for en rekke syntaktiske begreper som er grunnleggende i forbindelse med språk. Vi har derfor gjort rede for hva vi forstår med uttrykk, variabeltegn og språklige konstruksjoner. Som man ser fra det vi har nevnt har nevnt ovenfor kan noen uttrykk regnes som velformede. Innenfor mengden av de velformede uttrykk har vi to hovedkategorier, nemlig termer og formler. I forbindelse med termer og formler sondret vi så mellom termdannende konstruksjoner og formeldannende konstruksjoner. En konstruksjon som virker på m variabeltegn, n termer og m formler og gir som resultat
en formel kalte vi for en formeldannende konstruksjon av type <m,n,p>. Tilsvarende for termdannende konstruksjoner.

For det andre har vi ovenfor ønsket å definere så klart som mulig hva som menes med ekstensjonale, intensjonale og logisk uigennomsiktige konstruksjoner slik at dette fremstår tydelig for leseren. I denne sammenheng har vi også forklart hva skillet mellom intensjonale og ekstensjonale språk.

For det tredje har vi ønsket å vise at de epistemiske konstruksjonene ikke bare er intensjonale, men også det vi har kalt logisk ugjennomsiktige, og at dette ikke er et tilfeldig trekk ved dem, men et nødvendig trekk. Dette innebærer at det som er objektet for tro, viten og en lang rekke andre intensjonale relasjoner, er en art entiteter som er langt finere individuert enn det som vi i forrige paragraf kalte for presise deskriptive utsagn. Vi kalte denne nye typen av entiteter for finstrukturerte utsagn. Hensikten med det vi har skrevet i denne paragrafen har derfor vært å vise at det er nødvendig å akseptere eksistensen finstrukturerte utsagn om man skal noe håp om å bygge opp en tilfredstillende teori om erkjennelse og tenkning.

§1.2 Teorien om utsagn og egenskaper utvidet med en teori om finstrukturerte utsagn

Som vi nevnte tidligere er det neppe rimelig å betrakte relasjonen "y beskriver et forhold som x tror foreligger" som en relasjon mellom et individ x og et presist deskriptivt utsagn y. Dette er av den følgende enkle grunn. Anta at α og β er to setninger som er logisk ekvivalente, men at det samtidig ikke er lett å se at de er ekvivalente. Man kan anta at dette krever et langt og innviklet bevis. Det skulle da ikke være vanskelig å forestille seg en situasjon der en person x tror at α er tilfelle, men ikke tror at β er tilfelle. Dette innebærer at i en setning av typen "x tror at α" kan ikke termen "at α" betegne et presist deskriptivt utsagn. For i så tilfelle ville termene "at α" og "at β" betegne nøyaktig det samme utsagn når α og β er logisk sett ekvivalente. Dette ville i sin tur innbære at man fra en setning av typen "x tror at α" kunne slutte setningen "x tror at β" om α og β var logisk ekvivalente. Imidlertid viser eksemplet ovenfor at dette ikke er tilfelle. Vi skal kalle den typen entiteter som uttrykk av typen "at α" er navn på når de forekommer i kontekster av typen "x tror at α", "x ser at α" eller "x vet at α" for finstrukturerte utsagn.

For å kunne formulere en teori om denne typen objekter utvider språket L;e(Δ;0 U Γ) med de følgende predikater:

"x er et finstrukturert utsagn"	"U;f(x)"
"w er en verden hvor det finstrukturerte utsagnet x er sant"	"True;f(w,x)"

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Man ser fra dette at vi bruker uttrykket "U;f(x)" som forkortelse for det monadiske predikatet "x er et finstrukturert utsagn", og at vi bruker uttrykket "True;f(w,x)" som forkortelse for det lengere binære predikatet " w er en verden hvor det finstrukturerte utsagnet x er sant".

Betegner vi mengden som inneholder disse to predikatene med "Γ;1" er det språket vi nå betrakter L;e(Δ;0 U Γ U Γ;1). I dette mer omfattende språket betrakter vi de følgende formler som i visse henseende er analoge med de grunnsetningene om utsagn, U1 - U4, som vi omtalte tidligere:

FU1	True;f(w,x) → MV(w) & U;f(x)
FU2	M(x) & (Ay)(yêx → MV(y)) → (Ey)(U;f(y) & (Aw)(MV(w) →(True;f(w,y) ↔ wêx)))
FU3	(Ey)(M(y) & (Az)(zêy ↔ U;f(z)))
FU4	xêPt(I) → Cd(Mg(y: U;f(y) & Mg(w:wêI & True;f(w,y))=x)) >= Alef;0

La oss gjøre rede for hva formlene FU1 - FU4 uttrykker. Formelen FU1 sier ikke noe annet enn at dersom w er en verden hvor det finstrukturerte utsagnet x er sant så er w en logisk mulig verden og x et finstrukturert utsagn. Dette skulle neppe overraske noen.

La oss kalle mengden av alle de logisk mulige verdenene hvor det finstrukturerte utsagnet x er sant for sannetsmengden til x. Holder man seg til denne definisjonen sier formelen FU2 at dersom x er en mengde med logisk mulige verdener så finnes det alltid et finstrukturert utsagn hvis sannhetsmengde er denne mengden x.

FU3 uttrykker at det finnes en mengde hvis elementer er nøyaktig de og bare de entiteter som er finstrukturerte utsagn, kort sagt at mengden av finstrukturerte utsagn finnes.

Når det gjelder FU4 bemerkes først at uttrykket "Cd(x)" leses "kardinaltallet til mengden x". Videre betegner "Alef;0" det første uendelige kardinaltall i rekken av kardinaltall. Det FU4 uttrykker er derfor at dersom x er en mengde med mulige verdener så er kardinaltallet til mengden av alle de finstrukturerte utsagn som har x som sin sannhetsmengde større eller lik det første uendelige kardinalltall. Dette innebærer ikke noe annet enn at mengden av alle de fintrukturerte utsagn hvis sannhetsmengde er x er minst tellbart uendelig om x er en mengde med mulige verdener.

Før vi går videre finner vi det hensiktsmessig å definere en del begreper som vi vil bruke svært ofte i det følgende. Mengden av alle par <w,x> der w er en mulig verden, x er et finstrukturert utsagn og hvor w er en mulig verden der det finstrukturerte utsagnet x er sant, med andre ord Mg(<w,x>: MV(w) & U;f(x) & True;f(w,x)), er naturligvis en relasjon. Vi skal kalle denne relasjonen for sannhetsrelasjonen for finstrukturerte utsagn og vi betegner den med " ⊨;f". På basis av aksiomene FU1 - FU4, U1 -U4 og de rent mengdeteoretiske aksiomene er det lett å vise at denne mengden faktisk finnes.

Selve mengden av de finstrukturerte utsagn vil vi betegne med U;f. Vi setter altså U;f= Mg(x: U;f(x)). Strengt tatt gjør dette uttrykket "U;f" flertydig, siden det i noen sammenhenger vil opptre som et monadisk predikat, mens de i andre sammenhenger som for eksempel "xêU;f" opptrer som en singulær term. Denne flertydigheten synes imidlertid å være temmelig harmløs fordi det i de aller fleste tilfelle vil være helt åpenbart fra sammenhengen hva som menes. Det sparer oss også for bryderiet å innføre et eget symbol, for eksempel "U;f*" for å betegne mengden av finstrukturerte utsagn.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Er x et finstrukturert utsagn skal vi også i det følgende bruke "μ;f(x)" for å betegne mengden av alle de mulige verdenene hvor dette utsagnet x er sant, med andre ord er μ;f(x) identisk med Mg(w: True;f(x,y)). Strengt tatt er μ;f en funksjon nemlig den funksjonen som til ethvert finstrukturert utsagn tilordner dette Mg(w: True;f(x,y)). Det bør understrekes at denne funksjonen er forskjellig fra funksjonen μ som tilordner ethvert *utsagn* x sannhetsmengden til x, det vil si Mg(w: True(w,x)).

Man kan sammenfatte de bemerkningene vi her har kommet med i den følgende definisjon:

Definisjon 1.2.1 :
(i) ⊨;f = Mg(<x,y>: MV(x) & U;f(y) & True;f(x,y))
(ii) U;f = Mg(x: U;f(x))
(iii) μ;f = Mg(<x, Mg(w: True;f(w,x))>: xêU;f)

Vi kan nå gi en presis definisjon av den teorien vi så langt har beskrevet. La oss betegne mengden av formler i L;e(Δ;0UΓ UΓ;1) som innholder lukningene av formlene FU1 - FU4 og bare dem med "θ;2". Da er den teorien vi så langt har akkumulert

ZFCu(L;e(Δ;0UΓ UΓ;1))[θ;0 U θ;1 Uθ;2]

I det følgende finner vi det hensiktsmessig å bruke et mindre teknisk og mer "litterært" navn på denne teorien og vi vil henvise til denne teorien som "teorien om presise deskriptive utsagn, finstrukturerte utsagn og egenskaper" eller kortere som "teorien om utsagn og egenskaper".

§1.3 Noen enkle satser som belyser forholdet mellom utsagn og finstrukturerte utsagn.

Vi skal i dette avsnittet, og også de to neste avsnittene, bevise endel temmelig enkle satser som belyser forholdet mellom presise deskriptive utsagn og det vi ovenfor har kalt for finstrukturerte utsagn. Dernest skal vi i det neste kapitlet definere en type strukturer som vi kaller begrepsrammer og se nærmere på hvordan de lukkede formlene bestemt av en begrepsramme kan brukes til å representere de finstrukturerte utsagn. Gitt en begrepsramme der de lukkede formlene bestemt av rammen representerer de finstrukturerte utsagnene kan man så og si se "strukturen" til de finstrukturerte utsagn tydligere. Dette er av viktighet siden vi ikke kan si noe nærmere om "den indre struktur" til de diverse elementene i mengden U;f på grunnlag av aksiomene FU1 - FU4 alene.

Man ser at aksiomene FU1 - FU4 ikke angir noe identitetskriterium for finstrukturerte utsagn i likhet med det som U3 gir for utsagn. Det er imidlertid mulig å definere en ekvivalensrelasjon over U;f som inndeler feltet av finstrukturerte utsagn i en samling av innbyrdes eksklusive, ikke-tomme ekvivalensmengder som samlet uttømmer U;f. Vi har:

Teorem 1.3.1: Definer e Inkl U;fxU;f ved e(x,y) ↔ μ;f(x)=μ;f(y) om x,yêU;f.
Sett per definisjon: [x];e = Mg(y: yêU:f & e(y,x)) og definer tilslutt E(U;f) ved
E(U;f) = Mg([x];e : xêU;f)
Under disse forutsetningene har man:
(i) (Ax)(xêU;f → e(x,x))

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(ii) $(Ax)(Ay)(x,y\hat{e}U;f \rightarrow (e(x,y) \rightarrow e(y,x)))$
(iii) $(Ax)(Ay)(Az)(x,y,z\hat{e}U;f \rightarrow (e(x,y) \,\&\, e(y,z) \rightarrow e(x,z)))$

Videre:

(iv) $(Aa)(a\hat{e}E(U;f) \rightarrow a\neq\emptyset)$
(v) $(Aa)(Ab)(a,b\hat{e}E(U;f) \rightarrow a\neq b \rightarrow a\Omega b =\emptyset)$
(vi) $U;f = UN(E(U;f))$

Bevis: Beviset er enkelt og overlates til leseren. **QED**.

Det er også mulig å vise at det finnes en en-entydig avbildning φ som avbilder mengden av delmengder av I en-entydig og *på* mengden av de ekvivalensmengdene vi definerte i forrige teorem. φ er dessuten slik at $(Ax)(x\hat{e}Pt(I) \rightarrow (Ay)(y\hat{e}\varphi(x) \rightarrow \mu;f(y)=x))$.

Teorem 1.3.2: Definer e Inkl U;fxU;f ved $e(x,y) \leftrightarrow \mu;f(x)=\mu;f(y)$ om $x,y\hat{e}U;f$.
Sett per definisjon: $[x];e = Mg(y: y\hat{e}U:f \,\&\, e(y,x))$ og definer $E(U;f)$ ved
$E(U;f) = Mg([x];e : x\hat{e}U;f)$
Definer funksjonen φ slik: $\varphi= Mg(<x, Mg(y: y\hat{e}U;f \,\&\, \mu;f(y)=x)>: x\hat{e}Pt(I))$
Under disse forutsetningene har man:

(i) $\varphi: Pt(I)$ -(1-1,på) $\rightarrow E(U;f)$
(ii) $(Ax)(x\hat{e}Pt(I) \rightarrow (Ay)(y\hat{e}\varphi(x) \rightarrow \mu;f(y)=x))$
(iii) $(Ax)(x\hat{e}Pt(I) \rightarrow \varphi(x) \neq\emptyset$
(iv) $(Ax)(Ay)(x,y\hat{e}Pt(I) \rightarrow. x\neq y \rightarrow \varphi(x)\Omega\varphi(y) = \emptyset)$
(v) $UN/x\hat{e}Pt(I)/(\varphi(x)) =U;f$

Bevis: Beviset for denne satsen er også relativt enkelt og overlates derfor til leseren. **QED**.

På samme måte som vi ovenfor definerte μ;f er operasjonen μ definert nemlig ved $\mu = Mg(<x, Mg(w: True(w,x))>: x\hat{e}U)$. På basis av identitetsaksiomet U3 for utsagn og aksiomet U4, som vi skal kalle fullstendighetsaksiomet for utsagn, kan man lett vise at μ avbilder mengden av utsagn en-entydig og på mengden av delmengder av I. Dette innebærer også at det også er en korrelasjon mellom mengden av utsagn og de ekvivalensmengder av finstrukturerte utsagn som vi har definert i de to foregående satser. Den følgende sats belyser sammenhengen og forsåvidt analog med den foregående sats:

Teorem 1.3.3: Definer e Inkl U;fxU;f ved $e(x,y) \leftrightarrow \mu;f(x)=\mu;f(y)$ om $x,y\hat{e}U;f$.
Sett per definisjon: $[x];e = Mg(y: y\hat{e}U:f \,\&\, e(y,x))$ og definer $E(U;f)$ ved
$E(U;f) = Mg([x];e : x\hat{e}U;f)$
Definer funksjonen g slik: $g= Mg(<x, Mg(y: y\hat{e}U;f \,\&\, \mu;f(y)=\mu(x))>: x\hat{e}U)$
Under disse forutsetningene har man:

(i) $g: U$ -(1-1,på) $\rightarrow E(U;f)$
(ii) $(Ax)(x\hat{e}U \rightarrow (Ay)(y\hat{e}g(x) \rightarrow \mu;f(y)=\mu(x)))$
(iii) $(Ax)(x\hat{e}U \rightarrow g(x) \neq\emptyset$
(iv) $(Ax)(Ay)(x,y\hat{e}U \rightarrow. x\neq y \rightarrow g(x)\Omega g(y) = \emptyset)$
(v) $UN/x\hat{e}U/(g(x)) =U;f$

Bevis: Beviset for denne satsen er også relativt enkelt og overlates derfor til leseren. **QED**.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

I forbindelse med presise deskriptive utsagn er det mulig å innføre en rekke operasjoner på utsagn som svarer til de vanlige setningslogiske konnektivene i setningslogikken. Er x og y utsagn vil xΩy være det utsagnet hvis sannhetsmengde er snittet av sannhetsmengdene til x og y. Videre vil xUy være utsagnet hvis sannhetsmengde er unionen av sannhetsmengdene til x og y. Vi kaller xΩy for konjunksjonen av utsagnene x og y. xUy kaller vi for disjunksjonen av utsagnene x og y. Det utsagnet hvis sannhetsmengde er komplementet til sannhetsmengden til x med hensyn på I, mengden av mulige verdener, kaller vi for negasjonen av x og vi skal her betegne det med "~x". Kondisjonalutsagnet som har utsagnet x som antesedent og utsagnet y som konsekvent betegner vi med "x=>y" og definerer det som det utsagnet hvis sannhetsmengde er unionen av sannhetsmengden til negasjonen av x og y. Endelig definerer vi bikondisjonalutsagnet som har utsagnet x som venstre og utsagnet y som høyre komponent, vi betegner det med "x <=>y", som det utsagn hvis sannhetsmengde er snittet av sannhetsmengdene til utsagnene x=>y og y=>x. Vi kan sammenfatte disse definisjonene formelt slik:

Definisjon 1.3.1 : Anta α,βêU. Da setter vi:

(i) $\alpha \Rightarrow \beta = \mu;\text{-}1(Mg(w: w\hat{e}I \ \& \ (w\hat{e}\mu(\alpha) \rightarrow w\hat{e}\mu(\beta))))$

(ii) $\alpha \Leftrightarrow \beta = \mu;\text{-}1(Mg(w: w\hat{e}I \ \& \ (w\hat{e}\mu(\alpha) \leftrightarrow w\hat{e}\mu(\beta))))$

(iii) $\alpha \cup \beta = \mu;\text{-}1(Mg(w: w\hat{e}I \ \& \ (w\hat{e}\mu(\alpha) \vee w\hat{e}\mu(\beta))))$

(iv) $\alpha \Omega \beta = \mu;\text{-}1(Mg(w: w\hat{e}I \ \& \ (w\hat{e}\mu(\alpha) \ \& \ w\hat{e}\mu(\beta))))$

(v) $\sim \alpha = \mu;\text{-}1(Mg(w: w\hat{e}I \ \& \ \neg(w\hat{e}\mu(\alpha))))$

Man ser lett at mengden av utsagn U er lukket under disse operasjonene på utsagn som vi nettopp har definert. Dette er innholdet i det følgende teorem:

Teorem 1.3.4: Følgende holder:

(i) $\alpha\hat{e}U \rightarrow \sim \alpha\hat{e}U$

(ii) $\alpha,\beta\ \hat{e}U \rightarrow \alpha\Omega\beta\ \hat{e}U$

(iii) $\alpha,\beta\ \hat{e}U \rightarrow \alpha U\beta\ \hat{e}U$

(iv) $\alpha,\beta\hat{e}U \rightarrow \alpha \Rightarrow \beta\ \hat{e}U$

(v) $\alpha,\beta\hat{e}U \rightarrow \alpha \Leftrightarrow \beta\hat{e}U$

Bevis: Også beviset for denne sats er enkelt. Det overlates derfor til leseren. **QED**.

Det er to utsagn som fortjener spesiell oppmerksomhet i teorien om presise deskriptive utsagn. På den ene side har vi det utsagn hvis sannhetsmengde er tom. Siden øêPt(I) må det ifølge utsagnsteorien eksistere ett og bare ett utsagn x der vi har at μ(x)=ø. Dette utsagnet kaller vi for det kontradiktoriske utsagn. Vi skal betegne det med "k". Man har derfor per definisjon at $k = \mu;\text{-}1(ø)$.

På den annen side vil det ifølge utsagnsteorien også finnes nøyaktig ett utsagn som er sant i alle mulige verdener, med andre ord et utsagn hvis sannhetsmengde er I. Dette utsagn skal vi kalle for det nødvendig sanne utsagn. Vi betegner det med t. Man har derfor per definisjon at $t = \mu;\text{-}1(I)$. I det følgende skal vi bruke uttrykket " ⊨α" som forkortelse for "utsagnet α er nødvendig sant". Den formelle definisjonen er den følgende:

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Definisjon 1.3.2.
$\models \alpha \quad \leftrightarrow \alpha = \mu;\text{-}1(I)$

Den følgende sats uttrykker at et utsagn er nødvendig sannt hvis og bare hvis det er sant i enhver logisk mulig verden. Det er naturligvis en helt triviell følge av den definisjonen vi har gitt. Den uttrykker også dersom to utsagn α og β er nødvendig sanne er de identiske:

Teorem: 1.3.5 Anta $\alpha,\beta \hat{e} U$. Da har man:
(i) $\models \alpha \leftrightarrow (Aw)(w \hat{e} I \rightarrow True(w,\alpha))$
(ii) $\models \alpha \ \& \ \models \beta \rightarrow \alpha=\beta$.

For ytterligere å belyse egenskapende til predikatet " $\models$ " nevner vi den følgende sats som det er meget lett å se at holder:

Teorem 1.3.6 Anta $\alpha,\beta,\gamma \hat{e} U$ Da gjelder følgende:
(i) $\models \alpha \ \& \ \models \alpha => \beta \rightarrow \models \beta$
(ii) $\models (\alpha => (\beta => \gamma) => (\alpha => \beta) => (\alpha => \gamma)$
(iii) $\models (\sim \beta => \sim \alpha). => (\alpha => \beta)$
(iv) $\models \alpha => (\beta => \alpha)$
(v) $\models \alpha U \beta <=> (\sim \alpha) => \beta$
(vi) $\models \alpha <=> \beta <=> (\alpha => \beta) \Omega (\beta => \alpha)$
(vii) $\models \alpha \Omega \beta <=> \sim ((\sim \alpha) U (\sim (\beta))$

Bevis: Beviset for satsen er likefrem og overlates til leseren. **QED**.

Man gjenkjenner i (i) - (vii) et standard aksiomsett for setningslogikken. (i) er naturligvis korrelatet til modus ponens.

Vi nevnte ovenfor at μ er en funksjon som avbilder U en-entydig og på Pt(I). Dette er i og for seg viktig nok, men man kan finne uendelig mange en-entydige avbildninger av U på Pt(I). Det viktige ved μ er at den bevarer strukturen mellom utsagnene i U og delmengdene av I, med andre ord at μ er en isomorfi mellom U og Pt(I). Dette er innholdet i den følgende sats:

Teorem 1.3.7 Anta $x,y \hat{e} U$ Da har man:
(i) $\mu: U \text{-}(1\text{-}1,på)\rightarrow Pt(I)$
(ii) $\mu(x \Omega y) = \mu(x) \Omega \mu(y)$
(iii) $\mu(xUy) = \mu(x) \ U \ \mu(y)$
(iv) $\mu(\sim x) = I - c(\mu(x))$
(v) $\mu(x=>y)=I \leftrightarrow \mu(x) \ Inkl \ \mu(y)$
(vi) $\mu(<=>y)=I \leftrightarrow \mu(x) = \mu(y)$

Bevis: Igjen er beviset så enkelt at det kan overlates til leseren. **QED**.

Vi noterer at det ikke er mulig å bevise noe analogt teorem for finstrukturerte utsagn. Grunnen er at man ikke uten videre kan definere noe for finstrukturerte utsagn som er analogt med

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

operasjonene konjunksjon, disjunksjon, bikondisjonal, kondisjonal, negasjon og bikondisjonal mellom utsagn. Det er av denne grunn at vi senere vil innføre det vi kaller begrepsrammer og hva vi forstår med de lukkede formlene bestemt av en begrepsramme. De lukkede formlene assosiert med en begrepsramme kan da under visse forutsetninger sies å representere de finstrukturerte utsagn.

§1.4 Deduktivt lukkede utsagnsmengder og relaterte begreper

I dette avsnittet skal det gjøres rede for endel begreper som hører hjemme i utsagnsteorien. Det er nødvendig å gjøre rede for disse begrepene fordi de vi vil benytte dem senere i forbindelse med den kunnskapsteorien vi skal studere.

Vi skal først gjøre rede for begrepene logisk konsekvens, deduktivt lukket utsagnsmengde, konsistent utsagnsmengde, utsagnsmengde som er lukket under konjunksjon og utsagnsmengde som inneholder alle nødvendig sanne utsagn i forbindelse med finstrukturerte utsagn. Etter dette skal vi se på de tilsvarende begreper i forbindelse med presise deskritive utsagn og påpeke noen relativt enkle sammenhenger mellom dem. Det bør påpekes at de begrepene som innføres, tidligere har blitt definert i forbindelse med presise deskriptive utsagn i Rognes [5]. I dette skrift har vi også ganske utførlig undersøkt sammenhengen mellom dem.

La oss først på peke forskjellen mellom funksjonen $\mu;f$ og μ. For det første er domenet til $\mu;f$ mengden av finstrukturerte utsagn, mens domenet til funksjonen μ er mengden av utsagn. For det andre er $\mu;f$ en mange-til-en funksjon. To finstrukturerte utsagn x,y som er forskjellige kan i en rekke tilfelle ha den samme sanhhetsmengde, det vi si at $\mu;f(x)=\mu;f(y)$. Dette er ikke tilfelle med funksjonen μ. Denne er en-entydig. To distinkte utsagn har alltid forskjellig sannhetsmengde og identiske utsagn har den samme sannhetsmengde.

Anta nå at x,y er to finstrukturerte utsagn og at $\mu;f(y)$ Inkl $\mu;f(x)$. Dette innebærer at enhver verden der det finstrukturerte utsagnet y er sant også er en verden der utsagnet x er sant. Med andre ord finnes det ingen verden der det finstrukturerte utsagnet y er sant, men der x er usant. Under disse omstendigheter virker det nærliggende å si at utsagnet x er en logisk konsekvens av y. Omvendt, er det finstrukturerte utsagnet x en logisk konsekvens av utsagnet y synes det umulig at det skulle finnes noen mulig verden der y er sant og x er usant.

Anta nå at Δ er en mengde med finstrukturerte utsagn og at x er et finstrukturert utsagn. Har man da at enhver verden hvor alle de finstrukturerte utsagnene i Δ er sanne også er en verden der utsagnet x er sant virker det rimelig å si at det finstrukturerte utsagn x er en logisk konsekvens av utsagnene i Δ. Det omvendte virker også rimelig.

Vi bruker uttrykket "LK;f(x,y)" som forkortelse for uttrykket "Det finstrukturerte utsagnet x er en logisk konsekvens av det finstrukturerte utsagn y". Tilsvarende bruker vi "LKm;f(x,Δ)" som forkortelse for "Det finstrukturerte utsagnet x er en logisk konsekvens av utsagnene i mengden Δ". Disse to uttrykkene kan formelt defineres slik:

Definisjon 1.4.1

(a) $\mathrm{LK};f(x,y) \leftrightarrow x,y \hat{e} \mathrm{U};f \,\&\, \mu;f(y)$ Inkl $\mu;f(x)$

(b) $\mathrm{LKm};f(x,\Delta) \leftrightarrow .\ \Delta$ Inkl $\mathrm{U};f \,\&\, y \hat{e} \mathrm{U};f \,\&$
$(Aw)(w \hat{e} I \,\&\, (Ax)(x \hat{e} \Delta \rightarrow w \models;f\, x) \rightarrow w \models;f\, y)$

Det er også endel andre begreper som det er av interesse å ta opp i denne forbindelse. Vi sier at en mengde av finstrukturete utsagn Δ er lukket under logisk konsekvens, i symboler

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

"CL;f(Δ)", hvis og bare hvis man har at dersom men mengde med finstrukturerte utsagn Γ er inkludert i Δ og y er et finstrukturert utsagn som er en logisk konsekvens av Γ så er også y med i Δ. Videre sier vi at en mengde med finstrukturerte utsagn er konsistent, i symboler "Cons;f(Δ)", hvis og bare hvis det ikke finnes noen finstrukturerte utsagn x,y som er med i Δ der man har at sannhetsmengden til x er identisk med komplementet til sannhetsmengden til y mhp. mengden av mulige verdener. Dette er ekvivalent med å si at det ikke finnes noen mulig verden der alle de finstrukturerte utsagnene i Δ er sanne.

En mengde Δ med finstrukturerte utsagn sies å være lukket under konjunksjon, Kon;f(Δ), om man har for alle x,yêΔ at dersom z er et finstrukturt hvor sannhetsmengden er identisk med snittet av sanhetsmengdene til x og y så er også z med i Δ.

En mengde av finstrukturerte utsagn Δ sies å inneholde alle logiske sannheter,i symboler LS;f(Δ) hvis og bare hvis ethvert utsagn x viss sannhetsmengde er mengden av alle mulige verdener, ie I, er med i Δ.

Endelig sier vi at en mengde Δ med finstrukturerte utsagn er rasjonelt organisert, i symboler Rasj;f(Δ) hvis og bare hvis den er lukket under logisk konsekvens, er konsistent, er lukket under konjunksjon og inneholder alle logiske sannheter.

Disse definisjonene kan sammenfattes slik:

Definisjon 1.4.2: Forutsett at ΔêPt(U;f). Da setter vi:

(i) $CL;f(\Delta) \leftrightarrow (A\alpha)(A\Gamma)(\alpha \hat{e} U;f \,\&\, \Gamma Inkl\ \Delta \,\&\, LKm;f(\alpha,\Gamma) . \rightarrow \alpha \hat{e} \Delta)$

(ii) $Cons;f(\Delta) \leftrightarrow \sim(E\alpha)(E\beta)(\alpha,\beta \hat{e} \Delta \,\&\, \mu;f(\alpha) = I\text{-}\ \mu;f(\beta))$

(iii) $Kon;f(\Delta) \leftrightarrow (A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} U;f \,\&\, \alpha,\beta \hat{e} \Delta \rightarrow (A\gamma)(\gamma \hat{e} U;f \,\&\, \mu;f(\gamma) = \mu;f(\alpha) \Omega \mu;f(\beta) \rightarrow \gamma \hat{e} \Delta))$

(iv) $LS;f(\Delta) \leftrightarrow (A\alpha)(\alpha \hat{e}\ U;f \,\&\, \mu;f(\alpha) = I \rightarrow \alpha \hat{e}\ \Delta)$

(v) $Rasj;f(\Delta) \leftrightarrow (CL;f(\Delta) \,\&\, Cons;f(\Delta) \,\&\, Kon;f(\Delta) \,\&\, LS;f(\Delta))$

La oss nå se på hvordan de begrepene vi har definert ovenfor for finstrukturerte utsagn kan defineres på en tilsvarende måte for utsagn. En mengde med presise deskriptive utsagn Δ kalles for lukket under logisk konsekvens, i symboler "CL(Δ)", hvis og bare hvis et hvert utsagn x som er en logisk konsekvens av en delmengde av utsagn som er inkludert i Δ selv er med i Δ. Et utsagn x er en logisk konsekvens av en mengde med utsagn Γ hvis og bare hvis sannhetsmengden til snittet av sannhetsmengdene til utsagnene i Γ er inkludert i sannhetsmengden til x, med andre ord hvis og bare hvis $I\Omega SN(Mg(\mu(x):x\hat{e}\Gamma))$ Inkl μ(x). Vi bruker uttrykket "LKm(x,Γ)" som forkortelse for uttrykket "utsagnet x er en logisk konsekvens av utsagnene i mengden Γ".

At en utsagnsmengde Δ er konsistent, Cons(Δ), innebærer at det ikke finnes noe utsagn y som er slik at konjunksjonen konjunksjonen av y og negasjonen av y er med i Δ.

At Δ er lukket under konjunksjon, med andre ord at Kon(Δ), vil si at dersom utsagnene x og y er med i Δ er også konjunksjonen av dem med.

At Δ inneholder enhver logisk sannhet, det vil si LS(Δ) innebærer at ethvert utsagn som er sant i enhver mulig verden er med i Δ. Siden det bare er nøyaktig ett utsagn som er sant i enhver mulig verden, nemlig det nødvendig sanne utsagn, er det ekvivalent med å si at det nødvendige sanne utsagn er med i Δ.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Endelig sies en mengde med presise deskriptive utsagn å være rasjonelt organisert i symboler "Rasj(Δ)", hvis og bare hvis den er lukket under logisk konsekvens, er konsistent, er lukket under konjunksjon og inneholder alle logiske sannheter.

De definisjonene vi her har gitt kan sammenfattes slik:

Definisjon 1.4.3: Forutsett at ΔêPt(U). Da setter vi:

(i) CL(Δ) ↔ (Aα)(AΓ)(αêU& Γ Inkl Δ & & LK;m(α,Γ). → αêΔ)
(ii) Cons(Δ) ↔ (Aα)(αêU → ~((αΩ~α)êΔ))
(iii) Kon(Δ) ↔ (Aα)(Aβ)(α,bêU → (α,βêΔ ↔ αΩβêΔ))
(iv) LS(Δ) ↔ (Aα)(αêU & I Inkl μ(α) → αê Δ)
(v) Rasj(Δ) ↔ (CL(Δ) & Cons(Δ) & Kon(Δ) & LS(Δ))

Når det gjelder definisjonen av rasjonelt organisert utsagnsmengde bemerker vi at det siste kravet impliserer at en slik utsagnsmengde alltid er ikke-tom. Hvis en ikke-tom utsagnsmengde er rasjonelt organisert vil imidlertid kravet om den er lukket under logisk konsekvens nødvendigvis implisere at den også inneholder det nødvendige utsagn. Likeledes vil dette kravet implisere at den er lukket under konjunksjon. Man kan derfor si at en rasjonelt organisert mengde av presise deskriptive utsagn er det samme som en konsistent, ikke-tom utsagnsmengde som er lukket under logisk konsekvens.

§1.5 Noen teoremer om rasjonelt organiserte mengder av utsagn.

Anta Δ er en mengde med finstrukturerte utsagn som er lukket under logisk konsekvens. La oss definere Δ* som mengden av de presise deskriptive utsagn x hvor sannhetsmengden til x er identisk med den til et eller annet finstrukturert utsagn i Δ. Under disse forutsetninger sier det følgende teorem at Δ er en rasjonelt organisert mengde av finstrukturerte utsagn hvis og bare hvis Δ er en rasjonelt organisert mengde av deskriptive utsagn:

Teorem 1.5.1 Anta Δ Inkl U;f &CL;f(Δ) . Definer

Δ* = Mg(x: xêU & (Ey)(yêΔ & μ;f(y) = μ(x)))

Da har man at Rasj(Δ*)↔ Rasj;f(Δ)

Bevis: Anta (1) Δ Inkl U;f &CL;f(Δ) og

(2) Δ* = Mg(x: xêU & (Ey)(yêΔ & μ;f(y) = μ(x)))

(a) Anta (3) Rasj(Δ*). Vi ønsker å vise at Rasj;f(Δ).

(i) La oss først vise at CL;f(Δ). Dette følger imidlertid trivielt fra (1).

(ii) Vi må dernest vise Cons;f(Δ), med andre ord at

(4) ~(Eα)(Eβ)(α,βêΔ & μ;f(α) = I- μ;f(β))

Anta for reduktio ad absurdum at det finnes α,βêΔ slik at μ;f(α) = I- μ;f(β). Da har vi μ;f(α) Inkl I & μ;f(β) Inkl I og μ;f(α)Ωμ;f(β)=ø & μ;f(α)Uμ;f(β)=I. Fra dette følger at det finnes x,yêU slik at (5) μ(x) =μ;f(α) & μ(y)=μ;f(β). Siden Rasj(Δ*) har vi Cons(Δ*) og derfor fra definisjonen av Cons at at (Aα)(αêU → ¬((αΩ¬α)êΔ*)). Siden xêU har vi da at (6) ¬((xΩ¬x)êΔ*). Fra (5) har vi imidlertid i lys av (2) at xêΔ*. Videre har vi ved hjelp av (5) og det at μ;f(α)=I-μ;f(β) at μ(x)=I-μ(y). Fra dette kan vi slutte at y= ~x. Fra aksiomene om finstrukturerte utsagn og det at μ;f(α)Ωμ;f(β)=ø Inkl I følger det at det finnes noe γêU;f

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

slik at μ;f(γ)=ø. Da har vi μ;f(α)Ωμ;f(β)=ø Inkl ø Inkl μ;f(γ) og derfor siden CL;f(Δ) & α,βêΔ at γêΔ. Nå har vi videre at μ(xΩ~x)= μ(xΩy)= ø=μ;f(γ). Det følger at xΩ~xêΔ*. Men dette strider mot (6). Det følger at (4) holder. Vi har dermed vist Cons;f(Δ)

(iii) La oss så vise at Kon;f(Δ) det vil si at

(7) (Aα)(Aβ)(α,βêU;f & α,βêΔ → (Aγ)(γêU;f & μ;f(γ) = μ;f(α)Ωμ;f(β) → γêΔ))

Anta derfor (8) α,βêU;f & α,βêΔ &γêU;f & μ;f(γ) = μ;f(α)Ωμ;f(β) for vilkårlige α,β,γ. Da har vi at det må finnes x,yêU slik at (9) μ(x)=μ;f(α) &μ(y) = μ;f(β). Fra dette, (8) og definisjonen av Δ* følger x,yêΔ* og derfor, siden Rasj(Δ*) impliserer Kon(Δ*) at xΩyêΔ*. Dette impliserer i sin tur at det må finnes λêΔ slik at (10) μ(xΩy)=μ;f(λ). Da har vi μ(xΩy) =μ(x)Ωμ(y) = μ;f(α)Ωμ;f(β) = μ;f(γ) og derfor μ(λ)=μ(γ). Siden λêΔ følger siden CL;f(Δ) at γêΔ. Dette viser at Kon;f(Δ)

(iv) Vi må også vise at LS;f(Δ). Dette innebærer at vi må vise

(11) (Aα)(αê U & μ;f(α)= I → αê Δ). Anta derfor (12) αê U & μ;f(α)= I. Da må det ikraft av aksiomene om utsagn finnes xêU slik at μ(x)=I. Vi har siden Rasj(Δ*) at LS(Δ*) og derfor

(Aα)(αêU & I Inkl μ(α) → αê Δ*). Siden μ(x)=I har vi derfor xêΔ* og derfor at det finnes βêΔ slik at μ(x)=μ;f(β). Da har vi i lys av (12) og det at μ(x)=I at μ;f(β)=μ;f(α). Siden βêΔ og CL;f(Δ) følger da at αêΔ. Dette viser at LS;f(Δ)

Siden vi nå har vist at Cons;f(Δ) & Kon;f(Δ) & LS;f(Δ) og vi forutsetter CL;f(Δ) følger det at Rasj;f(Δ).

(b) Gitt (1) og (2) ønsker vi nå å vise det omvendte nemlig at dersom Rasj;f(Δ) så har vi Rasj(Δ*). Anta derfor (3) Rasj;f(Δ). Vi ønsker å vise Rasj(Δ*).

(i) La oss først vise CL(Δ*). Dette innebærer at vi må bevise:

(4) (Ay)(AΓ)(yêU & Γ Inkl Δ* & LKm(y,Γ) → yêΔ*)

Anta derfor for vilkårlige y,Γ at

(4.1) yêU & Γ Inkl Δ* & LKm(y,Γ). Fra den siste konjunkten her og definisjonen av LKm har vi:

(4.2) (Aw)(wêI & (Az)(zêΓ → w ⊨z). → w ⊨y)

Fra (2) ovenfor følger at det finnes en en-entydig avbildning ξ som oppfyller følgende krav:

(4.3) ξ: Δ* -(1-1)→ Δ

(4.4) (Ax)(xêΔ → μ(x) = μ;f(ξ(x)))

Ved hjelp av (4.1) og (4.3) har vi:

(5.1) ξ"Γ inkl Δ

Siden yêU har vi at det må finnes y' slik at (5.2) y'êU;f & μ(y)=μ;f(y')

Anta nå at w er et vilkårlig objekt der (6) (Az)(zêξ"Γ → w ⊨;f z). Anta for vilkårlig z at zêΓ. Da har man ξ(z)êξ"Γ og derfor i lys av (6) at w ⊨;f ξ(z). Men fra dette og (4.4) kan man slutte w ⊨z. Det følger at (Az)(zêΓ → w ⊨z). Fra dette og (4.2) har man: w ⊨y. Men fra dette og (5.2) følger w ⊨;f y'. Siden w var en vilkårlig mulig verden som oppfylte (6) har vi vist:

(Aw)(wêI & (Az)(zêξ"Γ → w ⊨;f z) → w ⊨;f y'). Dette impliserer at LKm;f(y',ξ"Γ). Dette sammen med (5.1), det at y'êU;f og det forhold at CL;f(Δ) impliserer at y'êΔ. Men da har vi i lys av (5.2) og definisjonen av Δ* at (7) yêΔ*. Dette viser at (4) holder og at vi har CL(Δ*).

(ii) La oss så vise at Cons(Δ*). Dette impliserer at det må bevises at

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(8) (Ax)(xêU → ¬((xΩ¬x)êΔ*)). Anta for reduktio at absurdum at (9) xêU & (xΩ¬x)êΔ* Da har vi at det må finnes αêΔ slik at (10) μ(x)Ωμ(~x) = μ;f(α). Nå har man at μ(x)Ωμ(~x) = ø og derfor at det må finnes βêU;f slik at μ;f(β) =I-ø. Men da følger μ;f(β)=I - μ;f(α). Siden μ;f(α)=ø Inkl I-μ;f(α)=μ;f(β) og αêΔ følger siden CL;f at βêΔ. Men da må vi ha (Eα)(Eβ)(α,βêΔ & μ;f(α) = I- μ;f(β)) som impliserer at ¬Cons;f(Δ). Dette strider mot forutsetningen at Rasj;f(Δ).

(iii) Det er også nødvendig å vise at Kon(Δ*). Med andre ord må det bevises at: (Ax)(Ay)(x,yêU → (x,yêΔ* ↔ xΩyêΔ*)) Anta derfor (10) x,yêU & x,yêΔ*. Fra dette følger at det finnes α,βêΔ slik at μ(x)=μ;f(α) & μ(y) =μ;f(β). Da har vi at

μ(xΩy)= μ(x)Ωμ(y) = μ;f(α)Ωμ;f(β). Siden μ;f(α)Ωμ;f(β) Inkl I må det finnes noe γêU;f slik at μ;f(α)Ωμ;f(β) = μ;f(γ). Siden Kon;f(Δ) kan vi da slutte at γêΔ. Siden μ(xΩy) = μ(x)Ωμ(y) = μ;f(α)Ωμ;f(β)= μ;f(γ) & γêΔ følger det ved hjelp av definisjonen av Δ* at xΩyêΔ*. Anta nå (11) at x,yêU og xΩyêΔ*. Da må det finnes noe γ êU;f slik at (12) μ(xΩy)=μ;f(γ) & γêΔ. Nå må det finnes α,βêU;f slik at μ(x)=μ;f(α) & μ(y)=μ;f(β). Da har vi μ(xΩy)=μ(x)Ωμ(y)= μ;f(α)Ωμ;f(β) =μ;f(γ). Dette innebærer at

(13) μ;f(γ) Inkl μ;f(α) & μ;f(γ) Inkl μ;f(β) og derfor siden γêΔ og CL;f(Δ) at α,βêΔ. Men siden μ(x)=μ;f(α) & μ(y)=μ;f(β) har vi x,yêΔ* ved hjelp av definisjonen av Δ*. Dermed har vi vist at Kon(Δ*).

(iv) Endelig er det nødvendig å vise LS(Δ*), med andre ord at (14) (Ax)(xêU & I Inkl μ(x) → xê Δ*). Anta derfor for vilkårlig x at (15) xêU & I Inkl μ(x) Da har vi at μ(x) Inkl I og derfor at det finnes αêU;f slik at μ(x)=μ;f(α). Siden I Inkl μ(x) følger det da at I Inkl μ;f(α) og følgelig at I =μ;f(α). Da har man, siden LS;f(Δ) at αêΔ. Men μ(x)=μ;f(α). Det følger derfor ved hjelp av definisjonen av Δ* at xêΔ*. Dette viser at LS(Δ*).

Fra (i) - (iv) følger det at Rasj(Δ*). Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Dette er ett teorem blant mange som angår forholdet mellom finstrukturerte utsagn og presise deskriptive utsagn. Det vil bli benyttet senere når vi vil betrakte hva som følger i det spesielle, men helt urealiserbare tilfelle, der en persons trosfelt, dvs mengden av alle de utsagn som vedkommende tror, utgjør en rasjonelt organisert mengde med finstrukturerte utsagn.

§2 Finstrukturerte utsagn og begrepsrammer

Vi har så langt fremstilt vår teori om utsagn, finstrukturerte utsagn og egenskaper og formulert en rekke satser som angår forholdet mellom utsagn og finstrukturerte utsagn. Det er imidlertid et par ting som det er viktig å understreke. Når det gjelder utsagn er det lett å definere en rekke operasjoner over denne klassen av objekter som virker naturlige og intuitive. Gitt to utsagn x og y kan vi for eksempel definere hva som menes med *konjunksjonen* og *disjunksjonen* av dem, videre hva som menes med *kondisjonalutsagnet* som har x som antesedent og y som konskevent. Endelig kan vi definere hva som menes med *negasjonen* av utsagnet x. Dette kan vi gjøre uten å trekke inn, eller si noe om setninger som uttrykker disse utsagn. Vi behøver altså ikke å introdusere f.eks. førsteordens språk eller lignende språkstrukturer for å utvikle en forholdsvis rik teori om utsagn.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Når det gjelder finstrukturerte utsagn er situasjonen imidlertid annerledes. Anta f.eks. at x og y er to utsagn. Da finnes det minst tellbart uendelig mange finstrukturerte utsagn u;1, ... , u;n ... som har samme sannhetsmengde som x, ie. der vi har μ;f(u:i) = μ(x) for i=1 ... ad inf. Tilsvarende forholder det seg med utsagnet y. Det finnes talløse finstrukturerte utsagn u;1'. ...u;n' ... osv. viss sannhetsmengde sammenfaller med den til utsagnet y. Men om vi velger ut to finstrukturerte utsagn, ett blant de diverse u;1,....u;n,... og ett blant de diverse u;1', ... u;n',.... hvilket finstrukturert utsagn vil da være konjunksjonen av dem? Saken er at dersom x,y er finstrukturerte utsagn finnes det ikke noe entydig bestemt finstrukturert utsagn hvis sannhetsmengde er snittet av sannhetsmengdene til x og y, mao. finnes det uendelig mange finstrukturerte z;1, z;2, ... der vi har μ;f(z;i) = μ;f(x) Ω μ;f(y). Ingen av diss er det uten videre meningsfullt å kalle *konjunksjonen* av av x og y. Tilsvarende betraktninger kan gjøres når det gjelder de andre operasjonene på utsagn, disjunksjon, negasjon, kondisjonal osv. Skal man derfor snakke om f. eks. konjunksjonen, negasjonen etc. i forbindelse med finstrukturerte utsagn er det derfor helt nødvendig å trekke inn språk eller noe som ligner språk. Har man for eksempel for seg et første-ordens språk L og tenker seg at alle de lukkede formlene i dette språk er en-entydig tilordnet finstrukturerte utsagn ved hva vi kunne kalle en "naturlig" intepretasjonsfunksjon I vil naturligvis to distinkte lukke setninger α og β uttrykke to forskjellige finstrukturerte utsagn I(α) og I(β). Man kan under disse omstendigheter tale om konjunksjonen av disse to utsagn, nemlig I(α&β), negasjonen av utsagnet I(α), som vil være I(~α), disjunksjonen av α og β som vil være I(αvβ), osv.

I det følgende skal vi ikke benytte oss av språk av den typen som vi beskrev i Del I, §1.1 i dette arbeid. Vi skal derimot innføre noe vi kaller for *begrepsrammer*. En begrepsramme er et ordnet triple <D,X,In> der D er en ikke-tom mengde og X er en mengde med egenskaper over D. Det kan for hvert naturlig tall n, men må ikke, finnes et visst antal -nære egenskaper over D i X. Vi krever imidlertid at X skal være ikke-tom. In er en mengde av det vi kaller intensjonale relasjoner av type <m,n> (m>=0, n>0) over D. Er x en intensjonal relasjon av type <m,n> over D krever vi at x er en egenskap og at dersom z er med i ekstensjonen til x i en verden w så er z et ordnet par der den første koponenten er en sekvens av m elementer hentet fra D og den andre komponenten er en sekvens av n finstrukturerte utsagn. Vi gir en helt presis definisjon av uttrykket " intensjonal relasjon av type <m,n> over D" i den neste paragrafen.

Anta nå at B=<D,X,In> er en begrepsramme. Det er da mulig å definere helt presist de følgende kategorier assosiert med B: For det første konnektivene assosiert med B, videre variabeltegnene og konstantene assosiert med B, videre egenskapsnavnene assosiert med B og endelig navnene på de intensjonale relasjonene som inngår i B. Et uttrykk er en hvilken som helst endelig sekvens av tegn assosiert med B, hva enten det er konnektiver, variabeltegn konstanter, egenskapsnavn eller navn på intensjonale relasjoner. Gitt disse uttrykkene kan man definere helt presist klassen av formler assosiert med B, Fm(B) og hva som menes med de lukkede formlene assosiert med B, CFm(B). Gitt at B er en begrepsramme er disse uttrykksmengdene entydig bestemt.

Vi innfører så en intepretasjonsfunksjon over B. Dette er en funksjon ξ som oppfyller følgende krav: ξ: CFm(B) - (1-1)→ U;f. Mao. er ξ en funksjon som avbilder de lukkede formlene over B en-entydig inn i U;f. Det bør bemerkes at denne funksjonen ikke behøver å være *på* U;f. Det ordnete paret <B,ξ> kaller vi for en *utvidet begrepsramme*. Vi definerer så

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

hva som menes med at en slik utvidet begrepsramme representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn.

La oss på dette punkt gi leseren et kort resyme av innholdet i denne delen av vårt arbeid. I §2.1 gir vi en presis definisjon av hva vi forstår med en intensjonal relasjon. I §2.2 introduserer vi det vi i dette arbeidet kaller begrepsrammer, gir en presis definisjon og introduserer alle de begrepene som vi trenger i forbindelse med dem. Blandt annet gjør vi rede for hva som menes med en intepretasjonsfunksjon ξ over en begrepsramme og hva som menes med at en utvidet begrepsramme <B,ξ> representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Hvis B er en begrepsramme og α er en formel i Fm(B) definerer vi også hva som menes med at B $\models \alpha$, dvs. hva som menes med at formelen α er gyldig i begrepsrammen B. I §2.3 gir vi et konsistensbevis for at det finnes begrepsrammer som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Dette innebærer at om vi utvider vår teori med et aksiom, FU5, som sier at det finnes begrepsrammer som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn så vil denne nye teorien være konsistent om den gamle teorien, uten FU5, er det. Beviset er derfor et *relativt* konsistensbevis.

I §2.4 - 2.6 gjør vi mer utførlig rede for notasjonen i forbindelse med formler assosiert med en begrepsramme, videre viser vi en rekke satser som viser at mengden av alle predikatlogiske teoremer i et standard aksiomsystem for predikatlogikken er gyldige i enhver utvidet begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn og at det samme gjelder for en standardaksiomatisering av det modallogiske systemet S5. I §2.6 gir vi en definisjon av hva vi mener med et bevis over en begrepsramme.

I de to siste paragrafene introduserer vi begrepene 'klassisk intensjonal relasjon' og 'klassisk begrepsramme'. Vi undersøker i disse to paragrafene forholdet mellom begrepsrammer og klassiske begrepsrammer og viser at de siste i det vesentlige kan reptresenteres ved en spesiell type av begrepsrammer som vi kaller for regulære.

§2.1 Definisjon av intensjonal relasjon

Er x en egenskap betegner Ekst(x) ekstensjonsfunksjonen til x. Dette er den entydig bestemte funksjonen f hvor domenet er mengden av mulige verdener, ie.I, og hvor f(w), for hver wêI, er mengden av alle de mulige individer som har egenskapen x i verdenen w. Man har derfor at Ekst(x)(w) er en mengde med mulige individer, og at denne mengden er identisk med ekstensjonen til x i verdenen w. Med en n-ær egenskap (n>1) forstås en egenskap x der Ekst(x)(w) for alle wêI er en mengde av n-tupler av mulige individer. Det følger fra dette at dersom x er en binær egenskap vil ekstensjonen til x i enhver verden w være en mengde av ordnete par av mulige individer. Med en unær egenskap forstås rett og slett en egenskap. Med en unær egenskap over mengden D mener vi en egenskap x der man har at Ekst(x)(w) Inkl D for alle wêI. Med en n-ær egenskap x over mengden D menes en n-ær egenskap der det holder at Ekst(x)(w) Inkl D^n (n>=1). x sies å være en egenskap over D hvis og bare hvis x enten er en unær egenskap over D eller x er en n-ær egenskap over D for noe n>1. Mengden av egenskaper over D betegner vi med E(D). Mengden av n-ære egenskaper over D (n>=1) betegner vi med E^n(D).

Definisjon 2.1.1: x en intensjonal relasjon av type <m,n> over D hvis og bare hvis
(i) m>=0 og n>0

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(ii) x er en egenskap
(iii) En av følgende betingelser er oppfylt:
(a) m=0 & n=1 & (Aw)(wêI → Ekst(x)(w) Inkl D^0xU;f^1)
(b) m=0 & n>1 & (Aw)(wêI → Ekst(x)(w) Inkl D^0x(U;f)^n)
(c) m=1 & n=1 & (Aw)(wêI → Ekst(x)(w) Inkl D^1x U;f^1)
(d) m=1 & n>1 & (Aw)(wêI → Ekst(x)(w) Inkl D^1x((U;f)^n))
(e) m>1 & n=1 & (Aw)(wêI → Ekst(x)(w) Inkl (D^m)xU;f^1)
(f) m>1 & n>1 & (Aw)(wêI → Ekst(x)(w) Inkl (D^m)x((U;f)^n))

Man ser fra denne definisjonen at dersom D er en ikke-tom mengde kan det ikke finnnes noen intensjonal relasjon av type <0,0> over D. Dette følger umiddelbart i lys av kravet (i). Videre ser man at de betingelsene som er nevnt i forbindelse med kravet (iii) gjensidig utelukker hverandre. Mengden av alle intensjonale relasjoner av type <m,n> over D skal vi betegne med "In;<m,n>(D)". Det bør bemerkes at den definisjonen vi har gitt ovenfor som impliserer at at dersom <m,n>≠<m',n'> så er nødvendigvis In;<m,n>(D) og In;<m',n'>(D) disjunkte, det vil si uten felles elementer.

Vi sier at x er en intensjonal relasjon over D hvis og bare hvis det finnes m>=0 og n>0 slik at x er en intensjonal relasjon av type <m,n> over D.

§2.2 Definisjon av begrepsramme

Det følgende er den definisjonen vi vil benytte av uttrykket "begrepsramme".

Definisjon 2.2.1: Vi sier at B=<D,X,In> er en begrepsramme hvis og bare hvis B oppfyller følgende krav:
(i) D er en ikke-tom mengde
(ii) X er en ikke-tom mengde av egenskaper over D
(iii) In er en ikke-tom mengde av intensjonale relasjoner over D.

I denne definisjonen legges det ingen restriksjoner på kardinaltallet til mengden D. Dette kan være kan godt være et meget stort kardinaltall. Heller ikke legges det noen restriksjoner på kardinaltallet til X. Det er for eksempel intet som forhindrer at X kan være mengden av absolutt alle egenskaper over mengden D.

Anta nå B=<D,X,In> er en begrepsramme. Vi skal definere fem klasser av tegn assosiert med en slik begrepsramme B. De enkelte tegnklassene er henholdsvis: konnektivene assosiert med B, konstantene assosiert med B, variabeltegnene assosiert med B, egnskapsnavnene assosiert med B og endelig navnene på de intensjonale relasjonene assosiert med B. Alle disse tegnklassene er innbyrdes disjunkte mengder av fire-tupler.

La oss starte med konnektivene assosiert med en begrepsramme B=<D,X,In>. Dette er rett og slett fire-tuplene <0,0,0,0>, <0,0,0,1>,<0,0,0,2> og <0,0,0,3>. Av disse fire entitetene representerer <0,0,0,0> negasjonstegnet. Vi setter N= <0,0,0,0>. Tuplet <0,0,0,1> representerer tegnet for kondisjonal. Vi setter C=<0,0,0,1>. Tuplet <0,0,0,2> representerer allkvantoren. Vi setter Π=<0,0,0,2>. Endelig representerer tuplet <0,0,0,3> identitetstegnet.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Vi setter Id = <0,0,0,3>. Dermed har vi definert mengden av konnektiver assosiert med rammen B

Den neste mengden av tegn assosiert med begrepsrammen B=<D,X,In> er mengden av variabeltegn. Dette er rett og slett Mg(<1,0,0,n>: nêN) . Man ser fra denne definisjonen at intet variabeltegn er noe konnektiv og at det finnes en naturlig ordningav variabeltegnene. Variabeltegnet <1,0,0,10> kommer for eksempel før variabeltegnet <1,0,0,15>.

Mengden av konstanter assosiert med begrepsrammen B=<D,X,In> er mengden av alle firetupler <2,0,0,x> der x er et element i B. Med andre ord er mengden av konstanter assosiert med B identisk med mengden Mg(<2,0,0,x>: xêD). Man ser fra definisjonene så langt at intet konnektiv kan være noe variabeltegn eller noen konstant og at ingen konstant kan være noe variabeltegn.

La oss nå avgrense mengden av egenskapsnavn assosiert med begrepsrammen B=<D,X,In>. Vi sier at e er et egenskapsnavn assosiert med begrepsrammen B=<D,X,In> hvis og bare hvis det finnes et naturlig tall n >=1 og en n-ær egenskap x i X og e = <3,n,0,x>. Mer formelt kan mengden av egenskapsnavn over B defineres som

Mg(y: (En)(nêN & n>=1 & (Ex)(xêX & xêE^n(D) & y=<3,n,0,x>)))

Man ser fra denne at ethvert egenskapsnavn er et tuple hvor den første komponenten er tallet 3. Det følger at intet egenskapsnavn kan høre med til noen av de tidligere tegnkategoriene. Mengden av n-ære egenskapsnavn over begrepsrammen B er definert som mengden:

Mg(<3,n,0,x>: xêX & xêE^n(D))

La oss nå se på den femte og siste mengden av tegn. Vi sier at y er et navn på en intensjonal relasjon assosiert med begrepsrammen B=<D,X,In> hvis og bare hvis det finnes m,nêN der m>=0 og n>0 og det finnes xêIn der xêIn;<m,n>(D) og y=<4,m,n,x>).

Ethvert navn på en intensjonal relasjon er som man ser av denne definisjonen et fire-tuple hvor den første komponenten i tuplet er tallet 4. Det følger at intet navn på noen intensjonal relasjon derfor kan være noe element i noen av de fire tegnmengdene som vi har definert ovenfor. Et navn på en en intensjonal relasjon av type <m,n> over begrepsrammen B=<D,X,In> vil naturlig nok være et element i mengden

Mg(<4,m,n,x>: xêIn & xêIn;<m,n>(D))

Med et tegn assosiert med begrepsrammen B=<D,X,In> forstår vi et tegn som hører med i en eller annen av de fem mengdene av tegn assosiert med B som vi har definert ovenfor.

Med et uttrykk assosiert med begrepsrammen B=<D,X,In> fortår vi enhver endelig sekvens av tegn assosiert med denne rammen. Enhver vilkårlig endelig sekvens av konnektiver, konstanter, egenskapsnavn og navn på intensjonale relasjoner vil derfor selvfølgelig være et uttrykk, men neppe et uttrykk som fortjener noen oppmerksomhet. Vi skal derfor avgrense en mer spesiell mengde av uttrykk, nemlig de velformede formlene assosiert med en begrepsramme. Dette skjer ved den følgende definisjon:

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Definisjon 2.2.2: Mengden av formler assosiert med begrepsrammen B=<D,X,In> er den minste mengden av uttrykk F assosiert med B som oppfyller de følgende krav:

(i) Er x et navn på en n-ær egenskap assosiert med B og er a;1, ...,a;n en rekke med n tegn der a;i (i=1,...,n) enten er et variabeltegn eller en konstant assosiert med B så er sekvensen xa;1...a;n med i F

(ii) Er i et navn på en intensjonal relasjon av type <m,n> assosiert med B, er a;1,...,a;m en rekke med n tegn der a;i (i=1, ...,m) enten er et variabeltegn eller en konstant assosiert med B og er β;1,...., β;n elementer i F er også den endelige sekvensen

ia;1...a;nβ;1....β;n et element i F

(iii) Er a;1,a;2 tegn assosiert med B der a;i (i=1,2) enten er et variabeltegn eller en konstant assosiert med B så er sekvensen Ida;1a;2 med i F

(iv) Er α,β uttrykk som er med i F og er x et vilkårlig variabeltegn assosiert med B er sekvensene Nα, Cαβ og Πxα med i F.

En rekke bemerkninger er på sin plass i forbindelse med denne definisjonen. Det første som bør understrekes er at alle formlene assosiert med en begrepsramme B er sekvenser av firetupler. For eksempel vil Nα der α er en formel assosiert med begrepsrammen B være en sekvens av lengde n+1 om lenden til α er n og det første elementet i denne sekvensen vil selvfølgelig være N, dvs. firetuplet <0,0,0,0>.

Det bør bemerkes at N,C og Π er de primitive konnektivene assosiert med en begrepsramme B=<D,X,I>. Vi innfører de andre setningslogiske konnektivene ved definisjoner. Disjunksjon D innføres ved Dαβ = CNαβ, Konjunksjon K innføres ved den rent stipulative definisjonen Kαβ = NCαNβ. Endelig innføres bikondisjonal, E, ved definisjonen: Eαβ = KCαβCβα. Man bør merke seg her at disse definisjonene er ment som rene forkortningskonvensjoner.

Er α en formel assosiert med begrepsrammen B = <D,X,In> definerer vi hva som menes med fri og og bundne forekomster av et variabeltegn på vanlig måte. Er x et variabeltegn som forekommer i formelen α vil en forekomst av denne variabelen være fri dersom den ikke forekommer i noen delformel av α av typen Πxβ der β er en formel assosiert med B. En forekomst av variabeltegnet x er bundet i formelen α hvis og bare hvis denne forekomsten av x er i en delformel Πxβ av α. En formel der alle forekomster av alle variabeltegn er bundet kalles en lukket formel. I motsatt fall kalles formelen for en åpen formel. Uttrykket α;x[a], hvor x er et variabeltegn, α en formel og a enten et variabeltegn eller en konstant assosiert med begrepsrammen B, er den formelen man får når man erstatter enhver fri forekomst av x i α med a. Det forutsettes da at de forekomster av x som man erstatter med a er fri for a, det vil si at når man setter inn a for x vil a ikke bli bundet av noen kvantor i formelen. Tilsvarende betegner uttrykket α;(x;1,...,x;n)[a;1,...,a;n] der α er en formel assoiert med begrepsrammen B resultatet av å sette inn simultant a;1,...,a;n for henholdsvis de fri forekomstene av x;1,...,x;n. Det forusettes selvfølgelig at de diverse a;i'ene er substituerbare for x;i i formelen α (i=1,...,n).

Er B = <D,X,In> en begrepsramme betegner vi mengden av alle formler assosiert med B med Fm(B). Mengden av lukkede formler assosiert med B betegner vi med CFm(B). Man har naturligvis at CFm(B) er inkludert i Fm(B), men ikke omvendt.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Det bør noteres at vi så langt ikke har definert eller omtalt noe som har med sannhet å gjøre i forbindelse med begrepsrammer. Hvis imidlertid B= <D,X,In> er en begrepsramme og hver lukket formel i CFm(B) er entydig tilordnet et finstrukturert utsagn vil det gi mening å snakke om sannhetsverdien til en lukket formel assosiert med B. Formelen er sann i en logisk mulig verden w hvis og bare hvis det utsagnet som er tilordnet formelen er sant i denne verdenen w. I motsatt fall er formelen usann i verdenen w. Dette er bakgrunnen for den følgende definisjon.

Er B =<D,X,In> en begrepsramme kaller vi en funksjon ξ som avbilder CFm(B) en-entydig og inn i U;f for en intepretasjonsfunksjon assosiert med B. Er derfor ξ en intepretasjonsfunksjon assosiert med B har man at

ξ : CFm(B) -(1-1) → U;f

Er B =<D,X,In> en begrepsramme og ξ en intepretasjonsfunksjon assosiert med B kaller vi det ordnete paret <<D,X,In>,ξ> for en utvidet begrepsramme.

Merk at om x er et n-tuple betegner (x);m den m'te komponenten i x.

Definisjon 2.2.3: Anta B=<D,X,In> er en begrepsramme og ξ en intepretasjonsfunksjon assosiert med B. Da sier vi at den utvidete begrepsrammen <<D,X,In>,ξ> *representerer* en delmengde av de finstrukturerte utsagn hvis og bare hvis følgende krav er oppfylt.

(i) Er e et n-ært egenskapsnavn assosiert med B og er a;1,...a;n konstanter assosiert med B har man for alle wêI:

w ⊨;f ξ(ea;1....a;n) ↔ <(a;1);4,....,(a;n);4>êEkst;w((e);4)

(ii) Er i et navn på en intensjonal relasjon av type <m,n> assosiert med B, a;1, ... ,a; m konstanter assosiert med B og β;1, ..., β;nêCFm(B) har man for alle wêI:

w ⊨;f ξ(ia;1...a;mβ;1...β;n) ↔
<<(a;1);4,....,(a;m);4>, <ξ(β;1),...,ξ(β;n)>>ê Ekst;w((i);4)

(iii) Er a;1, a;2 konstanter assosiert med B har man for alle wêI:

w ⊨;f ξ(Ida;1a;2) ↔ (a;1);4 = (a;2);4

(iv) Er α,β êCFm(B) har man for alle wêI:

(a) w ⊨;f ξ(Nα) ↔ ¬(w ⊨;f ξ(α))

(b) w ⊨;f ξ(Cαβ) ↔ (w ⊨;f ξ(α) → w ⊨;f ξ(β))

(v) Er αêFm(B), og er x det eneste variabeltegnet som forekommer fritt i α, har man for alle wêI:

w ⊨;f ξ(Πxα) ↔ (Az)(zêD → w ⊨;f ξ(α;x[<2,0,0,z>]))

Det ordnete par av en begrepsramme B og formlene som er bestemt av denne begrepsrammen B har åpenbart visse likheter med et formalt språk, faktisk et predikatlogisk språk med identitet, utvidet med setningsdannende intensjonale konstruksjoner som virker på m termer, dvs. konstanter eller variabeltegn, og n formler (m>=0, n>0). De enkelte konstantene i dette språket svarer selvfølgelig til vanlige konstanter i predikatlogiske språk. Navn på n-ære egenskaper assosiert med B svarer til n-plasspredikater, og konnektivene N, K og Π svarer til negasjonstegnet, konjunksjonstegnet og allkvantoren. Hvis man oppfatter <B,Fm(B)> som et slikt språk vil det naturligvis være et overtellbart språk om de diverse komponentene i begrepsrammen B, er overtellbare. Er B= <D,X,In> er det for eksempel intet som forhindrer

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

at D kan være mengden av alle de entitetene som finnes i det kumulative hierarkiet opp til et meget høyt kardinaltall, videre er det heller intet som forhindrer at X kan være mengden av absolutt alle egenskaper over denne meget innholdsrike mengden D, ytterligere er det intet som forhindrer rent logisk sett at mengden av mulige verdener, mengden av presise deskriptive utsagn, mengden av tidspunkter, mengden av alle mulige fysiske objekter og en lang rekke andre meget innholdsrike mengder kan være inkludert i D. Det følger i så fall at mengden av formler assosiert med en slik begrepsramme B vil ha et meget stort kardinaltall.

Det virker hensiktsmessig å klargjøre ytterligere noen forhold. Anta B=<<D,X,In>,ξ> er en utvidet begrepsramme. Da er selvfølgelig B'=<D,X,In> en begrepsramme. Det skulle da være ganske opplagt at dersom vi snakker om formlene assosiert med B, mener vi formlene assosiert med B'. Videre mener vi, om vi under disse forutsetninger snakker om variabeltegnene, konstantene, de n-ære egenskapsnavn eller de navn på intensjonale relasjoner av type <m,n> som er assosiert med B, selvfølgelig de variabeltegn, de konstantene, de n-ære egenskapsnavn og de navn på intensjonale relasjoner av type <m,n> som er assosiert med den begrepsrammen som utgjør den første komponenten, ie <D,X,In>, i B

Er B en begrepsramme, eventuelt en utvidet begrepsramme, og er α en formel assosiert med B kaller vi en formel α' for en instans av α hvis og bare hvis α'= α;(x;1,...,x;n)[c1,...,cn] der x;1,...,x;n er de variabeltegnene som forekommer fri i α og c1 ... cn er konstanter assosiert med B. Er α en lukket formel har man selvfølgelig at enhver instans av α er identisk med formelen α.

Definisjon 2.2.4: Er B=<<D,X,In>,ξ> en utvidet begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn, wêI & αêCFm(B) setter vi:

(a) $w \models_{;B} \alpha \leftrightarrow w \models_{;f} \xi(\alpha)$

Er αê Fm(B) setter vi:

(b) $\models_{;B} \alpha \leftrightarrow (Aw)(w\hat{e}I \rightarrow w \models_{;B} \alpha')$ for enhver instans α' av α

§2.3 Konsistensbevis

Det er ikke umiddelbart opplagt at det finnes noen utvidet begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Heller ikke følger dette fra de aksiomene som vi så langt har angitt i forbindelse med de finstrukturerte utsagnene, nemlig FU1 - FU4 . La oss kalle påstanden om at slike begrepsrammer finnes for FU5. Det vi nå ønsker å vise er at dersom den opprinnelige teorien som vi startet med, egenskapsteorien E;3, er konsistent vil også den teorien man får når man utvider denne teorien med predikatene "x er et finstrukturert utsagn" og "w er en verden der det finstrukturerte utsagnet x er sant" samt legger til FU1 - FU5 som nye ikke-logiske aksiomer være konsistent. Dette vil i så fall vise at man ikke risikerer særlig mye om man antar det finnes begrepsrammer i utvidet forstand som representerer mengden av finstrukturerte utsagn. Naturligvis er det også til en viss grad betryggende å arbeide med en teori som man med rimelig sikkerhet kan gå ut fra at ikke inneholder noen motsigelser.

Vi skal først spesifisere en ganske komplisert type av strukturer

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

R= <D, UN/n,1,inf/(E(D^n)),Q,Γ,H>

I en slik struktur krever vi at D er en ikke-tom mengde. Den kan ha et hvilket som helst kardinaltall. Vi skal forutsette at den er minst tellbart uendelig. UN/n,1,inf/(E(D^n)), er foreningsmengden av de diverse E(D^n) ettersom n gjenomløper tallrekken fra og med 1 og oppover i det uendelige. Vi minner om at E(D^n) er mengden alle n-ære egenskaper over D. Denne mengden ble introdusert tidligere. Q er en ikke-tom mengde. Også den kan i og for seg være likemektig med et hvilket som helst uendelig kardinaltall. Vi definerer fem innbyrdes disjunkte mengder av tegn, fire-tupler slik:

(i) A1* = {<0,0,0,0>,<0,0,0,1>,<0,0,0,2>,<0,0,0,3>}

Disse fire-tuplene representerer som ovenfor konnektivene negasjon, konjunksjon samt allkvantoren og identitetspredikatet. Vi setter som tidligere N = <0,0,0,0>, K = <0,0,0,1>, Π=<0,0,0,2> og Id = <0,0,0,3>

Videre definerer vi mengden av variabeltegn, A2* slik:

(ii) A2* = Mg(<1,0,0,n>: nêN)

Man ser altså at vi arbeider med tellbart uendelig mange variabeltegn. Videre definerer vi mengden av konstanter A3* ved:

(iii) A3* = Mg(<2,0,0,x>: xêD)

Hver konstant <2,0,0,x> representerer derfor objektet x som er med i mengden D

Vi definerer A4* slik:

(iv) A4* = Mg(y: (En)(n>=1 &(Ex)(xê E(D^n) & y=<3,n,0,x>)))

Er gêA4* vil altså g=<3,n,0,x> for en eller annen n-ær egenskap x i E(D^n). g vil derfor være et navn på denne n-ære egenskapen x. Tilslutt setter vi:

(v) A5* = Mg(<4,m,n,x>: m>=0 & n>1 & xêQ>

Elementene i A5* representerer de intensjonsle konstruksjonene av type <m,n> som vi vil arbeide med i forbindelse med R. Vi kaller A1*U...UA5* for mengden av symboler assosiert med strukturen R.

Mengden av formler assosiert med strukturen R er gitt ved den følgende definisjon:

Definisjon 2.3.1: Formlene bestemt av R, Fm(R), er den minste mengden av endelige sekvenser av symboler over R som oppfyller følgende krav:

(i) Er x et navn på en n-ær egenskap assosiert med R og er a;1, ...,a;n en rekke med n tegn der a;i (i=1,...,n) enten er et variabeltegn eller en konstant assosiert med R så er sekvensen xa;1...a;n med i F

(ii) Er i et navn på en intensjonal konstruksjon av type <m,n> assosiert med R, er a;1,...,a;m en rekke med n symboler der a;i (i=1, ...,m) enten er et variabeltegn eller en konstant assosiert med R og er β;1,...., β;n elementer i F er også den endelige sekvensen ia;1...a;nβ;1....β;n et element i F

(iii) Er a;1,a;2 tegn assosiert med R der a;i (i=1,2) enten er et variabeltegn eller en konstant assosiert med R så er sekvensen Ida;1a;2 med i F

(iv) Er α,β uttrykk som er med i F og er x et vilkårlig variabeltegn assosiert med R er sekvensene Nα, Kαβ og Πxα med i F.

Denne definisjonen er naturligvis helt analog med den definisjonen vi ga tidligere av formlene assosiert med en begrepsramme B. Den eneste forskjellen er ved tegnene i A5*. I ethvert fire tuple som er med i A5* er den fjerde komponenten et element i Q og behøver derfor ikke å være noen intensjonal relasjon. Vi definerer hva som menes med en lukket formel, en åpen

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

formel på samme måte for formlene over R som for formlene assosiert med en begrepsramme. Videre defineres uttrykket "α;x[a]" på samme måte som tidligere. Det samme gjelder hva som menes med en fri og bundet forekomst av en variabel. Vi betegner mengden av lukkede formler over strukturen R med CFm(R).

Vi har nå gjort rede for de tre første komponentene i strukturen R. Det gjenstår å gjøre rede for de to siste komponentene. Γ skal være en funksjon til ethvert element <4,m,n,x> der m>=0, n>0 og xêQ tilordner dette en egenskap Γ(<4,m,n,x>) der vi har at ekstensjonen til denne egenskap i enhver verden er en mengde av ordnete par av typen <<a;1,...,a;>,<β;1,... β;n>> der a;1,...,a;n er entiteter i D og β;1,...,β;n er lukkede formler over strukturen R. Vi krever av denne funksjonen Γ at den skal være en-entydig .

La oss i denne sammenheng bemerke at dersom Cd(D) >=Cd(Q) har man at Cd(UN/n,1,Inf/(E(D^n)))>= Cd(Pt(D)) og derfor at Cd(UN/n,1,Inf/(E(D^n))) > Cd(Q). Videre følger det at Cd(CFm(R)) >= Cd(UN/n,1,Inf/(E(D^n))) og derfor at mengden av funksjoner f der vi har at f(w) for enhver wêI er en mengde av par <<a;1,...,a;n>,<β;1,...,β;n>> der a;1,...,a;nêD og β;1,...,β;nêCFm(R), må ha et kardinaltall som er langt større enn Cd(Q). Det følger derfor at det er mulig å avbilde A5*= Mg(<4,m,n,x>: m>=0&n>0 &xêQ) en-entydig inn i denne mengden med funksjoner og derfor en-entydig inn i den mengden med egenskaper som har disse funksjonene som sine ekstensjonsfunksjoner.

Tilslutt gjenstår det å gjøre rede for H. Vi lar H være bildet av A5* over Γ, med andre ord setter vi H= Γ"(A5*). Dermed har vi gitt en fullstendig redegjørelse for strukturen R.

Vi kan nå definere sannhet i en mulig verden w for de lukkede formlene assosiert med R. Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 2.3.2: Vi definierer hva som menes med at α er sann i verdenen w, i symboler "w ⊨α", der αêCFm(R) og wêI, induktivt på lengden av formler i CFm(L) i det vi setter:

(i) Er α= Ida;1,a;2 der a;1,a2 er navn på elementer i D har man at
w ⊨ α ↔ (a;1);4 = (a;2);4

(ii) Er e et navn på en n-ær egenskap i R, dvs. er e=<3,n,0,x> der xêE(D^n) for noe x, og har man at a;1,...,a;n er navn på elementer i D, har man at
w ⊨ ea;1 ... a;n ↔ <(a;1);4,....,(a;n);4>êEkst;w((e);4)

(iii) Anta i=<4,m,n,x> der xêQ & m>=0 og n>0. Anta a;1,...,a;n er navn på objekter i D og at β;1,...,β;n êCFm(R). Da setter vi for alle wêI:
w ⊨ ia;1 ... a;nβ;1...β;n ↔ <<(a;1);4,.....,(a;n);4>, <β;1,....,β;n>>êEkst;w(Γ(i))

(iv) Anta α,βêCFm(R) & wêI. Da setter vi:
(a) w ⊨ Kαβ ↔ (w ⊨ α & w ⊨ β)
(b) w ⊨ Nα ↔ ¬ (w ⊨ α)

(v) Anta α êFm(R) og at x er den eneste variabelen som forekommer fri i α. Anta wêI. Da setter vi:
w ⊨ Πxα ↔ (Az)(zêD → w ⊨ α;x[<2,0,0,z>])

Vi har nå spesifisert strukturen R = <D,UN/n,1,inf/(E(D^n)), Q, Γ,H> og definert hva som menes med Fm(R) og CFm(R). I tillegg har vi definert sannhetsrelasjonen ⊨ Inkl IxCfm(L). Det forøvrig bemerkes at det er mulig, innenfor rammen av E;3, å gi en helt konkret og eksplistt definisjon av en slik struktur. Vi hopper imidlertid over detaljene her siden det åpenbart er unødvendig og langtekkelig.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

La oss imidlertid gi eksplistte definisjoner av grunnbegrepene i teorien om finstrukturerte utsagn og vise at grunnsetningene FU1 - FU4 kan utledes fra disse definisjonene bare ved hjelp av prinsipper som er tilgjengelige i E;3

Definisjon 2.3.3: Vi setter:

(a) U;f(x) ↔ xêCFm(R)

(b) w ⊨;f x ↔ w ⊨x

Gitt disse definisjonene er det ganske lett å vise at FU1 og FU3 holder i den strukturen vi har spesifisert. For det første må man ha at U;f = Mg(x: U;f(x)) er en mengde siden CFm(R) er det. Dette viser at FU2 holder i strukturen. For det andre er det åpenbart på basis av definisjonen av sannhetsrelasjonen ⊨ at dersom w ⊨ y så er w en mulig verden og yêCFm(L). Det følger da ved hjelp av (a) og (b) i Definisjon 3 at w ⊨;f x → wêI & U;f(x). Dette viser at FU1 holder.

La oss se på FU2. Anta x er en eller annen mengde av mulige verdener. Siden domenet D i strukturen R er ikke-tomt finnes noe x0 der x0êD. Vi definerer så en ekstensjonsfunksjon Z ved å sette Z(w)={x0} om wêx og Z(w)=ø om wê(I-x). La e være den entydig bestemte egenskapen som har Z som sin ekstensjonsfunksjon. Da har vi åpenbart at e er en unær egenskap og derfor at eêUN/i,1,inf/(E(D^n)). Setter vi e' = <3,1,0,e> har vi at e' er navnet på egenskapen e og at u=e'<2,0,0,x0> êCFm(R)=U;f. Man ser da lett ved hjelp av definisjonen av sannhetsrelasjonen ⊨, det vil si Definisjon 2, samt Definisjon 3 at man må ha Mg(w:wêI & w ⊨u) = Mg(w: wêI & w ⊨;f u) = x. Dette viser at man også kan utlede FU2.

Det er imidlertid også nødvendig å vise at FU4 holder i strukturen R. Nå har vi nettopp sett at dersom x er en vilkårlig mengde av mulige verdener kan vi definere Z, egenskapen e og formelen u som ovenfor og det på en slik måte at μ;f(u) = x. Nå ser man imidlertid lett at rekken av formler u, NNu, NNNNu, osv i det uendelige alle er sanne i nøyaktig de verdenene som er med i x. Det følger derfor at mengden av alle de finstrukturerte utsagn, ie. elementer i CFm(R) (Jmf. Definisjon 3) som har x som sin sannhetsmengde er minst tellbart uendelig. Dette viser at man også kan utlede FU4.

La oss bemerke at dersom i er et objekt som er med i H har vi at det finnes m>=0,n>0 slik at for alle wêI holder det at

<<a;1,...,a;m>,<β;1,..., β;n>êEkst;w(i) → a;1,...,a;mêD & β;1,...,β;nêU;f

Det følger at alle elementene i H representerer intensjonale relasjoner over D.

Fra dette fremgår det at B=<D, UN/n,1,inf/(E(D^n)), H> er en begrepsramme om ⊨;f og U;f defineres slik som ovenfor. Vi har tidligere definert CFm(B) for enhver begrepsramme B. Merk imidlertid at CFm(B) ikke er den samme mengden som CFm(R).

Det som gjenstår nå er å definere en avbildning ξ: CFm(B) - (1-1)→ U;f = CFm(R) og så vise at <B,ξ> representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Vi definerer avbildningen ξ på lengden av de lukkede formlene assosiert med B på følgende måte:

(a) Er e et navn på en n-ær egenskap assosiert med B og a;1,...,a;n enten konstanter eller variabler assosiert med B setter vi:

ξ(ea;1.....a;n) = ea;1...a;n

(b) Er a;1,a;2 enten konstanter eller variabler assosiert med B setter vi:

ξ(Ida;1a;2) = Ida;1a;2

(c) Er α,β êFm(B) setter vi:

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

ξ(Nα)=Nξ(α)
ξ(Kαβ)=Kξ(α)ξ(β)

(d) Er αêFm(B) og x et variabeltegn assosiert med B setter vi:
ξ(Πxα) = Πxξ(α)

(e) Anta i er et navn på en intensjonal relasjon av type <m,n> assosiert med, at a;1,...,a;n er enten variabeltegn eller konstanter assosiert med B og at β;1,...,β;nêFm(B). Da setter vi:
ξ(ia;1 ... a;nβ;1 ... β;n) = Γ;-1((i);4)a;1...a;nξ(β;1)...ξ(β;n)

Det er meget lett å vise, ved et induksjonsbevis på lengden av formler, at ξ avbilder CFm(B) en-entydig og faktisk på CFm(R)=U;f.

Det som til sist må vises er at <B,ξ> oppfyller de kravene som ble stilt i definisjonen i forrige paragraf av hva det vil si at en utvidet begrepsramme representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Dette følger nærmest direkte fra den nevnte definisjon og definisjonen av ξ ovenfor. Det skulle derfor ikke være nødvendig å gjennomføre dette beviset i detalj.

I lys av det vi har vist ovenfor skulle det være klart at vi i det vesentlige har vist at teorien E;3 utvidet med predikatene "w ⊨;f x" og "U;f(x)" og suplementert med grunnsetningene FU1 - FU4 samt setningen som sier at det finnes utvidete begrepsrammer som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn er konsistent om E;3 er det. Har man derfor tiltro til at det ikke kan utledes noen motsigelser i E;3 har man derfor neppe noe grunnlag for å tro at det kan oppstå noen motsigelser i denne utvidelsen av E;3.

§2.4 Notasjon når det gjelder formlene i en begrepsramme.

Vi har ovenfor definert hva vi forstår ved en begrepsramme. Vi har også definert hva som menes med mengden av formler assosiert med en begrepsramme. Formlene assosiert med en begrepsramme inneholder imidlertid ikke paranteser. Skal man skrive dem opp er det tilstrekkelig å bruke en rent parantesfri, polsk, notasjon. En slik notasjon er naturlig nok meget "tegnøkonomisk" og egentlig ikke spesielt vanskelig å lese om man venner seg til den. Imidlertid er det sjelden noen bruker den. Siden logiske skrifter i de alle fleste tilfelle, selv når de er oversiktlig og klart skrevet, er temmelig tung lesning er det ikke særlig hensiktsmessig å plage leseren mer en nødvendig. Vi skal derfor vise hvordan formlene assosiert med en begrepsramme kan omformes til formler skrevet i den notasjon som er vanlig i lærebøker i logikk. Vi innfører en transformasjon T som avbilder Fm(B) en-entydig på en mengde av formler som er mer lesbare. Definisjonen er den følgende:

Definisjon 2.4.1:

(i) T(Kαβ) = (T(α)&T(β))
(ii) T(Cαβ) = (T(α)→T(β))
(iii) T(Eαβ) = (T(α) ↔ T(β))
(iv) T(Dαβ) = (T(α) v T(β))
(v) T(Nα) = ¬ T(α)
(vi) T(Πxα) = (Ax)T(α)
T(Σxα) = (Ex)T(α)

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(vii) Anta e er et n-ært egenskapsnavn assosiert med begrepsrammen B og at a;i er n tegn assosiert med B der vi har at a;i (i=1,...,n) enten er et variabeltegn eller en konstant. Da setter vi:
T(ea;1... a;n)= e(a;1,...,a;n)

(viii) Anta i er et navn på en intensjonal relasjon av type <m,n> assosiert med begrepsarammen B, β;1,...,β;nêFm(B) og at a;i (i=1...,n) enten er et variabeltegn eller en konstant assosiert med B. Da setter vi:
T(ia;1...a;mβ;1...β;n) = i;(a;1,...,a;m)(β;1,...β;n)

(ix) T(Ida;1a;2) = (a;1= a;2)

Det skulle være lett å se at denne transformasjonen T er en-entydig. La oss illustrere hvordan den virker med en del eksempler. Anta i det følgende at f er et unært egenskapsnavn assosiert med begrepsrammen B og at r er et binært egenskapsnavn assosiert med den samme begrepsramme. Vi forutsetter også at x,y og z er tre variabeltegn og at a er en konstant. Resulatet av å anvende T på for eksempel formelen "KKfxfyfz" vil da være: "(f(x)&f(y)) &f(z)". Resultatet av å bruke T på formelen "NKfxNrzy" vil være den følgende formel: "¬ (f(x) & ¬ r(x,y))". Formelen "NKrxyNfx" vil transformeres til: "¬(r(x,y) &¬f(x))". En formel som "ΠxΠyCIdxyCfxfy" transformeres til "(Ax)(Ay)(x=y →(f(x) →f(y))". Videre vil formelen "ΠxΠyCrxyKfxfy" omformes til: "(Ax)(Ay)(r(x,y) → (f(x)&f(y)))".

Når vi i det følgende bruker formler med paranteser vil vi også sløyfe en del av parantesene. Dette skjer ved at vi innfører en vanlig rangordning mellom konnektivene der et konnektiv med høyere rang har et større virkeområde enn et konnektiv med lavere rang.

Rangordningen mellom konnektivene er ↔, →, &, v, ¬, A og E. Dette innebærer at en formel av typen "α→β ↔ ¬β→¬α" må tolkes som "(α→β) ↔ (¬β →¬α)". Videre vil en formel som "¬β → ¬α" måtte tolkes som "(¬β)→ (¬α)" og ikke som "¬(β →(¬α))". Tilsvarende vil formelen "α&βvγ" bety "(α&(βvγ))" og ikke "(α&β)vγ". Denne konvensjonen om konnektivenes rangordning gjør at vi i mange tilfelle kan sløyfe paranteser og at endel formler blir lettere å lese.

§2.5 Satser i teorien om finstrukturerte utsagn

Vi skal i denne paragrafen se på tre satser som ytterligere belyser egenskapene til begrepsrammer i den betydningen som vi har innført og som spesielt viser hva man kan slutte om B=<<D,X,In>,ξ> er en utvidet begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Det bør nevnes at det ikke er noe spesielt nytt når det gjelder bevisteknikken i forbindelse med disse satser som følger et ganske tradisjonelt mønster.

Det følgende teorem er av interesse fordi det viser at et vanlig sett av aksiomer og slutningsregler for predikatlogikken med identitet alle er gyldige om B=<<D,X,In>,ξ> er en utvidet begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Dette er ikke overaskende om man studerer valuasjonsreglene for ξ i Definisjon 2.2.3 ovenfor.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Teorem 2.5.1: Anta B=<<D,X,In>,ξ> er en utvidet begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Sett per definisjon n(a)=<2,0,0,a> om aêD.
Anta α,β,γ ê Fm(B) og at x,y ervariabeltegn assosiert med B.
Under disse forutsetningene har man at følgende holder:

(i) $\models;B\ (\gamma \rightarrow (\alpha\rightarrow\beta)) \rightarrow ((\gamma\rightarrow\alpha) \rightarrow (\gamma\rightarrow\beta))$
(ii) $\models;B\ \ \alpha \rightarrow (\beta\rightarrow\alpha)$
(iii) $\models;B\ (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \rightarrow (\alpha\rightarrow\beta)$
(iv) $\models;B\ (Ax)(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow (Ax)\beta$ forutsatt x ikke forekommer fri i α
(v) $\models;B\ \ (Ax)\alpha \rightarrow \alpha;x[y]$
(vi) $\models;B\ \ x=y \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha')$ forutsatt at α' er som α bortsett eventuelt fra å ha en fri forekomst av y på et eller flere steder hvor α har en fri forekomst av x.
(vii) $\models;B\ \ x=x$
(viii) $\models;B\ \alpha\ \ \&\ \ \models;B\ (\alpha\rightarrow\beta)\ \ \rightarrow\ \models;B\ \beta$
(ix) $\models;B\ \alpha\ \rightarrow\ \models;B\ (Ax)\alpha$

Dette teoremet viser at man kan utlede at alle de vanlige teoremene i predikatlogikken med identitet er gyldige i den utvidete begrepsrammen B.

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder, med andre ord at B=<<D,X,In>,ξ> er en utvidet begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn og at α,β,γ ê Fm(B) og at x,y ervariabeltegn assosiert med B.

Ad (i): Anta α',β', γ' er vilkårlige instanser av av henholdsvis α,β,γ og at w er en vilkårlig mulig verden. Det vil da være tilstrekkelig å bevise:

(1) $w\ \models;f\ \xi((\gamma' \rightarrow (\alpha'\rightarrow\beta')) \rightarrow ((\gamma'\rightarrow\alpha') \rightarrow (\gamma'\rightarrow\beta')))$ På grunnlag av definisjonen av ξ som vi har gitt tidligere ser man at det vil være tilstrekkelig å vise:

(2) $(w \models;f\ \xi(\gamma') \rightarrow (w \models;f\ \xi(\alpha')\rightarrow w \models;f\ \xi(\beta'))) \rightarrow$
$((w \models;f\ \xi(\gamma')\rightarrow w \models;f\ \xi(\alpha')) \rightarrow (w \models;f\ \xi(\gamma')\rightarrow w \models;f\ \xi(\beta')))$

Men man ser lett at (2) er en ren setningslogisk sannhet. Det følger at (1) holder.

Ad (ii): Anta α',β' er vilkårlige instanser av av henholdsvis α,β og at w er en vilkårlig mulig verden. Det vil da være tilstrekkelig å bevise:

(1) $w \models;f\ \xi(\alpha' \rightarrow (\beta'\rightarrow\alpha'))$. På grunnlag av definisjonen av ξ ser man at det vil være tilstrekkelig å vise: (2) $w \models;f\ \alpha' \rightarrow(w \models;f\ \beta' \rightarrow w \models;f\ \alpha')$. Igjen ser man at (2) er en ren setningslogisk sannhet og derfor at (1) og dermed punkt (ii) holder.

Ad (iii): Anta α',β' er vilkårlige instanser av av henholdsvis α,β og at w er en vilkårlig mulig verden. Det vil da være tilstrekkelig å bevise:

(1) $w \models;f\ \xi((\neg\beta'\rightarrow\neg\alpha' \rightarrow (a'\rightarrow\beta'))$. På grunnlag av definisjonen av ξ ser man at det vil være tilstrekkelig å vise: (2) $(\neg(w \models;f\ \beta') \rightarrow \neg(w \models;f\ \alpha')) \rightarrow(w \models;f\ \alpha' \rightarrow w \models;f\ \beta')$. Igjen ser man at (2) er en ren setningslogisk sannhet og derfor at (1) og dermed punkt (iii) holder.

Ad (iv): La w være en vilkårlig mulig verden. Da vil en vilkårlig instans av $(Ax)(\alpha \rightarrow\beta) \rightarrow(\alpha\rightarrow(Ax)\beta)$ være av formen $(Ax)(\alpha' \rightarrow\beta') \rightarrow(\alpha'\rightarrow(Ax)\beta')$ der α' er en instans av α og β' er som β bortsett fra at alle fri variabler bortsett fra x er erstattet med konstanter. I lys av definisjonen av ξ vil det vil derfor være tilstrekkelig å bevise:

(1) $w \models;f\ \xi((Ax)(\alpha' \rightarrow\beta')) \rightarrow\ \ w \models;f\ \xi(\alpha'\rightarrow(Ax)\beta')$

Anta derfor (2) $w \models;f\ \xi((Ax)(\alpha' \rightarrow\beta'))$. På basis av evalueringsregelen for allkvantoren i definisjonen av ξ følger herav: (3) $(Aa)(aêD \rightarrow w \models;f\ \xi((\alpha' \rightarrow\beta');x[n(a)])$. Fra dette kan man slutte siden x ikke forekommer fri i α at

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(4) (Aa)(aêD → w ⊨;f ξ(α' →(β';x[n(a)])) og derfor

(5) (Aa)(aêD →(w ⊨;f ξ(α') → w ⊨;f β';x[n(a)])). Fra dette kan man i sin tur slutte: (6) w ⊨;f ξ(α') → (Aa)(aêD → w ⊨;f β';x[n(a)]). Ved hjelp av definisjonen av ξ følger da: (7) w ⊨;f ξ(α') → w ⊨;f ξ((Ax)β') Herav: w ⊨;f ξ(α'→(Ax)β'). Dette viser at punkt (iv) holder.

Ad (v): Anta w er en vilkårlig mulig verden og at γ' er en instans av (Ax)α→α;x[y]. Da vil γ' = (Ax)α' → α';x[i] hvor α' er som α ved at det er satt inn konstanter for alle fri forekomster av variabler bortsett eventuelt fra variabelen x og der i er et navn på et objekt i D. Det vil åpenbart være tilstrekkelig å vise w ⊨;f ξ(γ'), dvs. (1) w ⊨;f ξ((Ax)α' → α';x[i]) Anta derfor (2) w ⊨;f ξ((Ax)α'). Da følger ved hjelp av definisjonen av ξ :

(3) (Aa)(aêD → w ⊨;f ξ(α';x[n(a)]). Siden i er et navn på et objekt i D har vi at det må finnes a0 êD slik at (4) i =n(a0). Fra dette og (3) følger at (5) w ⊨;f ξ(α';x[i]). Vi har nå vist at (2) impliserer (5). Dette viser at (1) og dermed punkt (v) holder.

Ad (vi): Anta γ'=(i=j → (β →β')) er en vilkårlig instans av x=y → (α →α'). Da vil β' være nøyaktig som β bortsett fra å ha en forekomst av konstanten j på et eller flere steder der β har en forekomst av konstanten i. Videre vil selvfølgelig β og β' være instanser av henholdsvis α og α'. Anta nå at w er en vilkårlig mulig verden ie at wêI. Det er nå to muligheter: Tilfelle (i): Konstantene i og j er navn på det samme objekt. Da har man de to navnene i,j er identiske. Da vil selvfølgelig også β og β' være identiske og det er i dette tilfelle trivielt at vi har w ⊨;f ξ(i=j → (β→β')). Tilfelle (ii): i og j er navn på distinkte objekter i D. Da har man åpenbart at w ⊨;f ξ(¬(i=j)) og i såfall har man w ⊨;f ξ(i=j → (β →β')) siden antesedenten i kondisjonalen i=j → (β →β') er usann. Dette viser at punkt (vi) holder.

Ad (vii): En instans av formelen x=x er naturligvis en formel av typen i=i der i er en konstant assosiert med B. På basis av definisjonen av ξ er det trivielt at w ⊨; f ξ(i=i) for enhver mulig verden w. Dette viser at punkt (vi) holder.

Ad (viii): Anta (1) ⊨;B α & ⊨;B (α→β). Anta w er en vilkårlig verden og at β' er en vilkårlig instans av β. Er α' en vilkårlig instans av α har vi da ikraft av den første konjunkten i (1) at (2) w ⊨;f ξ(α'). Siden α' og β' er instanser av henholdsvis α og β følger det at α'→β' er en instans av (α→β). Fra dette og den andre konjunkten i (1) følger det ved hjelp av definisjonen av ξ at (3) w ⊨;f ξ(α') →w ⊨;f ξ(β'). Men fra dette og (2) følger w ⊨;f ξ(β') og siden β' var en vilkårlig instans av β at ⊨;B β. Dette viser (viii) holder.

Ad (ix): Anta (1) ⊨;B α og anta at β' er en vilkårlig instans av (Ax)α. Anta w er en vilkårlig mulig verden, ie. (2) wêI. Anta videre at i er en vilkårlig konstant assosiert med B. Siden β' er en instans av (Ax)α har vi at β'=(Ax)α' for en eller annen formel α'. Da må α' være som α bortsett fra at det er satt inn konstanter for alle fri forekomster av variabler i α bortsett fra variabelen x. Vi må derfor ha at α';x[i] er en instans av av α. Men fra dette, (1) og (2) følger at w ⊨;f ξ(α';x[i]). Siden i var en vilkårlig konstant følger w ⊨;f (Ax)α'. Men β'=(Ax)α' var en vilkårlig instans av (Ax)α og w en vilkårlig mulig verden. Det følger at ⊨;B (Ax)α.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Vårt neste teorem er det følgende. Man ser at premissene i teoremet er at B=<<D,X,In>,ξ> er en utvidet begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Videre ser man at Nec er en intensjonal relasjon av type <0,1> over D som har den samme ekstensjon i enhver verden og hvor ethvert finstrukturert utsagn som er med i ekstensjonen til Nec i verdenen w er med i denne hvis og bare hvis utsagnet er sant i enhver enhver verden.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Nec_ er så navnet på denne intensjonale relasjonen Nec. Som man ser fra konklusjonen i satsen har Nec_ alle de egenskapene som kreves av nødvendighetsoperatoren i det velkjente modalsystemet S5 når dette utvides med kvantorer og identitetspredikatet.

Teorem 2.5.2: Anta B =<<D,X,In>,ξ> er en utvidet begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Anta Nec er en intensjonal relasjon av type <0,1> over D som oppfyller de følgende krav:

(i) (Aw)(Aw')(w,w'êI → Ekst;w(Nec) = Ekst;w'(Nec))

(ii) (Ay)(yêU;f → (Aw)(wêI → (yêEkst;w(Nec) ↔ (Aw')(w'êI → w ⊨;f y))))

Sett tilslutt Nec_ = <4,0,1,Nec> og la "Pos_(α)" forkorte "¬Nec_(¬α). Under disse forutsetningene har vi, om α,βêFm(B) og x,y er variabeltegn assosiert med B, at

(a) ⊨;B Nec_(α) →α

(b) ⊨;B Nec_(α) & Nec_(α→β).→ Nec_(β)

(c) ⊨;B Nec_(α) → Nec_(Nec_(α))

(d) ⊨;B Pos_(α) → Nec_(Pos_(α))

(e) ⊨;B α → ⊨;B Nec_(α)

(f) ⊨;B x=y → Nec_(x=y)

(g) ⊨;B ¬(x=y) → Nec_(¬(x=y))

(h) ⊨;B (Ax)Nec_(α) ↔ Nec((Ax)α)

Dette teoremet viser at den intensjonale relasjonen Nec_ har samme egenskaper som modaloperatoren i systemet S5. I tillegg innbærer punkt (f) og (g) at dersom to individer er identiske er de nødvendigvis identiske, og er de forskjellige så er de nødvendigvis forskjellige. Det siste punktet i satsen viser at operatoren Nec_ også oppfyller det såkalte Barcan-aksiomet.

Bevis: Anta at forutsetningene i teoremet holder.

Ad (a): Anta for vilkårlig w at (1) wêI. Anta γ er en vilkårlig instans av Nec_(α)→α. Da har vi at γ = Nec_(α') → α' der α' er en instans av α. Det vil være tilstrekkelig å vise at (1) w ⊨;f ξ(Nec_(α') → α'). I lys av definisjonen av ξ er dette ekvivalent med (2) w ⊨;f ξ(Nec_(α')) → w ⊨;f ξ(α'). Anta derfor (3) w ⊨;f ξ(Nec_(α')). Ved hjelp av definisjonen av ξ følger herav (4) ξ(α')ê Ekst;w((Nec_);4). Siden (Nec_);4 = Nec ifølge forutsetningene følger at ξ(α')ê Ekst;w((Nec_);4). Fra dette og forutsetning (ii) følger: (Aw')(w'êI → w' ⊨;f ξ(α')) siden ξ(α')êU;f. Det følger at w ⊨;f ξ(α'). Dette viser at (2), og dermed (1), holder. Vi har dermed gitt et bevis for punkt (a).

Ad (b): Anta for vilkårlig w at (1) wêI. Og anta γ er en vilkårlig instans av Nec_(α)&Nec_(α→β) → Nec_(β). Da vil γ = Nec_(α')&Nec_(α'→β') → Nec_(β'). Det vil være tilstrekkelig å bevise (2) w ⊨;f ξ(γ). For dette formål vil det i sin tur være tilstrekkelig å bevise: w ⊨;f ξ(Nec_(α')&Nec_(α'→β') → Nec_(β')). I lys av definisjonen av ξ er dette i sin tur ekvivalent med:

(3) w ⊨;f ξ(Nec_(α')) & w ⊨;f ξ(Nec_(α'→β')) → w ⊨;f ξ(Nec_(β'))

Det vil altså være tilstrekkelig å vise dette. Anta derfor:

w ⊨;f ξ(Nec_(α')) & w ⊨;f ξ(Nec_(α'→β')). Da har man ξ(α')êEkst;w(Nec) og ξ(α'→β')êEkst;w(Nec). Dette impliserer i sin tur i lys av forutsetning (ii), siden ξ(α') og ξ(α'→β') er med i U;f:

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(4.1) (Aw')(w'êI → w' ⊨; ξ(α')) og
(4.2) (Aw')(w'êI → w' ⊨;f ξ(α'→β'))
(4.2) impliserer i lys av definisjonen av ξ: (Aw')(w'êI →. w' ⊨; ξ(α') → w' ⊨; ξ(β'))
Fra dette og (4.1) har man så åpenbart (Aw')(w'êI → w' ⊨; ξ(α')). Men fra dette og det faktum at ξ(β')êU;f følger ved hjelp av forutsetning (ii) at w ⊨;f ξ(Nec_(β')). Dette viser at (3) holder. Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for punkt (b).

Ad (c): Anta (1) wêI for vilkårlig w. Anta γ er en instans av Nec_(α) → Nec_(Nec_(α)). Da har man γ=(Nec_(α') → Nec_(Nec_(α'))) der α' er en instans av α. Det vil være tilstrekkelig å vise w ⊨;f ξ(γ) med andre ord:

(2) w ⊨;f ξ(Nec_(α') → Nec_(Nec_(α')))

I lys av definisjonen av ξ vil det være nok å vise:

(3) ξ(α')êEkst;w(Nec) → ξ(Nec_(α'))êEkst;w(Nec)

Anta derfor (4) ξ(α')êEkst;w(Nec). I lys av forutsetning (ii) har vi da siden ξ(α')êU;f:

(5) (Aw)(wêI → w ⊨;f ξ(α')) For nå å vise ξ(Nec_(α'))êEkst;w(Nec) vil det være nok å vise: (+) (Aw')(w'êI → w' ⊨;f ξ(Nec_(α'))). Anta derfor (6) w'êI for vilkårlig w'. Siden wêI ifølge (1) har vi da ved hjelp av forutsetning (i) at

(7) Ekst;w(Nec) = Ekst;w'(Nec)

Fra (4) og (7) følger ξ(α')êEkst;w'(Nec). Men fra dette og definisjonen av ξ har man w' ⊨;f ξ(Nec_(α')). Dette viser at (+) holder. Det følger at (3) holder. Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for dette punktet.

Ad (d): Anta (1) w0êI for vilkårlig w0 og anta γ er en vilkårlig instans av Pos_(α) → Nec_(Pos_(α)). Da har man når man husker at "Pos(α)" forkorter "¬Nec_(¬α)" at γ = (¬Nec¬_(α') → Nec_(¬Nec¬_(α'))) der α' er en instans α. Det følger at det vil være tilstrekkelig å vise at (2) w0 ⊨;f ξ(¬Nec_(¬α')) → w0 ⊨;f ξ(Nec_(¬Nec_(¬α')))
Nå har man i lys av forutsetningene for alle wêI:

(3) w ⊨;f ξ(¬Nec¬_(α')) ↔ ¬(w ⊨;f ξ(Nec_(¬α'))
↔ ¬(ξ(Nec(¬α'))êEkst;w(Nec))
↔ ¬(Aw')(w'êI → w' ⊨;f ξ(¬α))
↔ ¬(Aw')(w'êI → ¬(w' ⊨;f ξ(α')))
↔ (Ew')(w'êI & w' ⊨;f ξ(α'))

Vi har: (4) w0 ⊨;f ξ(Nec_(¬Nec_(¬α'))) ↔ ξ(¬Nec_(¬α')))êEkst;w0(Nec)
↔ (Aw")(w"êI → w" ⊨;f ξ(¬Nec_(¬α')))
↔ (Aw")(w"êI → (Ew')(w'êI & w' ⊨;f ξ(α'))) Jmf (3)

Vi må nå vise at (2) holder Anta derfor (5) w0 ⊨;f ξ(¬Nec_(¬α')). Fra dette og (3) følger: (Ew')(w'êI & w' ⊨;f ξ(α')). Herav følger så ved hjelp av ren predikatlogikk: (Aw")(w"êI → (Ew')(w'êI & w' ⊨;f ξ(α'))). Fra dette og (4) kan vi så konkludere med at w0 ⊨;f ξ(Nec_(¬Nec_(¬α'))). Dette viser at (2) holder. Dermed har vi også gitt et bevis for punkt (d).

Ad (e): Anta (1) ⊨;B α. Vi skal vise ⊨;B Nec_(α). Anta derfor for vilkårlig w at (2) wêI og at α' er en instans av α. Da har man fra (1) (Aw')(w'êI → w ⊨;f ξ(α')). Men fra dette og forutsetning (ii) kan man slutte at (Aw)(wêI → ξ(Nec_(α'))êEkst;w(Nec)). Herav følger så ved hjelp av definisjonen av ξ at (Aw)(wêI → w ⊨ ξ(Nec_(α'))). Men herav kan man slutte at ⊨;B Nec_(α).

Ad (f): La i,j være konstanter assosiert med B. Da er i=j →Nec(i=j) en instans av x=y → Nec(x=y). Det vil være tilstrekkelig å vise at man har for alle wêI at

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(1) w ⊨;f ξ(i=j) → w ⊨;f ξ(Nec_(i=j)). Anta (2) w ⊨;f ξ(i=j). Da har man ved hjelp av definisjonen av ξ at (i);4 =(j);4. Fra dette følger så ved ren predikatlogikk (Aw')(w'êI → (i);4=(j);4) og derfor ved hjelp av definisjonen av ξ at (Aw')(w'êI → w' ⊨;f ξ(i=j)). Ved hjelp av forutsetning (ii) kan man fra dette og det faktum at ξ(i=j)êU;f slutte at w ⊨;f ξ(Nec_(i=j)). Dette viser at punkt (f) holder.

Ad (g): La i,j være konstanter assosiert med B. Da er i≠j →Nec(i≠j) en instans av x≠y → Nec(x≠y). Det vil være tilstrekkelig å vise at man har for alle wêI at (1) w ⊨;f ξ(i≠j) → w ⊨;f ξ(Nec_(i≠j)). Anta (2) w ⊨;f ξ(i≠j). Da har man ved hjelp av definisjonen av ξ at (i);4 ≠ (j);4. Fra dette følger så ved ren predikatlogikk (Aw')(w'êI → (i);4≠(j);4) og derfor ved hjelp av definisjonen av ξ at (Aw')(w'êI → w' ⊨;f ξ(i≠j)). Ved hjelp av forutsetning (ii) kan man fra dette og det faktum at ξ(i≠j)êU;f slutte at w ⊨;f ξ(Nec_(i≠j)). Dette viser at punkt (g) holder.

Ad (h): La γ være en vilkårlig instans av (Ax)Nec_(α) ↔ Nec((Ax)α). Da har vi at γ=((Ax)Nec_(α') ↔ Nec((Ax)α')) der α' er en instans av α. Anta wêI. Vi må vise w ⊨;f ξ(γ). Det vil være tilstrekkelig å vise:

(1) w ⊨;f ξ(Ax)Nec_(α')) ↔ w ⊨;f ξ(Nec_((Ax)α'). Nå har vi på den ene side:

(2) w ⊨;f ξ(Ax)Nec_(α')) ↔ (Aa)(aêD → w ⊨;f ξ(Nec_(α');x[n(a)])
↔ (Aa)(aêD → w ⊨;f ξ(Nec_(α';x[n(a)]))
↔(Aa)(aêD → (Aw')(w'êI → w' ⊨;f ξ(α';x[n(a)])))

På den annen side har man:

(3) w ⊨;f ξ(Nec_((Ax)α') ↔ (Aw')(w'êI → w' ⊨;f ξ((Ax)α'))
↔ (Aw')(w'êI → (Aa)(aêD →w' ⊨;f ξ(α';x[n(a)])))

Man ser imidlertid ved hjelp av ren predikatlogikk at høyre side i (2) er ekvivalent med høyre side i (3). Det følger derfor at (2) holder. Dette viser punkt (h) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Vårt neste teorem er dette:

Teorem 2.5.3: Anta B =<<D,X,In>,ξ> er en utvidet begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Anta X er mengden av alle egenskaper over D. Anta T er en intensjonal relasjon av type <1,1> som er med i In.
Definer en funksjon η : I → Pt(D) ved å sette:

η(w) = Mg(x: xêD & Rasj;f(Mg(y: <x,y>êEkst;w(T))))

La |η| være den monadiske egenskapen som har η som sin ekstensjonsfunksjon. Definer:

T_ = <4,1,1,T> og η_ = <3,1,0,|η|>

Anta tilslutt at |η| êX, α,βê Fm(B) og at x,y,z er variabeltegn assosiert med begrepsrammen B.

Gitt disse forutsetningene har man:

(a) ⊨;B α → ⊨;B η_(x) → T_;x(α)
(b) ⊨;B α → β → ⊨;B η_(x) → (T_;x(α) → T_;x(β))
(c) ⊨;B η_(x) → (T_;x(α) & T_;x(α→β) → T_;x(β))
(d) ⊨;B η_(x) → ¬ T_;x(α & ¬α)
(f) ⊨;B η_(x) → (y=z → T_;x(y=z))
(g) ⊨;B η_(x) → (¬(y=z) → T_;x(¬(y=z)))

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Man ser at blant forutsetningene i satsen er at B=<<D,X,In> ξ> er en utvidet begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Videre forutsettes det at T er en intensjonal relasjon av type <1,1> over D. Man kan her tenke seg at T er den relasjonen som består mellom et individ x og et finstrukturert utsagn y hvis og bare hvis y er et finstrukturert utsagn som beskriver et forhold x tror foreligger. Navnet på T, T_ kan da leses "tror at", eller mer nøyaktig formelen "T_;x(α)" kan leses "x tror at α". Vi innfører også blandt forutsetningene i teoremet ekstensjonsfunksjonen η som er ekstensjonsfunksjonen til egenskapen |η|. Hvis T tillegges betydningen ovenfor ser man at η(w), der w er en mulig verden, er mengden av alle de individer x i verdenen w der trosfeltet til x er rasjonelt organisert. Hvis man tillater seg å tolke teoremet ovenfor på denne måten ser man at konklusjonen i teoremet, punktene (a) - (g) svarer til aksiomene og slutninngsreglene i det doxastisk-logiske systemet K;η som presenteres og undersøkes i Rognes 2007b.

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder.

Ad (a): Anta (1) ⊨;B α. Anta γ er en vilkårlig instans av η_(x)→T_;x(α) og anta (2) wêI for vilkårlig w. Siden γ er en vilkårlig instans finnes det α' der α' er en instans av α og en konstant assosiert med B, la oss kalle den i, slik at γ=(η_(i) → T_;i(α')). Det vil følgelig være tilstrekkelig å bevise: (3) w ⊨;f ξ(γ). Man ser at det vil være tilstrekkelig å vise:

(4) w ⊨;f ξ(η_(i)) → w ⊨;f ξ(T_;i(α')). Anta derfor (5) w ⊨;f ξ(η_(i)). Fra dette og definisjonen av ξ følger: (6) (i);4 êEkst;w(|η|). Dette i sin tur impliserer at (7) (i);4 ê Mg(x: xêD & Rasj;f(Mg(y: <x,y>êEkst;w(T)))). Dette impliserer at man har:

(8) Rasj;f(Mg(y: <(i);4,y>êEkst;w(T)))

Siden α' er en instans av α og wêI har man at (1) impliserer at (9) (Aw')(w'êI → w' ⊨;f ξ(α')). Dette i sin tur impliserer at (10) μ;f(ξ(α'))=I. Vi har selvfølgelig også på basis av definisjonen av ξ at (11) ξ(α')êU;f. Fra (8) og definisjonen av Rasj;f følger (12) LS;f(Mg(y: <(i);4,y>êEkst;w(T))). Dette, (10) og (11) følger ved hjelp av definisjonen av LF;f at (13) <(i);4, ξ(α')>êEkst;w(T). Men fra dette kan man ved hjelp av definisjonen av ξ, siden T er en intensjonal relasjon av type <1,1>, slutte at w ⊨;f ξ(T_;i(α'). Dette viser at (4) holder. Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for punkt (a).

Ad (b): Anta (1) ⊨;B (α→β). La γ være en vilkårlig instans av formelen η_(x) → (T_;x(α) → T_;x(β)). Da har man at γ=(η_(i) → (T_;i(α') → T_;i(β'))) der i er en konstant assosiert med B. Anta (2) wêI for vilkårlig w. Det vil da være tilstrekkelig å bevise (3) w ⊨;f ξ(γ). I lys av definisjonen av ξ ser man at (3) følger fra:

(4) w ⊨;f ξ(η_(i)) & w ⊨;f ξ(T_;i(α')) → w ⊨;f ξ(T_;i(β'))

Det er derfor tilstrekkelig å vise at (4) holder. La oss gjøre dette: Anta (5) w ⊨;f ξ(η_(i)) og (6) w ⊨;f ξ(T_;i(α')). Vi tar sikte på å bevise (+) w ⊨;f ξ(T_;i(β')) Fra (5) og definisjonen og definisjonen av ξ følger (7) (i);4êEkst;w(|η|). Dette i sin tur impliserer at (8) (i);4 ê Mg(x: xêD & Rasj;f(Mg(y: <x,y>êEkst;w(T)))). Dette impliserer at man har: (9) Rasj;f(Mg(y: <(i);4,y>êEkst;w(T))). Fra (6) kan man ved hjelp av definisjonen av ξ slutte (10) <(i);4,ξ(α')>êEkst;w(T). Fra (9) og definisjonen av Rasj;f følger CL;f(Mg(y: <(i);4,y>êEkst;w(T))) og fra dette og definisjonen av CL;f følger: (11) <(i);4,ξ(α')>êEkst;w(T) & μ;f(ξ(α')) Inkl μ;f(ξ(β')) → <(i);4,ξ(β')>êEkst;w(T) siden åpenbart ξ(α'), ξ(β') êU;f. Nå har man fra (1), siden α',β' er instanser av henholdsvis α og β at (Aw')(w'êI → w' ⊨;f ξ(α'→β')). Fra dette følger ved hjelp av definisjonen av ξ at (Aw')(w'êI & w' ⊨;f ξ(α') → w' ⊨;f ξ(β')) som i sin tur impliserer:

(12) μ;f(ξ(α')) Inkl μ;f(ξ(β'))

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Fra (10), (11) og (12) følger så <(i);4,ξ(β')>êEkst;w(T) som impliserer w ⊨;f ξ(T_;i(β')).

Vi har vist at man fra (5) og (6) kan slutte (+) w ⊨;f ξ(T_;i(β')). Dette viser at (4) holder og derfor at punkt (b) holder.

Ad (c): La γ være en vilkårlig instans av η_(x) → (T_;x(α) & T_;x(α→β) → T_;x(β)). Da finnes i, α',β' slik at γ=(η_(i) → (T_;i(α') & T_;i(α'→β') → T_;x(β'))) hvor α' og β' er instanser av henholdsvis α og β. Anta (1) wêI for vilkårlig w. Det som da må bevises er at w ⊨;f ξ(γ). Det vil åpenbart være tilstrekkelig å vise:

(3) w ⊨;f ξ(η_(i) → (T_;i(α') & T_;i(α'→β') → T_;x(β')))

I lys av definisjonen av ξ er (3) implisert av:

(4) w ⊨;f ξ(η_(i)) & w ⊨;f ξ(T_;x(α')) & w ⊨;f ξ(T_;x(α'→β')) → w ⊨;f ξ(T_;x(β'))

Det vil derfor være tilstrekkelig å vise (4). Anta derfor:

(5) w ⊨;f ξ(η_(i)) & w ⊨;f ξ(T_;x(α')) & w ⊨;f ξ(T_;x(α'→β')).

Fra den første konjunkten i (5) impliserer (6) (i);4êEkst;w(|η|). I lys av forutsetningene følger fra dette: (7) (i);4 ê Mg(x: xêD & Rasj;f(Mg(y: <x,y>êEkst;w(T)))). Herav:

(8) Rasj;f(Mg(y: <(i);4,y>êEkst;w(T)))

Fra den andre og tredje konjunkten i (5), samt definisjonen av ξ kan man slutte:

(9.1) <(i);4, ξ(α')> êEkst;w(T)

(9.2) <(i);4, ξ(α'→β')> êEkst;w(T)

Om vi per definisjon setter Δ= Mg(y: <(i);4,y>êEkst;w(T))) følger fra (8) ved hjelp av definisjonen av Rasj;f at (10) Kon;f(Δ). Fra (9.1) og (9.2) følger også

(11) ξ(α') êΔ , ξ(α'→β')êΔ Nå har man:

(12) μ;f(ξ(α' & (α'→β'))) = μ;f(ξ(α')) Ω μ;f(α'→β')

Fra (10), (11) og (12) følger ved hjelp av definisjonen av Kon;f at

(13) ξ(α' & (α'→β'))êΔ

På basis av definisjonen av ξ er det lett å se at vi må ha

(14) μ;f(ξ(α' & (α'→β'))) Inkl μ;f(ξ(β'))

Fra (8) følger også CL;f(Δ). Men fra dette, (13), (14) og det at ξ(β')êU;f følger:

(15) ξ(β')êΔ. Dette impliserer i kraft av definisjonen av Δ at <(i);4,ξ(β')>êEkst;w(T) og dermed at w ⊨;f ξ(T_;x(β')). Vi har dermed vist at (4) holder og dermed også at punkt (c) holder.

Ad (d): Anta γ er en vilkårlig instans av η_(x) → ¬ T_;x(α & ¬α). Da vil vi ha at γ = (η_(i) → ¬ T_;i(α' & ¬α')) der i er et navn assosiert med rammen B og α' er en instans av α. Anta (1) wêI for vilkårlig w. Det vil da være tilstrekkelig å vise at man har

(2) w ⊨;f ξ(γ). med andre ord at (3) w ⊨;f ξ(η_(i)) → w ⊨;f ξ(¬ T_;i(α' & ¬α')).

Det vil altså være nok å vise (3). Vi gjør dette ved reduktio ad absurdum. Anta mot formodning at (4) w ⊨;f ξ(η_(i)) & w ⊨;f ξ(T_;i(α' & ¬α')). Vi skal vise at dette leder til en motsigelse. Fra den første konjunkten følger ved hjelp av definisjonen av ξ:

(5) (i);4êEkst;w(|η|). Fra den andre konjunkten følger:

(6) <(i);4,ξ(α'&¬α')>êEkst;w(T)

Setter vi per definisjon: Δ= Mg(y: <(i);4,y>êEkst;w(T))) følger fra (4) at (7) Rasj;f(Δ). Fra definisjonen av Δ og (2) følger (8) ξ(α'&¬α')êΔ. Fra (7) kan man slutte (9) Cons;f(Δ). Nå har man at ved hjelp av definisjonen av Nå er det lett å se ved hjelp av definisjonen av ξ at

(10.1) μ;f(ξ(α'&¬α')) Inkl μ;f(ξ(α'))

(10.2) μ;f(ξ(α'&¬α')) Inkl μ;f(ξ(¬α'))

Siden (7) holder har vi også per def av Rasj;f at CL;f(Δ). Fra dette (8), (10.1) og (10.2) kan man konkludere med (11) ξ(α),ξ(¬α)êΔ. Men som man lett ser fra definisjonen av ξ og

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

definisjonen av μ;f har man at μ;f(ξ(¬α')) = I - μ;f(ξ(¬α')). Men dette og (11) strider åpenbart mot (9). Vi har dermed vist at (4) er usann og derfor at (3) holder. Dette viser riktigheten av punkt (d).

Ad (e): Anta i,j og k er vilkårlige konstanter assosiert med B. Anta w er en vilkårlig mulig verden wêI. For å bevise påstanden er det da åpenbart tilstrekkelig å bevise:

(1) w ⊨;f ξ(η_(i)) & w ⊨;f ξ(j=k) → w ⊨;f ξ(T_;i(j=k))

Anta derfor (2) w ⊨;f ξ(η_(i)) & w ⊨;f ξ(j=k). fra den første konjunkten følger om vi per definisjon setter: Δ= Mg(y: <(i);4,y>êEkst;w(T))) at (3) Rasj;f(Δ). Fra den andre konjunkten følger ved hjelp av definisjonen av ξ: (4) (j);4 = (k);4. I lys av valusjonsregelen for identitet i definisjonen av ξ kan man da slutte: (5) I =μ;f(ξ(j=k)). Fra (3) følger LS;f(Δ). Sammen med (5) og den åpenbare sak at ξ(j=k)êU;f impliserer dette at ξ(j=k)êΔ. Dette i sin tur impliserer i lys av definisjonen av Δ at <(i);4,ξ(j=k)>êEkst;w(T)). Herav har man så w ⊨;f ξ(T_;i(j=k)). Dette viser at (1) holder og dermed punkt (e).

Ad (f): Anta i,j og k er vilkårlige konstanter assosiert med B. Anta w er en vilkårlig mulig verden wêI. For å bevise påstanden er det da åpenbart tilstrekkelig å bevise:

(1) w ⊨;f ξ(η_(i)) & w ⊨;f ξ(j≠k) → w ⊨;f ξ(T_;i(j≠k))

Anta derfor (2) w ⊨;f ξ(η_(i)) & w ⊨;f ξ(j≠k). fra den første konjunkten følger om vi per definisjon setter: Δ= Mg(y: <(i);4,y>êEkst;w(T))) at (3) Rasj;f(Δ). Fra den andre konjunkten følger ved hjelp av definisjonen av ξ: (4) (j);4 ≠ (k);4. I lys av valusjonsregelen for identitet i definisjonen av ξ kan man da slutte: (5) I =μ;f(ξ(j≠k)). Fra (3) følger LS;f(Δ). Sammen med (5) og den åpenbare sak at ξ(j≠k)êU;f impliserer dette at ξ(j≠k)êΔ. Dette i sin tur impliserer i lys av definisjonen av Δ at <(i);4,ξ(j≠k)>êEkst;w(T)). Herav har man så w ⊨;f ξ(T_;i(j≠k)). Dette viser at (1) holder og dermed punkt (f).

Demed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Hvis man ser på den minste mengden av formler som inneholder de setningslogiske, predikatlogiske og identitetsteoretiske aksiomene og som er lukket under modus ponens og universell generalisering ser man fra Teorem 2.5.1 at alle formlene i denne mengden er gyldige relativt til en utvidet begrepsramme <B,ξ> som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Dette leder oss naturlig over til vårt neste tema som er å definere presist hva som menes med et *bevis* over en begrepsramme B.

§2.6 Definisjon av bevis over en begrepsramme

Anta B=<D,X,In> er en begrepsramme og at α er en formel i Fm(B). La x;1,...,x;n være de variabeltegnene som forekommer fri i α tatt i alfabetisk rekkefølge. Da kaller vi formelen (Ax;n)....(Ax;1)α for lukningen av α.[37] Vi betegner lukningen av α med α*. Inneholder ikke α noen fri variabler er selvfølgelig lukningen av α identisk med α

Med et predikatlogisk aksiom over begrepsrammen B forstår vi lukningen av enhver formel av typen:

(i) (γ → (α→β)) → ((γ→α) → (γ→β))
(ii) α → (β→α)
(iii) (¬β → ¬α) → (α→β)
(iv) (Ax)(α → β) →. (Ax)α → (Ax)β

37 Denne definisjonen av lukningen til en formel er hentet fra Quine[1], side 79-80.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(v) $\alpha \rightarrow (Ax)\alpha$ forutsatt at x ikke forekommer fri i α

(v) $(Ax)\alpha \rightarrow \alpha;x[y]$

(vi) $x=y \rightarrow (\alpha \rightarrow \alpha')$ forutsatt at α' er som α bortsett eventuelt fra å ha en fri forekomst av y på et eller flere steder hvor α har en fri forekomst av x.

(vii) $x=x$

Vi skal tillate oss å si, dersom $\alpha,\beta,\gamma \hat{e} Fm(B)$, at γ er sluttet fra α og β ved hjelp av modus ponens hvis og bare hvis det finnes formler det finnes formler π,λ slik at $\gamma=\lambda$, $\alpha=\pi$ og $\beta=(\pi\rightarrow\lambda)$. Vi kan nå definere hva som menes med et bevis assosiert med begrepsrammen B. Dette er en endelig rekke med formler $\alpha;1,.....,\alpha;n$ der $n>=1$ og der man har for alle $j\hat{e}\{1,...,n\}$ at $\alpha;j$ enten er et predikatlogisk aksiom eller at det finnes naturlige tall $k,s<j$ slik at $\alpha;j$ er sluttet fra $\alpha;k$ og $\alpha;s$ ved hjelp av modus ponens. Vi forutsetter selvfølgelig at formlene $\alpha;1,...,\alpha;n$ er med i Fm(B). Det følger imidlertid at alle formlene i et bevis må være lukkede former. En formel assosiert med begrepsrammen B kalles for bevisbar om den er den siste formelen i et bevis assosiert med B.[38]

Det bør nevnes at alle formler som er bevisbare i denne forstand er gyldige i predikatlogikken med identitet. Omvendt kan man også vise at dersom en formel over B er predikatlogisk gyldig så er den bevisbar. Imidlertid skal vi ikke gi noen detlajerte bevis for disse påstandene her.

§2.7 Klassiske intensjonale relasjoner

Vi har ovenfor, med en viss utførlighet, studert det vi kaller begrepsrammer, og spesielt sett på hva som følger fra den premiss at $B=\langle\langle D,X,In\rangle\xi\rangle$ er en utvidet begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Det vi skal gjøre i denne paragrafen og den neste er å sammenligne det vi tidligere og fremdeles kaller intensjonale relasjoner og begrepsrammer med to nye begrepsdannelser, nemlig det vi her vil kalle (i) *en klassisk intensjonal relasjon av type <m,n> (m>=0,n>0) over D*, der D er en ikke-tom mengde, og (ii) det vi vil kalle *en klassisk begrepsramme*.

En klassisk begrepsramme er (som en begrepsramme) et triple <D,X,In> der D er en ikke-tom mengde og X en ikke-tom mengde av egenskaper av forskjellig grad, men til forskjell fra en begrepsramme er In nå en mengde med *klassiske* intensjonale relasjoner over D som selvsagt kan være av forskjellig type. Vi betegner mengden av alle klassiske intensjonale relasjoner av type <m,n> over D med "In;<m,n>(D)". Er B= <D,X, In> en klassisk begrepsramme definerer vi hva som menes med konnektivene, variabeltegnene, konstantene, egenskapsnavnene og navnene på de intensjonale relasjonene assosiert med B på nøyaktig samme måte som i forbindelse med (ordinære) begrepsrammer. Vi definerer også mengden av formler over en klassisk begrepsramme, Fm(B), og de lukkede formlene assosiert med B på samme måte som i forbindelse med begrepsrammer. Det som imidlertid karakteriserer en *klassisk begrepsramme* B i motsetning til en vanlig begrepsramme er at man definerer direkte hva som menes med at en formel $\alpha\hat{e}CFm(B)$ er sann i verdenen w ved en

38 Dette predikatlogiske systemet er i det vesentlige hentet fra Quine [1], §16, se spesielt side 88. Vi har lagt til de setningslogiske aksiomene (i) - (iii), istedet for Quines regel om at dersom α er en tautologisk formel så er lukningen av α et teorem. Dessuten har vi lagt til de identitetsteoretiske aksiomene (vi) og (vii).

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

vanlig induktiv definisjon uten å gå omveien om en intepretasjonsfunksjon ξ av den typen som vi introduserte i forbindelse med begrepsrammer.

La oss nå si noen ord om den videre utvikling. I denne paragrafen skal vi gi en eksakt definisjon av hva som menes med en klassisk intensjonal relasjon av type <m,n> over et ikke-tomt område D. Vi skal også gi en kommentar til denne definisjonen.

I §2.8 definerer vi først hva som menes med en klassisk begrepsrammme og introduserer de begrepsdannelsene som vi nevnte ovenfor. Dernest introduserer vi begrepet *regulær* intensjonal relasjon. Vi definerer også hva som menes med en regulær begrepsramme. Vi beviser to hovedresultater i denne paragrafen.

Det første sier at dersom B=<<X,D,In>,ξ> er en regulær begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn så finnes det en entydig bestemt klassisk begrepsramme B;c=<D,X,In;c> som er slik at for enhver verden w er nøyaktig de samme formlene sanne i B såvel som i B;c. Mer presist definerer vi en avbildning
T : CFm(B) -(1-1,på)→CFm(B;c) og viser at om αêCFm(B) har vi at

w ⊨;B α ↔ w ⊨;B;c T(α) for alle verdener w.

Det andre hovedresultatet er at dersom B;c=<D,X,In> er en klassisk begrepsramme så kan man under visse rimelige forutsetninger vise at det finnes en regulær utvidet begrepsramme B;r = <<D,X, In;r>,ξ> som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagnene og der vi har for alle αêCFm(B;c) at w ⊨;B;r T;-1(α) ↔ w ⊨;B;c α

Disse to resultatene viser ganske tydelig hvordan de to typene av begrepsrammer er relatert til hverandre. I §2.8 formulerer vi disse to tesene helt presist og gir bevis for dem.

Vi definerer hva vi mener med en klassiske intensjonal relasjon slik:

Definisjon 2.7.1: x en klassisk intensjonal relasjon av type <m,n> over D hvis og bare hvis
(i) m>=0 og n>0
(ii) x er en egenskap
(iii) En av følgende betingelser er oppfylt:
(a) m=0 & n=1 & (Aw)(wêI → Ekst(x)(w) Inkl D^0xU^1)
(b) m=0 & n>1 & (Aw)(wêI → Ekst(x)(w) Inkl D^0x(U^n)
(c) m=1 & n=1 & (Aw)(wêI → Ekst(x)(w) Inkl D^1x U^1)
(d) m=1 & n>1 & (Aw)(wêI → Ekst(x)(w) Inkl D^1x(U^n))
(e) m>1 & n=1 & (Aw)(wêI → Ekst(x)(w) Inkl (D^m)xU^1)
(f) m>1 & n>1 & (Aw)(wêI → Ekst(x)(w) Inkl (D^m)x(U^n))

Man ser at denne definisjonen avviker fra den vi tidligere har gitt av uttrykket "intensjonal relasjon"

Mengden av klassike intensjonale relasjoner av type <m,n> over D betegner vi med "CIn;<m,n>(D)". (m>=0, n>0)

§2.8 Klassiske begrepsrammer

Vi definerer

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Definisjon 2.8.1: Vi sier at B=<D,X,In> er en klassisk begrepsramme hvis og bare hvis B oppfyller følgende krav:

(i) D er en ikke-tom mengde
(ii) X er en ikke-tom mengde av egenskaper over D
(iii) In er en ikke-tom mengde av klassiske intensjonale relasjoner over D.

Anta nå B=<D,X,In> er en klassisk begrepsramme. Vi skal definere fem klasser av tegn assosiert med en slik begrepsramme B. De enkelte tegnklassene er henholdsvis: konnektivene assosiert med B, konstantene assosiert med B, variabeltegnene assosiert med B, egnskapsnavnene assosiert med B og endelig navnene på de intensjonale relasjonene assosiert med B. Alle disse tegnklassene er innbyrdes disjunkte mengder av fire-tupler.

La oss starte med konnektivene assosiert med den klassiske begrepsrammen B=<D,X,In>. Dette er rett og slett fire-tuplene <0,0,0,0>, <0,0,0,1>,<0,0,0,2> og <0,0,0,3>. Av disse fire entitetene representerer <0,0,0,0> negasjonstegnet. Vi setter N= <0,0,0,0>. Tuplet <0,0,0,1> representerer tegnet for kondisjonal. Vi setter C=<0,0,0,1>. Tuplet <0,0,0,2> representerer allkvantoren. Vi setter Π=<0,0,0,2>. Endelig representerer tuplet <0,0,0,3> identitetstegnet. Vi setter Id = <0,0,0,3>. Dermed har vi definert mengden av konnektiver assosiert med rammen B

Den neste mengden av tegn assosiert med den klassiske begrepsrammen B=<D,X,In> er mengden av variabeltegn. Dette er rett og slett Mg(<1,0,0,n>: nêN) . Man ser fra denne definisjonen at intet variabeltegn er noe konnektiv og at det finnes en naturlig ordning av variabeltegnene. Variabeltegnet <1,0,0,10> kommer for eksempel før variabeltegnet <1,0,0,15>.

Mengden av konstanter assosiert med den klassiske begrepsrammen B=<D,X,In> er mengden av alle firetupler <2,0,0,x> der x er et element i D. Med andre ord er mengden av konstanter assosiert med B identisk med mengden Mg(<2,0,0,x>: xêD). Man ser fra definisjonene så langt at intet konnektiv kan være noe variabeltegn eller noen konstant og at ingen konstant kan være noe variabeltegn.

La oss nå avgrense mengden av egenskapsnavn assosiert med den klassiske begrepsrammen B=<D,X,In>. Vi sier at e er et egenskapsnavn assosiert med begrepsrammen B=<D,X,In> hvis og bare hvis det finnes et naturlig tall n >=1 og en n-ær egenskap x i X og e = <3,n,0,x>. Mer formelt kan mengden av egenskapsnavn over B defineres som

Mg(y: (En)(nêN & n>=1 & (Ex)(xêX & xêE^n(D) & y=<3,n,0,x>)))

Man ser fra denne at ethvert egenskapsnavn er et tuple hvor den første komponenten er tallet 3. Det følger at intet egenskapsnavn kan høre med til noen av de tidligere tegnkategoriene. Mengden av n-ære egenskapsnavn over den klassiske begrepsrammen B er definert som mengden:

Mg(<3,n,0,x>: xêX & xêE^n(D))

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

La oss nå se på den femte og siste mengden av tegn. Vi sier at y er et navn på en klassisk intensjonal relasjon assosiert med den klassiske begrepsrammen B=<D,X,In> hvis og bare hvis det finnes m,nêN der m>=0 og n>0 og det finnes xêIn der xêCIn;<m,n>(D) og y=<4,m,n,x>).

Ethvert navn på en intensjonal relasjon er som man ser av denne definisjonen et fire-tuple hvor den første komponenten i tuplet er tallet 4. Det følger at intet navn på noen klassisk intensjonal relasjon derfor kan være noe element i noen av de fire tegnmengdene som vi har definert ovenfor. Et navn på en en intensjonal relasjon av type <m,n> over begrepsrammen B=<D,X,In> vil naturlig nok være et element i mengden

Mg(<4,m,n,x>: xêX & xêCIn;<m,n>(D))

Med et tegn assosiert med den klassiske begrepsrammen B=<D,X,In> forstår vi et tegn som hører med i en eller annen av de fem mengdene av tegn assosiert med B som vi har definert ovenfor.

Med et uttrykk assosiert med den klassiske begrepsrammen B=<D,X,In> fortår vi enhver endelig sekvens av tegn assosiert med denne rammen. Enhver vilkårlig endelig sekvens av konnektiver, konstanter, egenskapsnavn og navn på intensjonale relasjoner vil derfor selvfølgelig være et uttrykk, men neppe et uttrykk som fortjener noen oppmerksomhet. Vi skal derfor avgrense en mer spesiell mengde av uttrykk, nemlig de velformede formlene assosiert med en klassisk begrepsramme. Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 2.8.2: Mengden av formler assosiert med den klassiske begrepsrammen B=<D,X,In> er den minste mengden av uttrykk F assosiert med B som oppfyller de følgende krav:

(i) Er x et navn på en n-ær egenskap assosiert med B og er a;1, ...,a;n en rekke med n tegn der a;i (i=1,...,n) enten er et variabeltegn eller en konstant assosiert med B så er sekvensen xa;1...a;n med i F

(ii) Er i et navn på en klassisk intensjonal relasjon av type <m,n> assosiert med B, er a;1,...,a;m en rekke med n tegn der a;i (i=1, ...,m) enten er et variabeltegn eller en konstant assosiert med B og er β;1,...., β;n elementer i F er også den endelige sekvensen

ia;1...a;nβ;1....β;n et element i F

(iii) Er a;1,a;2 tegn assosiert med B der a;i (i=1,2) enten er et variabeltegn eller en konstant assosiert med B så er sekvensen Ida;1a;2 med i F

(iv) Er α,β uttrykk som er med i F og er x et vilkårlig variabeltegn assosiert med B er sekvensene Nα, Cαβ og Πxα med i F.

Det har nå blitt avklart hva som menes med en klassisk begrepsramme. I tillegg har det blitt forklart hva som menes med en formel assosiert med en slik begrepsramme. Det neste trinn er å gi en definisjon av hva som menes med at en formel α er sann i verdenen w relativt til den klassiske begrepsrammen B. Vi benytter "w ⊨;B α" som forkortelse for det lengere uttrykket " α er sann i verdenen w relativt til den klassiske begrepsrammen B".

Definisjon 2.8.3: Relasjonen w ⊨;B α der B =<D,X,In> er en klassisk begrepsramme, α en lukket formel assosiert med B og w er en mulig verden er definert induktivt slik:

(i) Er α= Ida;1a;2 der a;1,a;2 er konstanter assosiert med B har man for alle wêI:

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

w ⊨;B α ↔ (a;1);4 = (a;2);4

(ii) Er e et navn på en n-ær egenskap assosiert med B og er a;1, ... ,a;n konstanter har man for alle wêI:

w ⊨;B ea;1 ... a;n ↔ <(a;1);4, ... ,(a;n);4> ê Ekst;w((e);4)

(iii) Er i et navn på en klassisk intensjonal relasjon av type <m,n> assosiert med B og er a;1 ,.... ,a;m konstanter assosiert med B og er β;1,....,β;n êCFm(B) har man for alle wêI at

w ⊨;b ia;1...a;mβ;1... β;n ↔ <<(a;1);4, ... , (a;m);4>, <B;1,....,B;n>>êEkst;w((i);4) der B;i = μ;-1(Mg(w: w ⊨;B β;i)) for i=1,...,n.

(iv) Er α,βêCFm(B) har man for alle wêI at

(a) w ⊨;B Cαβ ↔ (w ⊨;B α → w ⊨;B β)

(b) w ⊨;B Nα ↔ ¬ (w ⊨;B α)

(v) Er α ê Fm(B) og er x eventuelt den eneste variabelen som forekommer fri α har man for alle wêI :

w ⊨;B Πxα ↔ (Az)(zêD → w ⊨;B α;x[<2,0,0,z>])

Vi har ovenfor definert hva vi mener med en klassisk begrepsramme B= <D,X,In>. Dessuten har vi definert for hvert <m,n> der m>=0 og n>0 hva som menes med en klassisk intensjonal relasjon av type <m,n> over domenet D, der D er en ikke-tom mengde.

Det vi nå skal undersøke er forholdet mellom en spesiell type intensjonale relasjoner av type <m,n> som vi kaller *regulære* og klassiske intensjonale relasjoner av type <m,n>

Vi minner om at dersom x er en intensjonal relasjon av type <m,n> (m>=0, n>0) over domenet D har man ekstensjonen til x i verdenen wêI , Ekst;w(x), er en delmengde av mengden Mg(<<a;1,...,a;m>,<u;1,...,u;n>>: a;1,..,a;m êD &u;1,...,u;nêU;f). Man har altså at Ekst;w(x) Inkl (D^m)xU;f^n.

Anta nå at <a,u>ê(D^m)x(U;f^n) & <a',u'>ê(D^m)x(U;f^n). Da sier vi at <a,u> *er ekvivalent med* <a',u'> hvis og bare hvis (a);i = (a');i for i=1,...,m og μ;f((u);j) = μ;f((u');j) for j= 1, ... ,m.

Vi kan nå definere hva vi mener med en regulær intensjonal relasjon:

Definisjon 2.8.4 Anta x er en intensjonal relasjon av type <m,n> over D. Da kaller vi x for *regulær* hvis og bare hvis vi har for alle wêI og alle <a,u>, <a',u'>ê (D^m)xU;f^n,der <a,u> er ekvivalent med <a',u'>, at <a,u>êEkst;w(x) hvis og bare hvis <a',u'>êEkst;w(x).

La oss også gjøre det klart at vi kaller en begrepsramme B=<D,X,In> for *regulær* hvis og bare hvis enhver intensjonal relasjon xêIn av type <m,n> over D er regulær, mao. hvis og bare hvis alle de intensjonale relasjonene i In er regulære.

Anta nå at x er en intensjonal relasjon av type <m,n> over D. Vi skal da definere hva som menes med x;c, *den klassiske intensjonale relasjonen av type <m,n> over D som er bestemt av x*.

Definisjon 2.8.5 Anta x er en intensjonal relasjon av type <m,n> over D. Da er x;c, den klassiske intensjonale relasjonen av type <m,n> over D bestemt av x, den klassiske intensjonale relasjonen av type <m,n> over D som oppfyller det følgende krav:

(+) Ekst;w(x;c) = Mg(<<a;1,..,a;m>,<μ;-1(μ;f(u;1)), ... ,μ;-1(μ;f(u;n))>>:
<< a;1,...,a;m>,< u;1,...,u,n>>êEkst;w(x)

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Man ser fra denne definisjonen at dersom x er en intensjonal relasjon av type <m,n> over D så er x;c entydig bestemt. Vi betegner med C den funksjonen som består av alle par <x,x;c> der der x er en intensjonal relasjon over D. Er da B=<D,X,In> en begrepsramme vil B;c = <D,X, C"In> være en klassisk begrepsramme som er entydig bestem av B. Vi skal kalle B;c for *den naturlige klassiske begrepsrammen som er bestemt av* B.

Det bør bemerkes at dersom X er en mengde med intensjonale relasjoner over D (D er naturligvis en ikke-tom mengde) vil naturligvis C avbilde X inn i C"X. Men C behøver ikke nødvendigvis å avbilde X en-entydig inn i denne mengden C"X. Er derimot X en mengde med regulære intensjonale relasjoner over D vil C avbilde X en-entydig og på C"X. Vi skal oppføre dette som en egen sats nedenfor og gi bevis for påstanden.

Anta nå at B=<D,X,In> er en begrepsramme og at B;c er den naturlige klassiske begrepsrammen bestemt av B. Vi ønsker da å definere en funksjon T;c som avbilder CFm(B) inn CFm(B;c). Dette skjer ved den følgende induktive definisjon:

Definisjon 2.8.6 Anta nå at B=<D,X,In> er en begrepsramme og at B;c er den naturlige klassiske begrepsrammen bestemt av B. Da er funskjonen T;c som avbilder Fm(B) inn i Fm(B;c) definert induktivt på følgende måte:

(i) Er α = eb;1,...,b;n en atomær formel der e er et n-ært egenskapsnavn og b;1,...,b;n konstanter eller variabeltegn over B, setter vi T;c(α) = α

(ii) Er α= ¬β ê CFm(B) setter vi T;c(α) = ¬Tc(β)

(iii) Er α,β êCFm(B) setter vi T;c(Cαβ) = CT;c(α)T;c(β)

(iv) Er x et variabeltegn assosiert med B og αêFm(B) setter vi Tc(Axα)=AxT;c(α)

(v) Er i et navn på en intensjonal relasjon over B, a1,...,am konstanter eller variabeltegn over B og α;1,...,α;n êFm(B) setter vi :

T;c(ia;1...a;mα;1...α;n) = q(i)a1, ..., a;m T;c(α,1)...T;c(α;n) der q(i)=<4,m,n,x;c> dersom i=<4,m,n,x>

Vi nevnte ovenfor at C ikke nødvendigvis avbilder X en-entydig på C"X om X er en vilkårlig mengde av intensjonale relasjoner. Men er X en mengde med regulære intensjonale relasjoner er dette tilfellet. Dette fremgår av det følgende teorem:

Teorem 2.8.1 Anta B =<D,X,In> er en regulær begrepsramme. Anta x,y êIn og at x≠y. Da har man at x;c ≠ y;c.

Bevis: Anta x,yêIn. Da har vi at det finnes m,nêN der m>=0 og n> 0 slik at (1) x er en regulær intensjonal relasjon av type <m,n> over D. Videre har vi siden yêIn at det må finnes m',n' êN der m'>=0 og n'>0 slik at (2) y er en intensjonal relasjon av type <m'n'> over D. Anta (3) x≠ y. Det er da to muligheter :

Tilfelle (a): Enten x eller y er identisk med ø-egenskapen, dvs. den egenskapen som har nullmengden som sin ekstensjon i alle mulige verdener. Man ser fra definisjonene vi har gitt av intensjonal relasjon og klassisk intensjonal relasjon at ø-egenskapen er en intensjonal (klassisk intensjonal) relasjon av type <m,n> for *alle* m,n der m>=0, n>0. Er x identisk med ø-egenskapen ser man lett fra definisjonen av x;c at også x;c må være identisk med ø-egenskapen. Videre ser man lett fra samme definisjon at om y er forskjellig fra ø-egenskapen

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

må y;c også være det. I dette tilfelle må vi derfor ha at x;c ≠ y;c hva enten x eller y er ø-egenskapen.

Tilfelle (b): Hverken x eller y er identisk med ø-egenskapen. Da er det igjen to muligheter:

Tilfelle (i) <m,n> ≠ <m',n'>

Tilfelle (ii) <m,n> = <m',n'>

Vi ser her først på Tilfelle (i). ie <m,n> ≠ <m',n'>. Det er da tre muligheter:

(4.1) m=m' & n≠n'

(4.2) m≠ m' & n=n'

(4.3) m≠m' & n≠n'

Det fremgår av definisjonen av x:c at dersom x er en regulær intensjonal relasjon av type <m,n> over D er x;c også en klassisk intensjonal relasjon av type <m,n> over D. Helt tilsvarende: Er x er en regulær intensjonal relasjon av type <m',n'> over D er x;c også en klassisk intensjonal relasjon av type <m',n'> over D. I lys av (4.1) - (4.3) ovenfor og definisjonen av klassisk intensjonal relasjon kan vi ikke da ha x;c = y;c, men må ha x;c ≠ y;c. Satsen holder altså i dette tilfellet.

Tilfelle (ii) <m,n> = <m',n'>. Da har vi at både x og y er regulære intensjonale relasjoner av type <m,n> over D. Siden x≠ y (jmf. (3) ovenfor) må det da finnes en verden wêI der vi har at (5) Ekst;w(x) ≠ Ekst;w(y).

Det må da finnes <<a1,...,an>,<u1,....u;n>>êD^mxU;f^n der vi har:

(6.1) <<a1,...,an>,<u1,....u;n>> ê Ekst;w(x)

(6,2) ¬ (<<a1,...,an>,<u1,....u;n>> ê Ekst;w(y))

Fra (6.1) og definisjonen av x;c følger da at:

(7) <<a1,...,an>,<μ;-1(μ;f(u1)),...., μ;-1(μ;f(u;n))>> ê Ekst;w(x;c)

Anta nå for reduktio ad absurdum at (8) x;c=y;c. Det følger da ved hjelp av (7) at

(9) <<a1,...,an>,<μ;-1(μ;f(u1)),...., μ;-1(μ;f(u;n))>> ê Ekst;w(y;c)

Siden y er en regulær intensjonal relasjon av type <m,n> over D må det da finnes i lys av definisjonen av y;c u';1,...., u';n êU;f slik at

(10) <<a1, ... ,a;n>, <u';1,...., u';n>>ê Ekst;w(y)

og

(11) <<a1,...,an>,<μ;-1(μ;f(u'1)),...., μ;-1(μ;f(u';n))>> =
<<a1,...,an>,<μ;-1(μ;f(u1)),...., μ;-1(μ;f(u;n))>>

Fra (11) følger μ;-1(μ;f(u'i)for)=μ;-1(μ;f(ui)) for i=1, ... ,n og derfor μ;f(u'i) = μ;f(ui) i=1, ...,n. Siden y er regulær følger da

<<a1, ... ,a;n>, <u;1,...., u;n>>ê Ekst;w(y)

Men dette strider åpenbart mot (6.2).

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED.**

Hensikten med våre overlegninger er å vise at det finnes en nær sammenheng mellom det vi ovenfor har kalt regulære begrepsrammer og klassiske begrepsrammer. Den følgende sats viser at vi til enhver utvidet regulær begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte kan konstruere en klassisk begrepsramme som i en viss forstand er ekvivalent.

Teorem 2.8.2 Anta B=<D,X,In> er en regulær begrepsramme. Anta videre at

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

ξ: CFm(B) -(1-1) → U;f , og at <<D,X,In>,ξ> er en utvidet begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. La B;c være den klassiske begrepsrammen bestemt av B. Da har vi for alle wêI og alle αêCFm(B) at følgende holder:

w ⊨;B α ↔ w ⊨;(B;c) T;c(α)

Satsen bevises ved induksjon på lengden av de lukkede formlene over B.

Bevis: Satsen bevises ved induksjon. (a) Anta α er en lukket atomær formel over B. Da har vi at α = ec;1... c;n der e er et egenskapsnavn assosiert med B som betegner en n-ær egenskap (n>=1) og c;1, ... , c;n er konstanter over B. Da har vi:

w ⊨;B α ↔ <(c;1);4, ... , (c;n);4> êEkst;w((e);4) ↔ w ⊨;(B;c) α ↔ w ⊨;(B;c) T;c(α)

Dette viser at satsen holder for atomære formler i CFm(B).

(b) Anta γ,βêCFm(B) og at α=Cγβ . Da har man:

w ⊨;B Cγβ ↔ (w ⊨;B γ → w ⊨;B β)
↔ (w ⊨;(B;c) γ → w ⊨;(B;c) β) (Jmf. induksjonshypotese.)
↔ w ⊨;(B;c) T;c(Cγβ) (Se definisjon av T;c)

Dette viser at satsen holder om α=Cγβ der γ,βêCFm(B).

(c) Anta α=¬β for en eller annen formel βêCFm(B). Da har vi:

w ⊨;B α ↔ w ⊨;B ¬β ↔ ¬(w ⊨;B β)
↔ ¬ (w ⊨;(B;c) T;c(β)) (Jmf. induksjonshypotesen)
↔ w ⊨;(B;c) ¬T;c(β)
↔ w ⊨;(B;c) T;c(¬β) (Se definisjon av T;c)
↔ w ⊨;(B;c) T;c(α)

Dette viser at satsen holder om α=¬β.

(d) Anta α=Πxβ der β ê Fm(B). Da har man

w ⊨;B Πxβ ↔ (Aa)(aêD → w ⊨;B β;x[<2,0,0,a>])
↔ (Aa)(aêD → w ⊨;(B;c) T;c(β;x[<2,0,0,a>])) (IH)
↔ w ⊨;(B;c) ΠxT;c(β)
↔ w ⊨;(B;c) T;c(Πxβ) (Jmf. Definisjon av T;c)

Dette viser at satsen holder om α = Πxβ.

(e) Anta α= i c;1...c;m β;1...β;n der i er navnet på en intensjonal relasjon av type <m,n> over D assosiert med B, c;1, ...,c;n er konstanter assosiert med B og β;1,...,β;n ê CFm(B). Da har vi

(1) w ⊨;B i c;1...c;m β;1...β;n ↔
<<(c;1);4,....,(c;m);4>, <ξ(β;1), ...,ξ(β;n)>>êEkst;w((i);4)

Nå har man etter induksjonshypotesen at

(+) μ;f(ξ(β;i)) = Mg(w: w ⊨;(B;c) T;c(β;i)) (i=1,..., n)

I kraft av definisjonen av c har vi at høyre side i (1) holder hvis og bare hvis

(2) <<(c;1);4,....,(c;m);4>, <μ;-1(μ;f(ξ(β;1))) , ..., μ;-1(μ;f(ξ(β;n)))>>êEkst;w(c((i);4)))

Men fra dette, (+) og definisjonen av "w ⊨;(B;c) α" (Jmf Definisjon2.8.3) har vi at (2) er ekvivalent med:

(3) w ⊨;(B;c) q(i)c;1,...,c;mT;c(β:1),...,T;c(β;n). Men dette er i lys av definisjonen av T;c ekvivalent med w ⊨;(B;c) T;c(ia;1...a;m β;1...β;n) ie w ⊨;(B;c) T;c(α).

Satsen holder defor også i dette tilfellet. **QED**.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Vi har ovenfor tatt vårt utgangspunkt i en regulær utvidet begrepsramme B som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn og vist hvordan vi da kan konstruere en entydig bestemt klassisk begrepsramme B;c som i en viss forstand verifiserer de samme formlene. Grovt og noe unøyaktig kan man si at vi har vist hvordan man til enhver regulær begrepsramme kan konstruere en ekvivalent, entydig bestemt, klassisk begrepsramme som verifiserer de samme formlene assosiert med begrepsrammene. Den presise formuleringen av dette er Teorem 2.8.2.

Man kan nå spørre om man ikke kan gjøre det omvendte, nemlig å vise hvordan man, gitt en klassisk begrepsramme B, kan konstruere på naturlig vis en utvidet regulær begrepsramme B;r som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn og som verifiserer de samme formlene som B.

Dette lar deg faktisk gjøre såvidt vi kan se. Anta x er en klassisk intensjonal relasjon av type <m,n> over D. (Vi forutsetter at domenet D er ikke-tomt) Da definerer vi den intensjonale relasjonen r(x) av type <m,n> over D på følgende vis:

Definisjon 2.8.7 (a) Anta x er en klassisk intensjonal relasjon av type <m,n> over domenet D. Da definerer vi r(x) ved å sette for alle wêI at:

Ekst;w(r(x)) = Mg(<<a;1,...,a;m>,<u;1,...,u;n>> :
u;1,..,u;nêU;f & a;1,...,a;mêD & (Eu';1)...Eu'n)(u';1,...,u':nêU &
Konj/i,1,n/(μ;f(u;i)=μ(u';i)) & <<a;1,...,a;m>, <u';1,...,u';n>>êEkst;w(x)))

(b) Vi betegner med R* mengden av alle de par <x,r(x)> der det finnes m,n, der m>=0 og n>0 slik at x er en klassisk intensjonal relasjon av type <m,n> over D.

Fra denne definisjonen fremgår det ikke uten videre at r(x) er en *regulær* intensjonal relasjon om x er en klassisk intensjonal relasjon. Det fremgår imidlertid fra definisjonen at Ekst;w(r(x)) Inkl D^mx U;f^n for alle wêI og derfor at r(x) er en intensjonal relasjon av type <m,n> over D. At r(x) også er regulær fremgår imidlertid av den følgende sats:

Teorem 2.8.3 Anta x er en klassisk intensjonal relasjon av type <m,n> over D (D≠ø). Da har man at r(x) er en regulær intensjonal relasjon av type <m,n> over D.

Bevis: Anta (1) <<a;1,...,a;n>, <u;1,...,u;n>>êEkst;w(r(x)). Anta videre at (2) Konj/i,1,n/[μ;f(u;i) = μ;f(u';i)] & u';i êU;f for i=1,...,n. Det vil da være tilstrekkelig å bevise at (3) <<a;1,...,a;n>, <u';1,...,u';n>>êEkst;w(r(x)). (Jmf. definisjonen av regulær intensjonal relasjon.) Fra (1) og definisjonen av r(x) følger eksistensen av v;1,....,v;n der man har:

(4) v;1,...,v:nêU & Konj/i,1,n/(μ;f(u;i)=μ(v)) og
(5) <<a;1,...,a;n>, <v;1,...,v;n>>êEkst;w(x)

Fra (2) og (4) følger (6) Konj/i,1,n/[μ;f(u';i) = μ(v;i)]. Men fra (5) og (6) samt definisjonen av r(x) kan vi konkludere med at <<a;1,...,a;n>, <u';1,...,u';n>>êEkst;w(r(x)), mao. (3) holder. Dette viser at satsen holder. **QED**.

Vi må også vise, som tilfellet var med funksjonen c ovenfor, at r er en-entydig. Dette innebærer at vi må vise:

Teorem 2.8.4 Anta x,y er klassiske intensjonale relasjoner over D og at x≠y.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Da har man r(x)≠r(y)

Bevis: Fra definisjonen av r(x) ser man at dersom x er identisk med ø-egenskapen så er også r(x) det om x er en klassiske intensjonal relasjon over D. Videre ser man fra definisjonen av r(x) at dersom x er forskjellig fra ø-egenskapen så er også r(x) forskjellig fra ø-genskapen. Satsen holder derfor om enten x eller y er identisk med ø-egenskapen. Anta begge de intensjonale relasjonene er forskjellige fra nullegenskapen, men ikke er av samme type, den ene er av type <m,n> og den andre av type <m',n'> der <m,n> ≠ <m',n'>. Man ser raskt fra definisjonen av r(x) at dersom x er av type <m,n> så er også r(x) av type <m,n>. Det følger derfor ved hjelp av definisjonen av intensjonal relasjon at r(x) og r(y) må være forskjellige. Det gjenstår bare ett tilfelle og det er at <m,n> = <m',n'>. I dette tilfellet har vi, siden x≠y, at det må finnes a;1,...,a:m êD og u;1,...,u;nêU og wêI slik at

(1) <<a;1,..,a;m>,<u;1,...,u;n>> ê Ekst;w(x) og

(2) ¬(<<a;1,..,a;m>,<u;1,...,u;n>> ê Ekst;w(y))

(Eller omvendt. Vi ser bare på dette tilfellet siden det andre behandles på nøyaktig samme måte, man behøver bare å bytte om på x og y.)

Fra (1) følger det at (3) u;1,..,u;nêU og derfor at det finnes (4) u';1,...,u';n ê U;f slik at

(5) μ;f(u';i) = μ(u;i) for i=1,...,n

Da har vi ved hjelp av definisjonen av r(x) at

(6) <<a;1,..,a;m>,<u';1,...,u';n>> ê Ekst;w(r(x)).

Anta for reduktio ad absurdum at (7) r(x) = r(y). Da følger det ved hjelp av dette og (6) at

(8) <<a;1,..,a;m>,<u';1,...,u';n>> ê Ekst;w(r(y)).

Fra (8) og definisjonen av r(y) følger at det må finne v;1,....,v:n der vi har

(9) v;1,...,v;nêU og

(10) Konj/i,1,n/(μ;f(u';i) = μ(v;i)) samt

(11) <<a;1,..,a;m>,<v;1,...,v;n>> ê Ekst;w(y)

Fra (5) og (10) følger Konj/i,1,n/(μ(u;i) = μ(v;i)) og derfor at v;i = u;i for i=1,...,n. Fra dette og (11) følger så <<a;1,..,a;m>,<u;1,...,u;n>> ê Ekst;w(y). Dette strider åpenbart mot (2). Vi konkluderer derfor med at r(x) ≠ r(y). **QED**.

Anta nå at B=<D,X,In> er en klassisk begrepsramme. Er da xêIn vil x være en klassisk intensjonal relasjon over D av en eller annen type. Dessuten vil r(x) være entydig bestemt. Betrakter vi derfor B;r =<D,X, Mg(r(x): xêIn)> vil Mg(r(x): xêIn) være en mengde med intensjonale relasjoner, mao. vil B;r være en begrepsramme. Det vil også være en regulær begrepsramme. Er B og B;r slik vi nå har beskrevet dem kaller vi B;r for *den naturlige regulære begrepsrammen bestemt av den klassiske begrepsrammen* B.

Det følgende teorem og det neste er av en viss interesse siden det viser at funksjonene c og r i en viss forstand er konverse.

Teorem 2.8.5 Anta x er en klassiske intensjonale relasjoner over D Da har man

c(r(x)) =x

Bevis: Anta wêI er en vilkårlig verden og at (1) zêEkst;w(x). Det følger da at (2) z =<<a;1,...,a;m >,<v;1,...,v;n>> for visse a;1,...,a;m & v;1,...,v;n der vi har

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(3) a;1,...,a;m êD & v;1, ... ,v;n êU. Da må det finnes u;1,...,u:n êU;f slik at
(4) Konj/i,1,n/(μ;f(u;i) = μ(v;i)). Det følger fra (2) - (4) og definisjonen av r(x)
at (5) <<a;1,...,a;m >,<u;1,...,u;n>> ê Ekst;w(r(x)). Siden u;1,...,u;n êU;f følger ved hjelp av definisjonen av "c(x)" at

(6) <<a;1...a;m>, <μ;-1(μ;f(u;1)), ... , μ;-1(μ;f(u;n))>>êEkst;w(c(r(x)). Men fra (5) følger Konj/i,1,n/(v;i = μ;-1(μ;f(u;1))). Fra dette, (6) og (2) følger z êEkst;w(c(r(x)). Dette viser at den ene halvdelen av satsen holder.

Anta på den annen side for vilkårlig z og wêI at (7) zêEkst;w(c(r(x)). Det må da ifølge definisjonen av "c(x)" finnes visse a;1,...,a;m, u;1,...,u;n der vi har

(8) a;1,...,a;m êD & u;1,...,u;nêU;f slik at

(9) z = <<a;1...a;m>, <μ;-1(μ;f(u;1)), ... , μ;-1(μ;f(u;n))>>êEkst;w(c(r(x)) og

(10) <<a;1,...,a;m>,<u;1,...,u;n>> êr r(x)

Men fra (10) og definisjonen av "r(x)" følger da at det finnes (11) u';1,...,u';nêU slik at

(12) Konj/i,1,n/(μ;f(u;i) =μ(u';i) & <<a;1,...,a;m>,<u';1,...,u';n>>êEkst;w(x)

Men fra (12) følger Konj/i,1,n/(μ;-1(μ;f(u;i)) = u';i). Men fra dette, den andre konjunkten i (12), samt (9), kan man slutte zêEkst;w(x).

Vi har nå vist (Aw)(wêI → Ekst;w(c(r(x)) = Ekst;w(x). Fra dette følger c(r(x)) =x. **QED**.

Man kan også bevise en helt analog sats for regulære intensjonale relasjoner. Man har:

Teorem 2.8.6 Anta x er en regulær intensjonal av type <m,n> (m>=0,n>0) over domenet D. Da gjelder r(c(x)) =x

Beviset for denne satsen føres på samme måte som beviset for den forrige satsen. Det skulle derfor ikke være nødvendig å gjennomføre det i detalj.

Det virker som om det følgende er tilfelle i lys av de to teoremene vi nettopp har bevist. Anta B er en klassisk begrepsramme. Anta B;r er den naturlige regulære begrepsrammen bestemt av B. Anta videre at B' er den naturlige klassiske begrepsrammen bestemt av B;r. Det virker da naturlig å tro at B=B'. Dette er faktisk tilfelle. Vi har:

Teorem 2.8.7 Anta B er en klassisk begrepsramme. Anta B;r er den naturlige regulære begrepsrammen bestemt av B. Anta videre at B' er den naturlige klassiske begrepsrammen bestemt av B;r. Da har man:

B=B'

Bevis: Anta (1) B=<D,X,In> er en klassisk begrepsramme. Da har man at

(2) B;r = <D,X, Mg(r(x): xêIn)>. Er den naturlige regulære begrepsrammen bestemt av B. Videre har vi at

(3) B' = <D,X,Mg(c(y): yêMg(r(x): r(x)êIn))>

er den naturlige klassiske begrepsrammen bestemt av B;r. Vi ønsker å bevise (4) B=B'
I lys av (1) - (3) er det tilstrekkelig å bevise:

(5) Mg(c(y): yêMg(r(x): r(x)êIn)) = In

(a) Anta (6) zêMg(c(y): yêMg(r(x): r(x)êIn)) for vilkårlig z. Da må det finnes y slik at

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(7) z=c(y) & yêMg(r(x):xêIn). Da må det også finnes x slik at
(8) z=c(y) & y=c(x) & xêIn. Men fra dette kan man slutte:
(9) z=c(r(x)) & xêIn. Men fra dette og Teorem 2.8.5 følger z=x& xêIn, ie zêIn.

(b) Anta på den annen side zêIn for vilkårlig z. Da finnes x slik at z=x & xêIn. I lys av Teorem 2.8.5 kan man da slutte at z=c(r(x)) & xêIn. Men da må det finnes y slik at z=c(y) & y= r(x) & xêIn. Fra dette følger z=c(y) & yêMg(r(x): xêIn). I sin tur kan man fra dette slutte at zêMg(c(y): yêMg(r(x): r(x)êIn)). Dermed har vi bevist at (5) holder. Det følger at satsen holder. **QED**.

Vi kan formulere et lignende teorem der vi tar utsgansgspunkt i en regulær begrepsramme i stedet for en klassisk begrepsramme:

Teorem 2.8.8 Anta B er en regulær begrepsramme. Anta B;c er den naturlige klassiske begrepsrammen bestemt av B. Anta videre at B' er den naturlige regulære begrepsrammen bestemt av B;c. Da har man:

B=B'

Beviset blir som det ovenfor. Man bare bytter om på c og r. (Med andre ord skriver man "c" overalt hvor det står "r" og "r" overalt hvor det står "c"). Dessuten må man skrive "regulær" der det står "klassisk" og omvendt. Tilslutt må man hevise til Teorem 2.8.6 istedet for Teorem 2.8.5.

Før vi går videre nevner vi den følgende sats som viser at funksjonen T;c som vi definerte i Definisjon 2.8.6 er en-entydig.

Teorem 2.8.9 Anta B=<D,X,In> er en regulær begrepsramme og at B;c=<D,In,Mg(c(x):xêIn)> er den naturlige klassiske begrepsrammen bestemt av B. Da har man :

T;c: Fm(B) -(1-1,på) → Fm(B;c)

Bevis: Vi har tidligere vist at T;c, gitt forutsetningene i teoremet, er en funksjon som avbilder Fm(B) inn i Fm(B,c). Det er også lett å vise at T;c er på Fm(B;c), dvs. at for hver formel β êFm(B;c) finnes det en formel αê Fm(B) slik at β =T;c(α). Det eneste vi derfor gir bevis for her er at T;c er en-entydig. Det vil da være tilstrekkelig å bevise:

(1) α,β êFm(B) & T;c(α) = T;c(β). → α=β.

Dette gjøres ved induksjon på lengden av α.

Tilfelle (i) (2) α = ea;1,...,a;n der e er et egenskapsnavn av type <3,n,0,x> der xêD. Da har vi fra definisjonen av T;c at (3) T;c(α) = α. La oss se på β i dette tilfelle. Vi har at (4) T;c(β) = T;c(α). Da kan formelen T;c(β) ikke begynne med noe annet tegn enn et egenskapsnavn fordi man i motsatt fall vil ha T;c(β) ≠ T;c(α). Det følger at β må starte med et egenskapsnavn e' etterfulgt av variabel/konstant -tegn. Dette innebærer at β = e'a';1....a';r for noe egenskapsnavn e' og visse variabel/konstant-tegn a';1....a';r. Ved hjelp av definisjonen av T;c ser man da at T;c(β) = e'a';1....a';r. Fra dette, (2), (3) og (4) følger

ea;1,...,a;n = e'a';1....a';r. Men da må e=e' , r=n og a;i = a';i for i=1,..,n.

Det følger at α=β. Satsen holder derfor i dette tilfellet.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Tilfelle (ii) Anta α = ¬γ og anta (5) T;c(α)= T;c(β). Da følger ved hjelp av definisjonen av T;c at (6) T;c(α) = T;c(¬γ) = ¬T;c(γ). Fra definisjonen av Fm(B) følger at β må begynne med tegnet ¬ for ellers vil vi ha T;c(β) ≠ T;c(α) som strider mot (5). Vi må derfor ha at β = ¬γ' for noe γ'êFm(B). Det følger i så fall at T;c(β) = ¬T;c(γ'). Fra dette, (5) og (6) følger så ¬T;c(γ) = ¬T;c(γ') og derfor ved hjelp av induksjonshypotesen at γ = γ'. Det følger at α=β. Satsen holder derfor også i dette tilfellet.

Tilfelle (iii) α= Cyδ eller α=Πxγ. Disse tilfellene behandles på samme måte som det foregående tilfellet. Det skulle være en enkel sak å utarbeide detaljene.

Tilfelle (iv) α = i a;1,....a;m γ;1....γ;n der i er et navn på en intensjonal relasjon av typen <m,n>, a;1,...,a;n er variabel/konstant-navn assosiert med B og γ;1,...,γ;n ê Fm(B). Vi antar igjen at (7) T;c(α) = T;c(β) og at satsen holder for alle formler av kortere lengde enn α. I dette tilfelle har vi i lys av definisjonen av T;c, om vi forutsetter i=<4,m,n,x>, at

(8) T;c(α) = i' i a;1,....a;mT;c(γ;1)....T;c(γ;n) der i' = <4,m,n,c(x)>

La oss se β. Siden vi har (9) T;c(α) = T;c(β) må vi nødvendigvis ha at det finnes j, a';1,..,a';r og γ';1 .... γ;k slik at β= j a';1...a';r γ';1 .... γ';k. Da må vi ha at

T;c(β) = j' a';1...a';r T;c(γ';1) .... T;c(γ';k). Men siden T;c(α) = T;c(β) følger, i lys av (8), at j'= i' a;i = a';i (i=1,...,m), r=m. Videre at k=n og T;c(γ;i)=T;c(aγ';i) (for i=1,..,n). Ifølge induksjonshypotesen har vi da γ:i = γ';i (i=1,..,n) og siden j da må være identisk med i følger da at α=β. Dette avslutter beviset. **QED**.

Det følgende teorem er viktig:

Teorem 2.8.10 Anta (i) B=<D,X,In> er en klassisk begrepsramme og at følgende holder:

(ii) (Aα)(αêCFm(B) →

Card(Mg(u: uêU;f & μ;f(u)= Mg(w: w ⊨Bα))) >= Card(CFm(B)))

La B;r være den naturlige regulære begrepsrammen bestemt av B. Da finnes det en funksjon ξ der ξ: CFm(B;r) -(1-1) →U;f slik at <B;r,ξ> representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn og hvor vi dessuten har for alle αêCFm(B;r) og alle wêI at

w ⊨;B T;c(α) ↔ w ⊨;f ξ(α)

Bevis: Anta (1) at B=<D,X,In> er en klassisk begrepsramme og at

(2) (ii) (Aα)(αêCFm(B) →

Card(Mg(u: uêU;f & μ;f(u)= Mg(w: w ⊨Bα))) >= Card(CFm(B)))

Anta tilslutt at (3) B;r er den naturlige begrepsrammen bestemt av B. Vi skal nå under disse forutsetningene vise at konklusjonen i teoremet holder.

Vi definerer først en e ekvivalensrelasjon over CFm(B) i det vi setter at e(α,β) holder hvis og bare hvis α,βêCFm(B) & Mg(w: w ⊨;B α) = Mg(w: w ⊨;B β). Det skulle være lett å vise at denne relasjonen e faktisk er en ekvivalensrelasjon og at den inndeler CFm(B) i en mengde med ikke-tomme, innbyrdes disjunkte ekvivalesmengder som samlet uttømmer CFm(B). Er αêCFm(B) betegner vi ekvivalensmengden til α med hensyn på e med [α];e og setter [α];e = Mg (β: βêCFm(B) & e(β,α)). Med andre ord er [α];e mengden av alle de formler β som er ekvivalente med α. Siden [α];e Inkl CFm(B) har vi at

(+) Card(CFm(B)) >= Card([α];e) om α er med i CFm(B).

Nå kan vi ved hjelp av forutsetningen (2) ovenfor slutte at dersom αêCFm(B) så har vi at

(++) Card(Mg(u: uêU;f &μ;f(u) = Mg(w: w ⊨;B α)) >= Card([α];e).

Dette innebærer at Mg(u: uêU;f &μ;f(u) = Mg(w: w ⊨;B α)) har minst like stor mektighet som

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

[α];e. I sin tur innebærer dette at det er mulig å avbilde [α];e en-entydig inn i Mg(u: uêU;f &μ;f(u) = Mg(w: w ⊨;B α)).

Med andre ord finnes det en avbildning φ der vi har:

φ: [α];e -(1-1)→ Mg(u: uêU;f &μ;f(u) = Mg(w: w ⊨;B α))

På helt tilsvarende vis kan vi for hver ekvivalensmengde [γ];e over CFm(B) konstruere en φ' slik at φ': [α];e -(1-1)→ Mg(u: uêU;f &μ;f(u) = Mg(w: w ⊨;B γ))

Da vil det finnes en funksjon ξ' som er unionen av alle disse φ'-ene og som har de følgende to egenskaper:

(i) ξ' : CFm(B) -(1-1)→ U;f

(ii) (Aα)(αêCFm(B) → μ;f(ξ'(α)) = Mg(w: w ⊨;B α))

Sett nå (4) ξ(α) = ξ'(T;c(α)) for alle αêCFm(B;r). Da har vi

(5) ξ : CFm(B;r) - (1-1)→ U;f

Dette innebærer at vi må vise at <B;r, ξ> oppfyller de krav som stilles i Definisjon 2.2.3 i §2.2 i Del I av vårt arbeid:

(i) Anta α= ea;1...a;n der e er et egenskapsnavn over B;r og a;1,..,a;n er konstanter assosiert med B;r. Da har vi:

$$w \models_{;f} \xi(\alpha) \leftrightarrow w \models_{;f} \xi(ea;1...a;n) \leftrightarrow w \models_{;f} \xi'(T;c(\, ea;1...a;n))$$
$$\leftrightarrow w \models_{;B} T;c(\, ea;1...a;n)) \leftrightarrow w \models_{;B} ea;1...a;n$$
$$\leftrightarrow \langle (a1);4,...,(a;4)\rangle \hat{e}\ Ekst;w((e;4))$$

Dette viser at det første kravet er oppfylt.

(ii) Vi har $w \models_{;f} Id\ a;1a2 \leftrightarrow w \models_{;f} \xi'(T;c(Id\ a;1a;2)) \leftrightarrow w \models_{;B} T;c(Id\ a;1a;2)$
$\leftrightarrow w \models_{;B} Id\ a;1a;2 \leftrightarrow (a;1);4 = (a;2);4$

Dette viser at det tredje kravet i definisjonen er oppfylt.

(iii) $w \models_{;f} \xi(N\alpha) \leftrightarrow w \models_{;f} \xi'(T;c(N\alpha)) \leftrightarrow w \models_{;B} N(T;c(\alpha))$
$\leftrightarrow \neg (w \models_{;B} T;c(\alpha)) \leftrightarrow \neg (w \models_{;f} \xi'(T;c(\alpha))) \leftrightarrow \neg(w \models_{;f} \xi(\alpha))$

(iv) $w \models_{;f} \xi(C\alpha\beta) \leftrightarrow w \models_{;f} \xi'(T;c(C\alpha\beta)) \leftrightarrow$
$w \models_{;B} N(T;c(C\alpha\beta)) \leftrightarrow w \models_{;B} CT;c(\alpha)T;c(\beta)$
$\leftrightarrow (w \models_{;B} T;c(\alpha) \rightarrow w \models_{;B} T;c(\beta))$
$\leftrightarrow (w \models_{;f} \xi'(T;c(\alpha)) \rightarrow w \models_{;f} \xi'(T;c(\beta)))$
$\leftrightarrow (w \models_{;f} \xi(\alpha)) \rightarrow w \models_{;f} \xi(\beta))$

Punkt (iii) og (iv) viser at det fjerde kravet i definisjonen er oppfylt.

(v) $w \models_{;f} \xi(\Pi x\alpha) \leftrightarrow w \models_{;f} \xi'(T;c(\Pi x\alpha)) \leftrightarrow w \models_{;B} T;c(\Pi x\alpha)$
$\leftrightarrow w \models_{;B} \Pi x T;c(\alpha)$
$\leftrightarrow (Az)(z\hat{e}D \rightarrow w \models_{;B} T;c(\alpha);x[\langle 2,0,0,z\rangle])$
$\leftrightarrow (Az)(z\hat{e}D \rightarrow w \models_{;B} T;c(\alpha;x[\langle 2,0,0,z\rangle]))$
$\leftrightarrow (Az)(z\hat{e}D \rightarrow w \models_{;f} \xi'(T;c(\alpha;x[\langle 2,0,0,z\rangle])))$
$\leftrightarrow (Az)(z\hat{e}D \rightarrow w \models_{;f} \xi(\alpha;x[\langle 2,0,0,z\rangle]))$

Dette viser at det femte kravet i definisjonen holder.

(vi) $w \models_{;f} \xi(ia;1..a;m\beta;1...\beta:n)$ (i=<4,m,n,x> for noe xêIn)
$\leftrightarrow w \models_{;f} \xi'(T;c(ia;1..a;m\beta;1...\beta:n))$
$\leftrightarrow w \models_{;f} \xi'(\langle 4,m,n,c(x)\rangle a;1...a;mT;c(\beta;1)...T;c(\beta;n))$

Dette siste holder hvis og bare hvis

(6) $w \models_{;B} \langle 4,m,n,c(x)\rangle a;1...a;mT;c(\beta;1)...T;c(\beta;n)$

Setter vi nå (7) $B;i = \mu;\text{-}1(Mg(w: w \models_{;B} T;c(\beta;i)))$ (i=1,..,n)

holder (6) hvis og bare hvis:

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(8) <<(a;1);4,...,(a;m);4>,<B;1,...,B;n> >êEkst;w(c(x))

Nå har vi at B;i = μ;-1(Mg(w: w ⊨;f ξ'(T;c(β;i)))) (i=1,...,n) som i sin tur er ekvivalent med B;i = μ;-1(μ;f(ξ'(T;c(β;i)))) (i=1,...,n). Dette innebærer at (8) er ekvivalent med:

(9) <<(a;1);4,...,(a;m);4>,<ξ'(T;c(β;1)),...,ξ'(T;c(β;n))> >êEkst;w(x)

(Jmf. definisjonen av funksjonen c). Men (9), er i lys av definisjonen av ξ, ekvivalent med:

(10) <<(a;1);4,...,(a;m);4>,<ξ(β;1),...,ξ(β;n)> >êEkst;w(x)

Dette viser at også det andre kravet i Definisjon 2.2.3 i Del I er oppfylt.

Dermed har vi vist at den utvidete begrepsrammen <B;r, ξ> oppfyller alle kravene som skal til for at den representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Det følgende teorem er beslektet med det vi har bevist ovenfor. Av den grunn er det av en viss interesse.

Teorem 2.8.11 Anta (i) B=<D,X,In> er en klassisk begrepsramme. La B;r være den naturlige regulære begrepsrammen bestemt av B. Anta ξ er en funksjon der:

ξ: CFm(B;r) -(1-1) →U;f

og anta at <B;r, ξ> representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn.
Da har man for alle αêCFm(B;r) og alle wêI at

w ⊨;B T;c(α) ↔ w ⊨;f ξ(α)

Bevis: Anta (1) B=<D,X,In> er en klassisk begrepsramme. Anta (2) B;r er den naturlige regulære begrepsrammen bestemt av B, og anta ξ er en funksjon der:

(3) ξ: CFm(B;r) -(1-1) →U;f

og anta at <B;r, ξ> representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn.
Det vi da må vise for alle αêCFm(B;r) og alle wêI er at

(+) w ⊨;B T;c(α) ↔ w ⊨;f ξ(α)

Dette gjøres ved induksjon på lengden av formlene i Fm(B;r).

Tilfelle (i) α = ea;1,...a;n der e er et egenskapsnavn (av grad n) og a;1,...,a;n er konstanter/variabeltegn assosiert med B;r. Da har man:

w ⊨;f ξ(a) ↔ w ⊨;f ξ(ea;1,...a;n)
↔ <(a;1);4,....,a;n);4>êEkst((e);4)
↔ w ⊨;B ea;1,...a;n ↔ w ⊨B T;c(α).

Satsen holder derfor i dette tilfellet.

Tilfelle (ii) α = Ida;1a;2 for noen konstanter/variabeltegn a;1 og a;2. Da har vi T;c(α) = α og derfor

w ⊨;f ξ(α) ↔ (a;1);4 = (a;2);4)
↔ w ⊨;B Ida;1a;2 ↔ w ⊨;B T;c(α)

Satsen holder derfor i dette tilfellet.

Tilfelle (ii) α = ¬γ. Da har man

w ⊨;f ξ(¬γ) ↔ ¬(w ⊨;f ξ(γ)) ↔ (Induksjonshypotese)
↔ ¬ (w ⊨;B T;c(γ)) ↔ w ⊨;B ¬(T;c(γ))
↔ w ⊨;B (T;c(¬γ)) ↔ w ⊨;B T;c(α)

Også i dette tilfelle holder satsen.

Tilfelle (iii) α = Cβγ. Dette tilfellet behandles på samme måte som det foregående.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Tilfelle (iv) α = Πxβ. Da har vi:

w ⊨;f ξ(α)↔ w ⊨;f ξ(Πxα) ↔ (Aa)(aêD → w ⊨;f ξ(α;x [<2,0,0,a>])
↔ (Aa)(aêD → w ⊨;B T;c(α;x[<2,0,0,a>])) (Induksjonshypotese)
↔ (Aa)(aêD → w ⊨;B T;c(α;x)[<2,0,0,a>])
↔ w ⊨;B Πx(T;c(α)) ↔ w ⊨;B T;c(Πxα)

Også i dette tilfelle holder satsen.

Tilfelle (v) α = ia;1...a;mβ;1...β;n der i er et navn på en intensjonal operator av type <m,n> over B. Da har man:

w ⊨;f ξ(α) ↔ <<(a;1);4,...,(a;m);4 >,<ξ(β;1),...,ξ(β;n) >> ê Ekst;w((i);4) ↔

(+) <<(a;1);4,...,(a;m);4 >,<μ;-1(μ;f(ξ(β;1))),...,μ;-1(μ;f(ξ(β;n)))) >> ê Ekst;w(q(i))

der q(i) =<4,m,n,c((i);4)> (Jmf. definisjonen av funksjonen c).

I lys av induksjonshypotesen har vi

μ;-1(Mg(w: w ⊨;B T;c(β;i)) = μ;-1(Mg(w:w ⊨;f ξ(β;i))) = μ;-1(μ;f(ξ(β;i))) (i=1,...,n)

I lys av definisjonen av ⊨;B har vi derfor at (+) ovenfor holder hvis og bare hvis:

w ⊨B q(i)a;1...a;mT;c(β;1)...T;c(β;n) som i sin tur er ekvivalent med w ⊨B T;c(α).

Satsen holder derfor også i dette tilfellet. **QED**.

Det følgende teorem er av interesse fordi det angir en tilstrekkelig betingelse for at det skal finnes en begrepsramme i utvidet forstand som representerer en del mengde av de finstrukturerte utsagn.

Teorem 2.8.12: Anta B=<D,X,In> er en klassisk begrepsramme der vi har at enhver egenskap over D er med i X. Anta at λ* er en funksjon som oppfyller følgende krav:

(i) λ* : CFm(B) -(1-1) → U;f

(ii) (Aα)(αêCFm(B) → Mg(w: w ⊨;B α) =Mg(w: w ⊨;f λ*(α)))

Da finnes en utvidet begrepsramme B;1 =<<D',X', In*>,ξ> som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn og hvor D'=D og X'=X.

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder. Vi må konstruere en begrepsramme B;1=<D',X", In*>. For dette formål definerer vi en funksjon som til enhver klassisk intensjonal relasjon av type <m,n> i In tilordner denne en intensjonal relasjon av samme type. Er fê(Pt(D^n)^I) er f det vi kaller en ekstensjonsfunksjon. Denne bestemmer entydig en egenskap. Vi betegner den egenskapen som er bestemt av f med Ekst;-1(f). Vi definerer nå φ på følgende måte, dersom g er en klassisk intensjonal relasjon av type <m,n> over D der m>=0 og n>0:

(1) φ(g) = Ekst;-1[λ/wêI/Mg(<a;1,....,a;m,λ*(β;1),....,λ*(β;n)> :
(Eu;1),....,(Eu;n)(Konj/i,1,n/(u;i= μ;-1(Mg(w: w ⊨;B β;i)) &
<a;1,....,a;m,u;1,....,u;n>êEkst;w(g)))]

Det skulle være åpenbart at φ definert på denne måten er en funksjon. Det er imidlertid påkrevd at vi viser at den er en-entydig. Anta derfor for reduktio ad absurdum at g,g' er klassiske intensjonale relasjoner av typen <m,n> over D og at vi har:

(2) φ(g)=φ(g') , men likevel (3) g≠g'

Fra det siste følger at det må finnes en wêI, a;1,....,a;m êD og u;1,...,u;n êU slik at

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(4) <a;1,....,a;m, u;1,....,u;n>êEkst;w(g) og

(5) ¬(<a;1,....,a;m, u;1,....,u;n>êEkst;w(g'))

eller omvendt. Vi ser bare på det tilfellet som har blitt skrevet opp siden beviset i det andre tilfellet blir helt analogt. Nå har vi i lys av forutsetningene at det til ethvert utsagn uêU finnes en formel βêCFm(B) slik at μ(u) = Mg(w: w ⊨;B β). Fra (4) følger det derfor at det må finnes β;1,....,β;n slik at

(6) Konj/i,1,n/(u;i =μ;-1(Mg(w: w ⊨;B β;i)).

Det følger fra dette, (4) og definisjonen (1) at

(7) <a;1,...,a;m,λ*(β;1),....,λ*(β:n)>ê Ekst;w(φ(g)). Men fra dette og (2) følger:

(8) <a;1,...,a;m,λ*(β;1),....,λ*(β:n)>ê Ekst;w(φ(g'))

Fra (8) kan man så ved hjelp av (1) slutte at det må finnes u';1,....,u';n slik at

(9) u';i = μ;-1(Mg(w:w ⊨;B β;i)) (i=1,...,n) & <a;1,....,a;n,u';1,...,u';n>êEkst;w(g')

Men fra (9) og (6) følger ved hjelp av identitetsaksiomet for utsagn at u;i = u';i for i=1,....,n. Fra dette og (9) har man så at <a;1,....,a;n,u;1,...,u;n>êEkst;w(g'). Men dette strider åpenbart mot (5). (2) og (3) kan derfor ikke begge holde. Man kan konkludere med at φ er en-entydig.

Nå setter vi per definisjon: (10) In* = φ " In.

Det følger da at (11) φ : In - (1-1,på)→ In*. Fra den definisjonen som er gitt av φ, nemlig (1), ser man også at φ(x) er en intensjonal relasjon av type <m,n> over D om x er en klassisk intensjonal relasjon av type <m,n> over D. Vi kan nå definere en begrepsramme B;1 ved å sette:

(12) B;1 =<D',X',In*> der D'=D og X'=X

Fra betraktningene ovenfor følger at B;1 faktisk er en begrepsramme. Merk imidlertid at vi ikke fra forutsetningene i satsen og (12) kan slutte at CFm(B) = CFm(B;1). Det motsatte er tilfelle. Det vi derfor skal gjøre er å definere en avbildning h som avbilder Fm(B) en-entydig på Fm(B;1) og hvor restriksjonen til CFm(B) selvfølgelig avbilder denne mengden en-entydig på CFm(B;1). Vi definerer h induktivt på følgende vis:

(a) Er e et navn på en n-ær egenskap assosiert med B og a;1,...,a;n enten navn eller variabeltegn assosiert med B setter vi:
h(ea;1...a;n) = ea;1....a;n

(b) Er a1,a2 enten konstanter assosiert med B eller variabeltegn assosiert med B setter vi h(Ida;1a2)=Ida;1a;2

(c) Er α,βêFm(B) og x et variabeltegn assosiert med B setter vi:
h(Cαβ)= Ch(α)h(β)
h(Nα) =Nh(α)
h(Πxα) = Πxh(α)

(d) Er i et navn på en klassisk intensjonal relasjon av type <m,n> i B, er a;1,...,a;n enten konstanter eller variabeltegn assosiert med B og er β;1,...,β;n formler i Fm(B) setter vi :
h(ia;1...a;mβ;1...β;n) = <4,m,n,φ((i);4)>a;1...a;mh(β;1)...h(β;n)

Det er lett å vise at h: Fm(B) -(1-1,på)→ Fm(B;1). Siden et detaljert bevis bare er langtekkelig utelater vi det her. Vi kan nå definere ξ ved:

(13) ξ = λ/αêCFm(B;1)/(λ*(h;-1(α)))

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Det er lett å se at ξ: Cfm(B;1)-(1-1)→U;f. Det eneste som gjenstår å vise er derfor at <<D',X',In*>,ξ> representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagnene. Dette innebærer at vi må vise at ξ oppfyller de kravene vi ga i definisjonen av en intepretasjonsfunksjon. Vi skal gjøre dette.

Anta e er et navn på en n-ær egenskap i X' og derfor X og at a:1,...,a;n er navn på objekter i D=D. Da har man:

w ⊨;f ξ(ea;1...a;n) ↔ w ⊨;f λ*(h;-1(ea;1,...,a;n))
↔ w ⊨;B h;-1(ea;1...a;n) ↔ w ⊨;B ea;1...a;n
↔ <(a;1);4,....,(a;n);4>ê (e);4

Man merker seg her at vi benytter oss av forutsetningene (i) og (ii) i teoremet.
Anta α = Cβγ og at αêCFm(B;1). Da har man h;-1(Cβγ)=Ch;-1(β)h;-1(γ) siden h er en-entydig. Vi har derfor:

w ⊨;f ξ(Cβγ) ↔ w ⊨;f λ*(h;-1(Cβγ)) ↔ w ⊨;B h;-1(Cβγ) (Jmf. forutsetning (ii))
↔ w ⊨;B Ch;-1(β)h;-1(γ)
↔ (w ⊨;B h;-1(β) → w ⊨;B h;-1(γ))
↔ (w ⊨;f λ*(h;-1(β))) → w ⊨;f λ*(h;-1(γ)))
↔ (w ⊨;f ξ(β) → w ⊨;f ξ(γ))

Tilfellene der α er Nβ eller Πxβ bevises på vesentlig samme måte.

Anta nå at α =ia;1...a;mβ;1...β;n der i er navnet på en intensjonal relasjon av type <m,n> assosiert med B;1. Da har vi

w ⊨;f ξ(ia;1...a;mβ;1...β;n) ↔
w ⊨;f λ*(h;-1(ia;1...a;mβ;1...β;n)) ↔
w ⊨;B h;-1(ia;1...a;mβ;1...β;n) ↔
(14) w ⊨;B <4,m,n,φ;-1((i);4)>a;1...a;m h;-1(β;1)...h;-1(β;n)

Men dette holder i lys av definisjonen av w ⊨;B α som vi har gitt ovenfor hvis og bare hvis

(15) <(a;1);4,....,(a;m);4, q;1,....,q;n>ê Ekst;w(φ;-1((i);4))
der q;i = μ;-1(Mg(w : w ⊨;B h;-1(β;i))) for i=1,...,n.

Men i lys av (1), dvs. definisjonen av φ, holder (15) hvis og bare hvis

<(a;1);4,....,(a;m);4, λ*(h;-1(β;1)),....,λ*(h;-1(β;1))>ê Ekst;w(φ(φ;-1((i);4)))

Men dette er åpenbart, i lys av definisjonen av ξ, ekvivalent med, siden φ er en-entydig:

<(a;1);4,....,(a;m);4, ξ(β;1),....,ξ(β;1)>ê Ekst;w((i);4)

Dette viser at ξ også oppfyller det siste kravet vi stilte i vår tidligere gitte definisjon av intepretasjonsfunksjon. Vi har nå vist at <<D',X',In*>,ξ> representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagnene. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for teoremet. **QED**.

Anta B= <D,X,In> er en klassiske begrepsramme. Da kan man definere en synonymitetsrelasjon over CFm(B) ved å stipulere at dersom α,βêCFm(B) er α synonym med β hvis og bare hvis Mg(w: w ⊨;B α) = Mg(w: w ⊨;B β). Kaller vi mengden av alle verdener w der man har at w ⊨;B α for sannetsmengden til α følger det at to formler er synonyme hvis og bare hvis de har den samme sannhetsmengde. Det skulle være åpenbart at synonymitetsrelasjonen som vi har definert på denne måten er en ekvivalensrelasjon over CFm(B) og at den derfor inndeler CFm(B) i en familie av innbyrdes disjunkte ikke-tomme ekvivalensklasser som samlet uttømmer CFm(B). Forutsatt at X i begrepsrammen B inkluderer mengden av unære egenskaper har vi også at det til ethvert utsagn u finnes en formel αêCFm(B) slik at μ(u) = Mg(w: w ⊨;B α). Omvendt vi sannhetsmengden til enhver

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

formel αêCFm(B) være identisk med sannhetsmengden til et utsagn. Er A en familie av ikke-tomme, innbyrdes uforenelige mengder, skal vi kalle en funksjon som til ethvert element x i A tilordner x en ikke-tom delmengde av x for en utvalgsfunksjon over A. Siden ekvivalensmengdene over CFm(B) bestemt av synonymitetsrelasjonen over CFm(B) er en samling ikke-tomme, innbyrdes disjunkte, mengder er det mulig å betrakte en utvalgsfunksjon over denne mengden. Vi skal kalle en slik utvalgsfunksjon for en reduksjonsfunsjon over begrepsrammen B. Det bør forøvrig bemerkes at enhver utvalgsfunksjon i den betydning vi her har definert er en en-entydig funksjon.

Vi definerer:

Definisjon 2.8.8: Anta B = < D,UN/i,1,inf/(E(D^n)), In> er en klassisk begrepsramme. Med en reduksjonsfunksjon Φ over B forstås en funksjon som oppfyller følgende to krav:

(i) Φ: U → Pt(CFm(B))

(ii) (Au)(uêU → ø≠ Φ(u) Inkl Mg(β: βêCFm(B) & Mg(w: w ⊨;B β) = μ(u))))

Anta i er en klassisk intensjonal relasjon av type <m,n> i den klassiske begrepsrammen B= <D,UN/i,1,inf(E(D^n)), In>. Anta Φ er en reduksjonsfunksjon over B i den betydningen vi har definert ovenfor. Siden i er en klassisk intensjonal relasjon av type <m,n> er ekstensjonen til i i verdenen w et ordnet par av typen <<a;1,...,a;m>,<u;1,...,u;n>> der a;1,....,a;m êD og hvor u;1;... ,u;n er utsagn, det vil si elementer i mengden U. Vi tenker oss nå at vi erstatter dette paret med mengden av alle par av typen <<a;1,...,a;m>, <β;1,...,β;n>> der vi har at β;i êCFm(B) & β;iêΦ(u;i) for I=1,...,n. Gjør vi dette for alle andre par <<a;1,...,a;m>,<u;1,...,u;n>> som er med i ekstensjonen til i i verdenen w og summerer sammen de enkelte mengder vi genererer på denne måten får vi en mengde X som er inkludert i D^m x (CFm(B))^n. Utfører vi så denne operasjonen for enhver verden wêI vil vi sitte igjen med en funksjon f der f: I → Pt(D^m x (CFm(B))^n). Siden denne funksjonen er entydig bestemt av reduksjonsfunksjonen Φ og den intensjonale relasjonen i kaller vi den for Φ-reduksjonen av i . Tenker vi oss at Φ(u) er lik mengden av alle de formler i CFm(B) hvis sannhetsmengde er identisk med sannhetsmengden til u vil Φ-reduksjonen av av den intensjonale relasjonen i i det vesentlige være identisk med φ(i) som vi definerte i beviset for forrige teorem.

Overveielsene ovenfor er motivet bak den følgende definisjon:

Definisjon 2.8.9: Anta B = < D,UN/i,1,inf/(E(D^n)), In> er en klassisk begrepsramme og at Φ er en reduksjonsfunksjon over B. Anta i er en klassisk intensjonal relasjon av typen <m,n> som er med i In. Med Φ-reduksjonen av i, i symboler F;Φ(i) forstår vi da funksjonen f der vi
har (a) f : I → Pt(D^m x (CFm(B)^n) og hvor (b) man har for alle wêI, alle <a;1,...,a;m>êD^m og alle β;1,...,β;nêCfm(B) at <<a;1,...,a;m>,<β;1,...,β;n>>êf(w) hvis og bare hvis det finnes u;1,...,u;nêU der Konj/i,1,n/(β;iêΦ(u;i)) og

<<a;1,...,a;m>,<u;1,...u;n>>êEkst;w(i).

Man kan vise at Φ;F er en en-entydig funksjon om Φ er en reduksjonsfunksjon over en klassisk begrepsramme B = < D,UN/i,1,inf/(E(D^n)), In>. Vi har:

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Teorem 2.8.13: Anta B = < D,UN/i,1,inf/(E(D^n)), In> er en klassisk begrepsramme og at Φ er en reduksjonsfunksjon over B. Da har man at F;Φ er en-entydig funksjon.

Bevis: Anta B = < D,UN/i,1,inf/(E(D^n)), In> er en klassisk begrepsramme og at Φ er en reduksjonsfunksjon over B. Det fremgår direkte av den definisjonen vi har gitt av F;Φ at det dreier seg om en funksjon der domenet er mengden In. Det vil derfor være tilstrekkelig å bevise at dersom i;1 og i;2 er to elementer i In og F;Φ(i;1) = F;Φ(i;2) så er i;1=i;2. Anta derfor (1) i;1,i;2êIn & F;Φ(i;1)= F;Φ(i;2) og anta for reduktio ad absurdum at (2) i;1 ≠ i;2. Fra (2) følger det, siden i;1,i;2 er intensjonale relasjoner at det må finnes en verden w0 der vi har (3) w0êI og (4) Ekst;w0(i;1) ≠ Ekst;w0(i;2). Fra dette kan vi i sin tur slutte at det må finnes noe x der man har

(4.1) xêEkst;w0(i;1) & ¬ (xêEkst;w0(i;2) eller omvendt. Vi ser bare på det første tilfellet siden beviset i det andre tilfelle blir helt analogt. Siden i;1 êIn har man at det må finnes m,n slik at i;1 er en klassisk intensjonal relasjon av type <m,n>. (m>=0, n>0). Fra dette og (4.1), samt definisjonen av klassisk intensjonal relasjon, kan man slutte at det må finnes a;1,...,a;m êD og u;1,...,u;n êU slik at x=<<a;1,...,a;m>,<u;1,...u;n>>. I sin tur impliserer dette sammen med (4.1) at det følgende holder:

(5.1) <<a;1,...,a;m>,<u;1,...u;n>> êEkst;w0(i;1)

(5.2) ¬(<<a;1,...,a;m>,<u;1,...u;n>> êEkst;w0(i;2))

Fra (5.1) følger at u;1,...,u;n êU siden i;1 er en intensjonal relasjon. Siden Φ er en reduksjonsfunksjon over B må det da finnes β;1,....,β;n êCFm(B) slik at β;i êΦ(u;i) for i=1, ...,n. Fra dette, (5.1) og definisjonen av F;Φ kan man slutte:

(6) <<a;1,...,a;m>,<β;1,....,β;n>>êF;Φ(i;1)(w0) & β;i êΦ(u;i) (i=1,...,n)

Fra dette og (1) følger så i sin tur: (7) <<a;1,...,a;m>,<β;1,....,β;n>>êF;Φ(i;2)(w0)

Herav kan man så ved hjelp av definisjonen av F;Φ slutte at det må finnes u';1,....,u';n der vi har (8) <<a;1,...,a;m>,<u';1,...u';n>> êEkst;w0(i;2) & β;i êΦ(u';i) (i=1,...,n)

Men fra de to siste konjunktene i (6) og (8) følger:

(8.1) β;iêΦ(u;i) & β;iêΦ(u';i) for i=1, ...n.

Fra definisjonen av Φ følger:

(8.2) Φ(u;i) Inkl Mg(β: βêCFm(B) & Mg(w: w ⊨;B β) = μ(u;i)) &
Φ(u';i) Inkl Mg(β: βêCFm(B) & Mg(w: w ⊨;B β) = μ(u';i)) for i=1,...,n

Nå har man at (8.1) og (8.2) impliserer:

Mg(w: w ⊨;B β;i) = μ(u;i) & Mg(w: w ⊨;B β;i) = μ(u';i) i=1,...,n

Men herav kan man slutte μ(u;i) =μ(u';i) og derfor u;i = u';i for i=1,..n. Dette og (8) impliserer åpenbart at <<a;1,...,a;m>,<u;1,...u;n>> êEkst;w0(i;2). Dette strider imidlertid mot (5.2). Dette (4.1) er umulig. At xêEkst;w0(i;2) & ¬ (xêEkst;w0(i;1) er umulig vises på helt analogt vis. Det følger at i;1=i;2. **QED**.

Definisjon 2.8.10: Med en utvidet klassisk begrepsramme forstår vi en struktur R= <D, UN/n,1,inf/(E(D^n)),In, F;Φ,In*> der B=<D, UN/n,1,inf/(E(D^n)),In> er en klassisk begrepsramme,Φ en reduksjonsfunksjon over B og In*= F;Φ" In. In* er med andre ord bildet av In over funksjonen F;Φ.

I tillegg til denne definisjonen trenger vi ytterligere en definisjon som definerer en sannhetsrelasjon ⊨;R Inkl IxCFm(B) i forbindelse med en utvidet klassisk begrepsramme. Definisjonen er denne:

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Definisjon2.8.7 : Anta R= <D, UN/n,1,inf/(E(D^n)),In, F;Φ,In*> er en utvidet klassisk begrepsramme. Sett B=< D, UN/n,1,inf/(E(D^n)),In>. Vi definerer da "w ⊨;R α" der wêI og αêCFm(B) på følgende måte:

(a) Er a1,a2 konstanter assosiert med B og wêI setter vi:
w ⊨;R Ida;1a,2 ↔ (a;1);4 = (a;2);4

(b) Er e et navn på en nær egenskap assosiert med B og a;1,...,a;n n konstanter assosiert med B og wêI setter vi:
w ⊨;R ea;1...a;n ↔ <(a;1);4,....,(a;n);4>ê Ekst;w((e);4)

(c) Er i navn på en intensjonal relasjon av type <m,n> assosiert med B, a;1,...,a;m konstanter assosiert med B og β;1,....,β;nêCFm(B) setter vi, om wêI:
w ⊨;R ia;1...a;mβ;1...β;n ↔ <(a;1);4,...,(a;m);4, β;1,.....β;n>êF;Φ((i);4)(w)

(d) Er α,β êCFm(B) og wêI setter vi:
w ⊨;R Cαβ ↔ (w ⊨B α → w;B β)
w ⊨;R Nα ↔ ¬(w ⊨;

(e) Er α=Πxβ êCFm(B) og wêI setter vi:
w ⊨;R Πxβ ↔ (Aa)(aêD → w ⊨;R β;x[<2,0,0,a])

Dermed har vi gitt en fullstendig definisjon av sanhhetsrelasjonen ⊨;R om R er en utvidet klassisk begrepsramme.

Det følgende teorem, som er det siste i dette avsnittet angir igjen en tilstrekkelig betingelse for at det skal finnes en utvidet begrepsramme som representerer mengden av finstrukturerte utsagn:

Teorem 2.8.14: Anta (i) R= <D, UN/n,1,inf/(E(D^n)),In, F;Φ,In*> er en utvidet klassisk begrepsramme. Sett B= <D, UN/n,1,inf/(E(D^n)),In>. Anta videre at (ii) U;f = CFm(B) og at (iii) sannhetsrelasjonen ⊨;R = ⊨;f. La H være mengden av egenskaper hvor ekstensjonsfunksjonene utgjøres av funksjonene i In*. Da finnes en funksjon ξ slik at <<D, UN/n,1,inf/(E(D^n)),H>,ξ> representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagnene.

Bevis: Fra forutsetningene skulle det klart fremgå, om vi setter B;1=<D, UN/n,1,inf/(E(D^n)),H>, at B;1 er en begrepsramme og at det finnes en en-entydig avbildning av H på In*, det vil si en funksjon ψ som oppfyller følgende krav:

(1) ψ: H -(1-1,på) → In*

(2) Er x en egenskap i H finnes det en m+n'ær funksjon y i In* (m>=0,n>0) slik at Ekst(x) = ψ;-1(y)

Siden B;1 er en begrepsramme er CFm(B;1) de lukkede formlene bestemt av B;1. Vi definerer nå induktivt en avbildning ξ' av Fm(B;1) på Fm(B) på følgende måte:

(3.1) Er a;1,a;2 konstanter eller variabler assosiert med B;1 setter
ξ'(Ida;1a;2) = Ida;1a;2

(3.2) Er e et navn på en n-ær egenskap assosiert med B;1 og er a;1,...,a;m konstanter eller variabler assosiert med B;1 setter vi:
ξ'(ea;1,...,a;m)=ea;1...a;m

(3.3) Er i et navn på en intensjonal relasjon av type <m,n> assosiert med B;1, a;1,..,a;m enten konstanter eller variabler assosiert med B;1 og

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

β;1,...,β;n êFm(B;1) setter vi:

ξ'(ia;1...a;mβ;1...β;n)=

<4,m,n,F;Φ;-1(ψ((i);4))>a;1...a;mξ(β;1)...ξ(β;n)

(3.4) Er α,βêFm(β;1) og x et variabeltegn assosiert med B;1 setter vi:

ξ'(Cαβ)=Cξ(α)ξ(β)

ξ'(Nα)=Nξ(α)

ξ'(Πxα)=Πxξ(α)

Det er lett å vise at ξ' avbilder Fm(B;1) en-entydig på Fm(B). Vi lar nå ξ være restriksjonen av ξ' til CFm(B;1). Da har man selvfølgelig at ξ avbilder CFm(B;1) en-entydig på CFm(B).

For å fullføre beviset vil det derfor være tilstrekkelig å vise at ξ oppfyller de kravene som stilles til en intepretasjnsfunksjon assosiert med en begrepsramme og som er slik at den sammen med bgrepsrammen representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. La oss vise at ξ oppfyller disse kravene. Vi gjør dette under punkt (a) - (f):

(a) Anta e er et navn på en n-ær egenskap assosiert med B;1 og at a;1,...,a;n er konstanter assosiert med B;1. Da har man:

w ⊨;f ξ(ea;1...a;n) ↔ w ⊨;f ea;1...a;n (definisjon av ξ)

↔ w ⊨;R ea;1....a;n (forutsetning ⊨;R = ⊨;f)

↔ <(a;1);4,....,(a;n);4>êEkst;w((e;4)) (definisjon av ⊨;R)

(b) Anta a;1,a;2 er konstanter assosiert med B;1. Da har man:

w ⊨;f ξ(Ida;1a;2) ↔ w ⊨;f Ida;1a;2 (definisjon av ξ)

↔ w ⊨;R Ida;1a;2 (forutsetning ⊨;R= ⊨;f)

↔ (a;1);4 = (a;2);4 (definisjon av ⊨;R)

(c) Anta α,β êCFm(B;1) Da har vi:

w ⊨;f ξ(Cαβ) ↔ w ⊨;f Cξ(α)ξ(β) (definisjon av ξ)

↔ w ⊨;R Cξ(α)ξ(β) (forutsetning ⊨;R = ⊨;f)

↔ (w ⊨;R ξ(α) → w ⊨;R ξ(β)) (definisjon av ⊨;R)

↔ (w ⊨;f ξ(α) → w ⊨;f ξ(β)) (forutsetning ⊨;R = ⊨;f)

(d) Anta α êCFm(B;1) Da har vi:

w ⊨;f ξ(Nα) ↔ w ⊨;f Nξ(α) (definisjon av ξ)

↔ w ⊨;R Nξ(α) (forutsetning ⊨;R = ⊨;f)

↔ ¬(w ⊨;R ξ(α)) (definisjon av ⊨;R)

↔ ¬(w ⊨;f ξ(α)) (forutsetning ⊨;R = ⊨;f)

(e) Anta x er et variabeltegn og at ΠxαêCFm(B;1). Da har vi:

w ⊨;f ξ(Πxα) ↔ w ⊨;f Πxα (definisjon av ξ)

↔ w ⊨;R Πxα (forutsetning ⊨;R = ⊨;f)

↔(Aa)(aêD→ w ⊨;R α;x[<2,0,0,a>]) (definisjon av ⊨;R)

↔ (Aa)(aêD→ w ⊨;f α;x[<2,0,0,a>]) (forutsetning ⊨;R = ⊨;f)

(f) Anta i er et navn på en intensjonal relasjon av type <m,n> i H, at a;1,...,a;n er konstanter assosiert med B;1 og at β;1,...,β;nêCFm(β;1). Da har vi:

w ⊨;f ξ(ia;1...a;mβ;1...β;n) ↔

w ⊨R <4,m,n,F;Φ;-1(ψ((i);4))>a;1...a;mξ(β;1)...ξ(β;n) (definisjon av ξ, ⊨;R= ⊨;f)

↔ <(a;1);4,....(a;m);4,ξ(β;1),....,ξ(β;n>êF;Φ(F;Φ;-1(ψ((i);4)))(w)

↔ <(a;1);4,....(a;m);4,ξ(β;1),....,ξ(β;n>ê ψ((i);4))(w) (F;Φ en-entydig)

↔ <(a;1);4,....(a;m);4,ξ(β;1),....,ξ(β;n>Ekst;w((i);4). (definisjon av ψ)

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Det vi nå har vist under punktene (a) - (f) viser at ξ oppfyller kravene som stilles for at en intepretasjonsfunksjon ξ assosiert med en begrepsrammme B skal være slik at <B,ξ> representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn.

Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Vi har nå presentert de viktigste resultatene vi har oppnådd om forholdet mellom det vi på den ene side kalte begrepsrammer og som vi i detalj gjorde rede for i §2.1 - §2.6, og det som vi på den annen side kalte klassiske begrepsrammer som vi introduserte i §2.7 og den første delen av denne paragrafen. La oss nå, med fare for å komme med noen gjentagelser, noe som kan virke trettende og utmattende på utålmodige lesere, gi et kort resume av hovedresultatene.

Vi har avgrenset en spesiell klasse av begrepsrammer, det vi har kalt regulære begrepsrammer. Er B=<D,X,In> en regulær begrepsramme har vi vist hvordan man entydig kan definere den klassiske begrepsrammen B;c = <D,X, In;c> som er bestemt av begrepsrammen B. Er B og B;c som ovenfor har vi også vist hvordan man induktivt kan definere en funksjon T;c som avbilder CFm(B) en-entydig og på CFm(B;c). Vårt første hovedresultat er da dette: Er B=<D,X,In> en regulær begrepsramme, ξ en intepretasjonsfunksjon assosiert med B og har vi videre at <B,ξ> representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn så har vi for alle wêI og alle αêCFm(B) at

$w \models ; B\ \xi(\alpha) \leftrightarrow w \models ;B;c\ T;c(\alpha)$

der B;c er den naturlige klassiske begrepsrammen bestemt av B

Er nå på den annen side B = <D,X,In> en klassisk begrepsramme definerte vi hva som mentes med den regulære begrepsrammen B;r = <D,X, In;r> bestemt av B. Det andre hovedresultatet er da at dersom B=<D,X,In> er en klassisk begrepsramme og B;r = <D,X, In;r> er den regulære begrepsrammen bestem av B så finnes det en intepretasjonsfunksjon ξ assosiert med B;r slik at den utvidete begrepsrammen <B;r> representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn og der vi har for alle αêCFm(B;r) og alle wêI at $w \models B;r\ \xi(\alpha) \leftrightarrow w \models B\ T;c(\alpha)$. Dette resultat holder med et visst forbehold som vi har gjort rede for ovenfor.

Dermed har vi gitt et resyme av kjerneresultatene i denne paragrafen.

§3 En kortfattet oppsummering av innholdet i denne delen.

Vi har i denne delen, Del I, av vårt arbeid fremsatt en temmelig omfattende teori. Vi har nøyaktig spesifisert de primitive predikatene og de grunnsetningene vi finner rimelige for de primitive predikatene vi har spesifisert. Det bør imidlertid bemerkes at den teorien vi så langt har detaljert angitt ikke i seg selv er noen form for kunnskapsteori. Vi har ikke på noe sted ovenfor sagt noe om viten, sanseiaktagelse eller hva vitenskapelig kunnskap består i. Heller ikke har vi sagt noe om hvordan ny kunnskap kan oppnås, eller for eksempel noe om hvordan en teori kan testes. Heller ikke har vi innført ytterligere predikater som gjør en istand til å fremsette påstander om slike ting.

Hvis man kortfattet skulle sammenfatte det vi har gjort i denne første delen av vårt arbeid kunne man si at vi har fremstilt hovedtrekkene i en generell teori om mengder, egenskaper, utsagn og finstrukturerte utsagn. Dette har vi gjort ved å ta vårt utgangspunkt i et vanlig predikatlogisk språk med identitet som inneholder allkvantoren, eksistenskvantoren, de

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

vanlige setningslogiske konnektivene og identitetspredikatet. Det ikke-logiske vokabularet til dette språket inneholder så langt bare de følgende predikater, som vi ikke definerer og som derfor må ansees som primitive predikater. Det dreier seg om: (1) " x er en mengde", (2) " x er et element i mengden y", (3) "x er en egenskap av grad n", (4) " x har egenskapen y i verdenen w", (5) "x er en mulig verden", (6) "x er et utsagn", (7) "x er et finstrukturert utsagn", (8) "w er en verden der utsagnet x er sant" og (9) "x er en verden der det finstrukturerte utsagnet x er sant". Dette er de primitive predikatene som inngår i vår teori så langt[39]. Alle de andre begrepene vi har innført i denne første delen av vårt arbeid er definert ved hjelp av disse primitive predikatene.

I tillegg til å spesifisere disse predikatene har vi også formulert en rekke grunnsetninger for dem. Disse faller i fire klasser: For det første har vi de mengdeteoretiske aksiomene for predikatene (1) og (2). Dette er i det vesentlige det sett av aksiomer som inngår Zermelo-Fraenkel systemet utvidet med utvalgsaksiomet, men modifisert slik at vi tillater eksistensen av entiteter som ikke er mengder, dvs. det vi kaller urindivider. For det andre har vi de utsagnsteoretiske aksiomene, U1 - U4, som representerer de grunnleggende setningene om utsagn og mulige verdener. Disse grunnsetningene impliserer at mengden av mulige verdener eksisterer og at den er minst tellbart uendelig. For det tredje har vi de egenskapsteoretiske aksiomene EG1 - EG7. Disse aksiomene impliserer at enhver egenskap er entydig bestemt av sin ekstensjonsfunksjon, dvs. den funksjonen som til enhver mulig verden w tilordner denne mengden av alle de entitetene som har egenskapen i denne verdenen w. Endelig har vi grunnsetningene om de finstrukturerte utsagnene, aksiomene FU1 - FU4.

I §1.3 har vi vist endel satser som karakteriserer forholdet mellom utsagn og finstrukturerte utsagn. I de etterfølgende paragrafer (§1.4 - §1.5) har vi definert hva som menes med en rasjonelt organisert mengde med utsagn og også hva som menes med en rasjonelt organisert mengde med finstrukturerte utsagn og bevist et teorem som viser sammenhengen mellom disse to begrepene.

Noe av det viktigste i Del I har vært introduksjonen av begrepet 'begrepsramme'. Dette begrepet spillt en betydelig rolle i denne delen av vårt arbeid. Det vil også spille en fremtredende rolle i resten av dette arbeidet. Vi har vist en rekke satser om begrepsrammer og spesielt sett på hvordan begrepsrammer er forbundet med det vi kalte *klassiske begrepsrammer*.

La oss avslutte med noen ord om *urindivider* og hva som eventuelt kan sies om entitetene i denne klassen. Som man husker er et urindivid definert som en entitet som ikke er en mengde. Blant aksiomene i vår versjon av ZFC-systemet, som har to primitive predikater, "x er en mengde" og "x er et element i mengden y" har vi lagt til det vi har kalt "mengde-aksiomet" som sier at dersom noe er et element i mengden x så er faktisk x en mengde.

En rekke spørsmål kan stilles om urindividene. Det virker opplagt at ikke alt er mengder. Det skulle derfor være klart at det finnes urindivider. Et annet spørsmål er om mengden av alle urindivider finnes. Når det gjelder utsagn, egenskaper, finstrukturerte utsagn og mulige verdener er det ingen opplagt sak at disse entitene skulle være mengder. Det virker rimeligere å si om for eksempel en egenskap er en ikke-mengde, dvs. et urindivid, og det samme kan sies om utsagn, mulige verdener og finstrukturerte utsagn. Dette er riktig nok abstrakte entiteter, men det forhindrer ikke at de er ikke mengder. Regnes de nevnte størrelser som urindivider er det imidlertid mulig å vise at det ikke kan finnes noen mengde som er identisk med mengden av urindivider.

39 Dvs. den teorien som har blitt formulert så langt i Del I.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Del II

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

DEL II

§1 Den grunnleggende kunnskapsteorien.

Vi definerte presist teorien om presise deskriptive utsagn, finstrukturerte utsagn og egenskaper, eller kortere "teorien om utsagn og egenskaper", ovenfor. Dette var teorien ZFCu(L;e(Δ;0UΓ UΓ;1))[θ;0 U θ;1 U θ;2]. La oss minne om hva de enkelte symboler i denne teksniske og formaliserte definisjonen av teorien står for. Som man husker står L;e for språket til mengdelære med andre ord det predikatlogiske språket med identitet som utelukker inneholder predikatene "x er en mengde" og "x er et element i mengden y" som ikke-logiske predikater. Utvider man nå L;e med predikatene hentet fra en viss mengde med predikater Δ betegner L;e(Δ) denne utvidelsen av språket L;e. Når det gjelder Δ;0 betegner dette, som man husker, mengden som inneholder de følgende tre predikater, nemlig "x er et presist deskriptivt utsagn", " x er en logisk mulig verden" og "x er en logisk mulig verden der utsagnet x er sant". L;e(Δ;0) er derfor språket til den teorien om presise deskriptive utsagn. Vi minner så om at Γ var den mengden med predikater som inneholder de følgende tre, nemlig predikatet "x er en egenskap av grad y", predikatet "x har egenskapen i y verdenen w" og endelig predikatet "x er et mulig individ". Le;(Δ;0 U Γ) er derfor språket til vår teori om egenskaper. Endelig betegner Γ;1 den predikat mengden som kun inneholder predikatene "x er et finstrukturert utsagn" og "w er en mulig verden hvor det finstrukturerte utsagn y er sant". Dette innebærer at L;e(Δ;0 U Γ U Γ;1) er språket til den teorien om utsagn og egenskaper som vi har arbeidet innenfor så langt.

La oss videre minne om at θ;0 er mengden som inneholder lukningene av aksiomene U1 -U4, θ;1 er mengden som inneholder lukningene av EG1 - EG7, med andre ord aksiomene om egenskaper. Endelig er θ;2 mengden som inneholder lukningene av aksiomene om finstrukturerte, med andre ord lukningene av FU1 - FU4 som vi presenterte tidligere.

Det kan være hensiktsmessig å sammenfatte før vi går videre. La oss sette Δ = Δ;0 U Γ U Γ;1. Da er Δ summen av predikatmengdene vi har nevnt ovenfor. La oss videre sette per definisjon θ = θ;0 U θ;1 U θ;2. Da er θ unionen av de utsagnsteoretiske aksiomene, aksiomene om egenskaper og aksiomene om finstrukturerte utsagn. Gitt disse definisjonene er derfor den teorien som vi har arbeidet med så langt ZFCu(L;e(Δ))[θ], alstå den minste mengden av formler i L;e(Δ) som for det første inneholder alle de predikatlogiske og identitetsaksiomene i L;e(Δ), som for det andre inneholder alle ZFCu-aksiomene over L;e(Δ), som for det tredje inneholder alle akiomene som er med i θ og som endelig er lukket under de to slutningsreglene modus ponens og universell generalisering.

Som man ser er denne teorien ingen teori som direkte dreier seg om noe som har med viten å gjøre. For å kunne si noe om viten, og hvordan viten henger sammen med slike ting som tro, sanseiaktagelse hukommelse, innsikt, meddelelse og sannhet, må teorien naturligvis utvides med en lang rekke nye predikater. Først da blir det mulig å kunne formulere noe som ligner en systematisk teori som dreier seg om disse ting.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

I det neste avsnittet skal vi gi en detaljert liste over de nye predikatene vi vil utvide språket til teorien om utsagn og egenskaper, L;e(Δ), med. Dernest vil vi i de neste avsnitt detaljert gjøre rede for de nye grunnsetningene i dette språket som vi vil legge til teorien ZFCu(L;e(Δ))[θ].

§1.1 Avgrensning av språket til den kunnskapsteorien vi vil undersøke.

Språket til den teorien om egenskaper, finstrukturerte utsagn og utsagn som vi har arbeidet med så langt er altså, om vi benytter notasjonen i forrige avsnitt L;e(Δ). Vi får språket til den kunnskapsteorien vi etterhvert skal undersøke ved å utvide dette språket med de følgende predikater:

(i) "x er et tidspunkt" - "Tp(x)"
(ii) "x er et tidspunkt som kommer før tidspunktet y" - "x <;f y"
(iii) "x er en person" - "Pers(x)"
(iv) "y er et forhold som personen x tror foreligger ved tidspunktet t i verdenen w" -"Tror;(w,t)(x,y)"
(v) "y er et forhold som personen x vet foreligger ved tidspunktet t i verdenen w" - "Vet;(w,t)(x,y)"
(vi) "y er et finstrukturert utsagn som personen x ved tidspunktet t i verdenen w innser at er sant" - "Innse;(w,t)(x,y)"
(vii) "x er en person som innser ved tidspunktet t i verdenen w at z følger fra y" -"Inns;(w,t)(x,z,y)"
(viii) "y er et forhold som personen x ser foreligger ved tidspunktet t i verdenen w" - "Ser;(w,t)(x,y)"
(ix) "y er et forhold som personen x ved tidspunktet t husker at foreligger i verdenen w" - "Husk;(w,t)(x,y)"
(x) "z beskriver et forhold som personen x meddeler personen y ved tidspunktet t i verdenen w" - "Med;(w,t)(x,y,z)"

La oss kalle den mengden med predikater som inneholder predikatene (i) - (x) og bare dem for Γ;2. Da er det språket vi hovedsakelig vil arbeide innenfor i det følgende L;e(Δ) utvidet med predikatene i Γ;2, med andre ord vil det være språket L;e(ΔUΓ;2). La oss så vende oss mot grunnsetningene som vi vil formulere i dette språket og som samlet utgjør grunnlaget for teorien.

§1.2 Grunnsetninger i kunnskapsteorien

I dette avsnittet skal vi gjøre rede for de setningene i L;e(ΔUΓ;2) som det synes mest naturlig å ta sitt utgangspunkt i om man ønsker å formulere en systematisk teori om viten. Disse setningene er naturligvis ikke vilkårlig valgt ut. Vi prøver i den utstrekning det er mulig å finne frem til setninger som det er umulig å finne noe motseksempel til, som er av en slik art at man når man tenker etter finner man at negasjonen av dem ikke gir noen mening, kort sagt søker vi etter setninger som er av en nødvendig og apodiktisk karakter.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

La oss nå starte med de tre første predikatene på listen vi presenterte i forrige avsnitt. Når det gjelder predikatet "x er en person" er det rimelig å tenke seg at mengden av alle de entiteter dette predikatet er sant om faktisk finnes. Det virker eiendommelig å benekte dette. Vi skal derfor regne den følgende setning som en grunnsetning:

P1 $(Ex)(M(x)\& (Ay)(y\hat{e}x \leftrightarrow Pers(y)))$

Som man ser uttrykker denne formelen at det finnes en mengde hvis medlemmer er personer og som kun inneholder personer. Det virker også rimelig å tenke seg at hver enkelt person ikke er noen mengde. I så fall må man oppfatte personer som ikke-mengder. Naturligvis er dette ytterst rimelig. Personer kan lide, død, foreta slutninger, handle og sette seg mål. Mengder kan ikke noen av disse ting. Vi kunne derfor også legge til som en grunnsetning formelen $(Ax)(Pers(x) \rightarrow \neg M(x))$. Når vi ikke gjør dette formelt er det fordi vi ikke har bruk for denne påstanden i de betraktninger og resonnementer vi etterhvert skal utvikle.

La oss nå se på predikatene "x er et tidspunkt" og "x er et tidspunkt som kommer før tidspunktet y", som vi , som man ser fra forrige avsnitt, forkorter med henholdsvis "Tp(x)" og "x <;f y". Det virker merkelig om man skulle benekte at mengden av tidspunkter finnes. Av denne grunn virker det ytterst naturlig å inkludere følgende setning som en grunnsetning i vår teori:

T1 $(Ex)(M(x) \& (Ay)(y\hat{e}x \leftrightarrow Tp(y))$

Når det gjelder "kommer før"-relasjonen mellom tidspunkter "x <;f y" skulle det være åpenbart at dette er en relasjon mellomtidspunkter. Er det derfor slik at tidspunktet x kommer før tidspunktet y virker det derfor direkte selvmotsigende å benekte at x og y er tidspunkter. Vi inkluderer derfor den følgende sats blant de ikke-logiske aksiomene i vår teori:

T2 $x <;f y \ \rightarrow. Tp(x) \& Tp(y)$

Når det så gjelder mer spesifikke lover for relasjonen <;f virker det ytterst rimelig å anta at relasjonen er transitiv og irrefleksiv. Det kan også virke rimelig å tenke seg at relasjonen er total og at det mellom to tidspunkter x,y der x kommer før y alltid finnes et tidspunkt z som kommer etter x, men før y. Med andre ord synes relasjon å være det som kalles "tett". Hvorvidt enhver oventil begrenset mengde med tidspunkter har en minste øvre grense er et spørsmål vi strengt tatt ikke behøver å ta stilling til. Det samme gjelder spørsmålet om enhver nedentil begrenset mengde av tidspunkter har en største nedere grense og om tiden er uendelig i begge retninger, det vil si om det til ethvert tidspunkt alltid finnes et senere og et tidligere tidspunkt. I praksis vil vi anta at alle disse påstandene holder om før-relasjonen mellom tidspunkter og derfor anta at mengden av tidspunkter ordnet ved relasjonen <; er isomorf med mengden av de reelle tall ordnet ved hjelp av mindre en relasjonen <. Imidlertid skal vi offisielt i vår teori bare inkludere den påstand at mengden av tidspunkter er en lineær ordning som er uendelig i begge retninger:

T3 (i) $x <;y \ \& \ y <;f z \ . \rightarrow x<;z$
(ii) $Tp(x) \ \rightarrow \neg(x <;f x)$

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(iii) $Tp(x) \& Tp(y) \rightarrow (x <;f y \vee x=y \vee y <;f x)$
(iv) $Tp(x) \rightarrow (Ey)(Tp(y) \& y <;f x))$
(v) $Tp(x) \rightarrow (Ey)(Tp(y) \& x <;f y)$

La oss bemerke at vi ikke har innført noen predikater i forbindelse med tids som gjør det mulig å formulere påstander om tidsavstander. Det har altså ikke blitt innført noen metrikk over mengden av tidspunkter. Man kunne ha gjort dette, for eksempel ved å innføre et predikat av typen "Tidspunktet x kommer z minutter før tidspunktet y" der z er et reelt tall som angir hvor mange minutter x kommer før y. Dette ville imidlertid komplisere teorien ytterligere og i praksis kommer vi ikke til å formulere noen satser eller gjennomføre noen resonnementer der det er påkrevet å fremsette noen konkrete påstander om tidsavstander. La oss tilslutt bemerke at vi i det følgende bruker "T" som forkortelse for mengden av tidspunkter. Vi setter altså per definisjon $T= Mg(x: Tp(x))$.

La oss nå vende oss mot de grunnsetningene som har å gjøre med de andre predikatene på listen vi presenterte i forrige avsnitt.

La oss starte med predikatet "Tror;(w,t)(x,y)". Som man husker introduserte vi dette som en forkortelse for det lengere uttrykket " y er et forhold som personen x tror foreligger ved tidspunktet t i verdenen w". Nåvel. Hvis y faktisk er et forhold som personen x tror ved tidspunktet t i verdenen w virker det ytterst rimelig å hevde at y er et finstrukturert utsagn, videre at x er en person, at w er en mulig verden og at t er et tidspunkt. Dette kan virke nærmest trivielt.

Tilsvarende virker det ytterst rimelig å hevde at dersom y er et forhold som personen x enten innser, vet, ser eller husker, ved tidspunktet t i verdenen w så er y et finstrukturert utsagn, x en person, t et tidspunkt og w en logisk mulig verden.

Videre, hvis x ved tidspunktet t i verdenen w innser at z følger fra y virker det direkte selvmotsigende om man ikke medgir at x er en person, t et tidspunkt, w en mulig verden og y,z finstrukturerte utsagn. Det samme gjelder om personen x ved tidspunktet t i verdenen w meddeler personen y at z er tilfelle. Det er åpenbart at dette impliserer at x og y er personer, t et tidspunkt, w en mulig verden og y et finstrukturert utsagn. Det følger at den følgende grunnsetning må regnes som rimelig:

E1 (i) $Tror;(w,t)(x,y) \rightarrow U;f(y) \& têT \& MV(w) \& Pers(x)$
(ii) $Vet;(w,t)(x,y) \rightarrow U;f(y) \& têT \& MV(w) \& Pers(x)$
(iii) $Inns;(w,t)(x,z,y) \rightarrow U;f(z) \& U;f(y) \& têT \& MV(w) \& Pers(x)$
(iv) $Innse;(w,t)(x,y) \rightarrow U;f(y) \& têT \& MV(w) \& Pers(x)$
(v) $Ser;(w,t)(x,y) \rightarrow U;f(y) \& têT \& MV(w) \& Pers(x)$
(vi) $Husk;(w,t)(x,y) \rightarrow U;f(y) \& têT \& MV(w) \& Pers(x)$
(vii) $Med;(w,t)(x,y,z) \rightarrow U;f(z) \& MV(w) \& têT \& Pers(x) \& Pers(y)$

Selvom E1 kan regnes som en relativt trviell påstand innebærer den at alle de relasjonene som aksiomet dreier seg om faktisk er mengder. Fra det vi tidligere har nevnt er U;f, mengden av finstrukturerte utsagn, en mengde, det samme gjelder mengden av mulige verdener I, mengden personer P og mengden av tidspunkter T. Fra dette og de rent mengdeteoretiske aksiomene kan man vise at kryssproduktet av disse mengdene finnes, ie at $IxTxPxU;f$ finnes. Siden vi har at relasjonene som betegnes av predikatene "Vet", "Tror" "Husker", "Ser" og

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

"Innser" er inkludert i denne mengden følger det også, ved hjelp av delmengdeaksiomet at disse relasjonene finnes. På lignene vis kan man vise at relasjonene som svarer til henholdsvis "Med" og "Inns"[40] finnes.

Den neste grunnsetningen vi vil omtale er en setning som sikkert for de fleste fortoner seg temmelig triviell. Den sier intet annet enn at dersom y er et forhold som personen x vet at foreligger ved tidspunktet t i verdenen w så er y et finstrukturert utsagn som er sant i verdenen w, med andre ord har man at True;f(w,y). Setningen kan formaliseres slik:

E2 $\quad Vet;(w,t)(x,y) \rightarrow True;f(w,y)$

Denne tesen uttrykker ikke noe annet enn at dersom man vet at noe er tilfelle så må dette være tilfelle. Det virker ikke som om noen som har beskjeftiget seg med kunnskapsbegrepet noensinne har betvilt dette.

Likeledes virker det opplagt at dersom y beskriver et forhold personen x ser foreligger ved tidspunktet t i verdenen w så beskriver y også et forhold som som personen x vet foreligger ved tidspunktet t i verdenen w. Hvis man ser at noe er tilfelle må man også vite at dette er tilfelle. Det samme gjelder hukommelse. Beskriver y et forhold personen x husker vil også y beskrive noe x vet. Dette er innholdet i de to følgende setninger:

E3 $\quad Ser;(w,t)(x,y) \rightarrow Vet;(w,t)(x,y)$
E4 $\quad Husk;(w,t)(x,y) \rightarrow Vet;(w,t)(x,y)$

Hvis en person vet at noe er tilfelle virker det også ukontroversielt å hevde at vedkommende tror at dette er tilfelle. Dette kan også uttrykkes mer omstendelig ved å si at dersom y beskriver et forhold personen x vet er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w er det også slik at y beskriver et forhold personen x tror er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w. Igjen er det vanskelig å se noen holdbare innvendinger mot dette. Er det slik at x ikke tror at y er tilfelle må det enten være enten fordi x ikke har noen formening om hvorvidt y er tilfelle eller ei eller fordi x eventuelt tror noe som er uforenelig med y. I begge tilfelle virker det absurd å hevde at x vet at det som beskrives av y er tilfelle. Den følgende grunnsetning virker derfor i høyeste grad rimelig:

E5 $\quad Vet;(w,t)(x,y) \rightarrow Tror;(w,t)(x,y)$

Våre neste grunnsetninger er disse:

E6 $\quad Inns;(w,t)(x,z,y) \rightarrow \mu;f(y)\ Inkl\ \mu;f(z)$
E7 $\quad Vet;(w,t)(x,z)\ \&\ Inns;(w,t)(x,y,z) \rightarrow\ Vet;(w,t)(x,y)$
E8 $\quad Tror;(w,t)(x,z)\ \&\ Inns;(w,t)(x,y,z) \rightarrow Tror;(w,t)(x,y)$
E9 $\quad Inns;(w,t)(x,z,y)\ \&\ Inns;(w,t)(x,y,u) \rightarrow Inns;(w,t)(x,z,u)$

La oss kommentere disse påstandene utførlig. E6 uttrykker at dersom x ved tidspunktet t i verdenen w innser at utsagnet z følger fra utsagnet y så er sannhetsmengden til y inkludert i sannhetesmengden til z. Dette siste innebærer ikke noe annet enn at enhver verden hvor det

40 Mao. relasjonene Mg(<w,t,x,y,z>:Med;(w,t)(x,y,z)) og Mg(<w,t,x,z,y>: Inns;(w,t)(x,z,y))

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

finstrukturerte utsagnet y er sant også er en verden der utsagnet z er sant. I sin tur sier ikke dette annet enn at z er en logisk konsekvens av y, med andre ord at z følger fra y. Man ser derfor at E6 ikke gjør noe annet enn å gjøre eksplisitt noe som allerede ligger i uttrykket "innser at z følger fra y". Det virker derfor uberettiget om noen skulle finne på å rette noen alvorlige innvendinger mot E6.

Når det gjelder E7 uttrykker denne setningen at dersom x ved tidspunktet t vet at z er tilfelle og x ved det samme tidspunkt innser at utsagnet y følger fra utsagnet z, så må x også ved tidspunktet t vite at y er et sant utsagn. Det virker vanskelig å se at det finnes noen gode argumenter mot dette. Hvis en person vet at, la oss si, z er et sant utsagn, men ikke vet at y er et sant utsagn, virker det direkte absurd å hevde at innser at y er en logisk følge av z. E7 er derfor ikke bare en sann setning, den er nødvendig sann.

Helt analoge betraktninger kan gjøres i forbindelse med E8. Denne setningen uttrykker at dersom z er et utsagn x tror ved tidspunktet t beskriver et faktisk foreliggende forhold og x innser ved t at utsagnet y følger fra utsagnet z så må det også være slik ved tidspunktet t at x tror det forhold som y beskriver. På samme vis som ved den forrige setningen virker det eiendommelig å påstå at x innser at utsagnet y følger fra utsagnet z om x tror utsagnet z er sant, men samtidig ikke tror at utsagnet y er sant. Om man innser at noe følger fra noe man tror, må man også tro på det som følger, i motsatt fall har man ikke innsett i noen rimelig forstand at det ene følger fra det andre. Dette er ikke en empirisk kjensgjerning, men et spørsmål om ren logikk.

E9 sier at dersom x ved tidspunktet t innser at utsagnet z følger fra utsagnet y og samtidig innser at utsagnet z følger fra utsagnet u så må x også ved tidspunktet t innse at utsagnet z følger fra utsagnet u. Det virker ytterst vanskelig å benekte denne påstand. Konjunksjon av antecedenten i setningen E9 og negasjonen av konsekventen virker eiendommelig: Det virker umulig å tenke seg at noen ved et gitt tidspunkt innser at utsagnet a følger fra utsagnet b og ikke innser a følger fra c om man samtidig innser at b følger fra c. Kort sagt virker det å benekte E9 direkte selvmotsigende[41].

Det er rimelig å se en forskjell mellom det å innse at noe er tilfelle og det å vite at noe er tilfelle. Det å innse at noe er tilfelle har preg av en aktiv virksomhet. Man gransker noe omhyggelig, stiller seg selv spørsmål ved det man gransker og når så, etter kortere eller lengere tids strev frem til en innsikt om at så og så er tilfelle. Viten er ikke på samme måte knyttet til det å granske eller undersøke noe mer eller mindre omhyggelig. Viten vil ofte selvfølgelig være et resultat av granskning, undersøkelser, refleksjon og aktiv handling. Men vet man først at noe er tilfelle, for eksempel at jorden er kuleformet, behøver man ikke til stadighet tenke på det man vet eller ha oppmerksomheten rettet mot det. Dette synes å være annerledes i forbindelse med det å innse noe. Innser man ved et gitt tidspunkt at de og de tall er de reelle løsningene i en bestemt ligning har man også oppmerksomheten rettet mot disse tallene og denne ligningen. Men når innsikten er nådd fortsetter man ikke å innse det man innså. Man husker snarere bare at man innså det. Videre virker det ikke umiddelbart

41 Det er mulig at E9 ville virke mer evident om man erstatter "x innser (ved t i verdenen w) at b følger fra a" med "x innser at a impliserer b". Hvis nå x innser at a impliserer b og dessuten at b impliserer c hvordan kan da vedkommende unngå å innse at a impliserer c? Man føler at dersom vedkommende ikke innser det siste må det være slik at vedkommende egentlig ikke innser at a impliserer b eller at b impliserer c. Innser man virkelig at a impliserer b er det logisk sett nødvendig at man innser at alt som er implisert av det siste også er implisert av det første.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

uplausibelt å si at man oppdager noe, at noe går opp for en, at et utsnitt av virkeligheten liksom "etser" seg inn i bevisstheten når man innser noe.

Er y et utsagn som personen x ved tidspunktet t i verdenen w innser er riktig virker det ytterst rimelig å hevde at dette utsagnet ved dette tidspunktet også beskriver noe vedkommende vet er tilfelle. Den følgende grunnsetning virker derfor rimelig:

E10 Innse;(w,t)(x,y) → Vet;(w,t)(x,y)

På tilsvarende vis som ved E7 og E8 virker det også rimelig å hevde at dersom y er et utsagn som x innser ved tidspunktet t og x også ved dette tidspunkt innser at utsagnet z følger fra utsagnet y så må også z være et utsagn som x ved t innser er riktig.
Dette er hva den følgende grunnsetning uttrykker:

E11 Innse;(w,t)(x,y) & Inns;(w,t)(x,z,y) →Innse;(w,t)(x,z)

De følgende to setninger virker også rimelige:

E12 Ser;(w,t)(x,y) → Innse;(w,t)(x,y)
E13 Husk;(w,t)(x,y) → Innse;(w,t)(x,y)

E12 uttrykker at dersom y er et utsagn som beskriver et forhold personen x ser foreligger ved tidspunktet t i verdenen w er y også et utsagn som x innser er sant ved t i verdenen w. Det virker direkte tøvete å benekte dette. Det samme gjelder E13 som uttrykker at dersom y er et utsagn som beskriver et forhold personen x husker at var tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w er y også et utsagn som x innser at er sant ved t i verdenen w.

C1 Med;(w,t)(x,y,z)→ Vet;(w,t)(x,z) & Vet;(w,t)(y,z)
C2 Med;(w,t)(x,y,z) → w ⊨;f z

Har man lesemåten til predikatet "Med;(w,t)(xm,y,z)" i tankene ser man at C1 uttrykker at dersom z er et utsagn som x meddeler y ved tidspunktet t i verdenen w så må både x og y vite ved tidspunktet t i verdenen w at utsagnet y er sant. Man kan altså ikke meddele noe annet enn det man vet. Strengt tatt er C2 overflødig siden setningen følger direkte fra E2 og C1. Som man ser sier C2 at dersom z er et utsagn som x meddeler y ved tidspunkt t i verdenen w er dette (finstrukturerte) utsagnet sant i verdenen w.

§1.3 Standard begrepsrammer.

Hvis en person vet at α er tilfelle virker det ikke urimelig å påstå at vedkommende vet at han vet at dette er tilfelle. Med andre ord om x vet at α så er det også slik at x vet at han vet at α. Hvis man bare holder seg til de predikatene vi så langt har innført er det ikke uten videre klart hvordan man skal uttrykke denne påstanden. Fra det at Vet;(w,t)(x,y) kunne man kanskje slutte at det finnes et utsagn z som er slik at Vet;(w,t)(x,z) og der sannhetsmengden til z, ie. μ;f(z) er identisk med mengden av alle de verdener w' der vi har Vet;(w',t)(x,y). Men saken er at det kan finnes uendelig mange distinkte finstrukturerte utsagn u;1,....,u;n.... der vi har at

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

μ;f(u;i) = Mg(w': Vet;(w',t)(x,y)). Det er bare et av disse utsagnene vi er interessert i nemlig det finstrukturerte utsagnet som sier at x vet ved t at y er tilfelle. Men dette kan ikke uten videre spesifiseres uten at vi trekker inn noe i likhet med det vi tidligere kalte begrepsrammer.

La oss først betrakte, om wêI, den følgende mengde, nemlig Mg(<<x,t>,y>: Ser;(w,t)(x,y)). Dette er som man ser mengden av alle par <<x,t>,y> der y er et finstrukturert utsagn som beskriver et forhold som x ser foreligger ved tidspunktet t i verdenen w. La oss betegne denne mengden med "s(w)". Det følger da at funksjonen f, der f=Mg(<w,s(w)>:wêI), er en ekstensjonsfunksjon for en binær egenskap Ekst;-1(f) som, i overenstemmelse med den definisjon vi har gitt tidligere, er en intensjonal relasjon av type <2,1>. Vi skal betegne denne intensjonale relasjonen med |Ser|. Hvis |Ser| er en intensjonal relasjon som er med i den tredje komponenten i en begrepsramme B=<D,X,In>, det vil si hvis |Ser|êIn, vil naturligvis <4,2,1,|Ser|> være navnet assosiert med B på denne intensjonale relasjonen |Ser|. Vi skal bruke "Ser_" som betegnelse på dette navnet. Ser_ og |Ser| er definert slik:

Definisjon 1.3.1:

|Ser| = Ekst;-1(λ/wêI/(Mg(<<x,t>,y>: Ser;(w,t)(x,y))))
Ser_ = <4,2,1,|Ser|>

På tilsvarende vis definerer vi de intensjonale relasjonene som svarer til predikatene (iv) - (x) i avsnittet der vi beskrev språket til vår kunnskapsteori, og også de tilsvarende navn på følgende måte.

Definisjon 1.3.2:

|Vet| = Ekst;-1(λ/wêI/(Mg(<<x,t>,y>: Vet;(w,t)(x,y))))
Vet_ = <4,2,1,|Vet|>
|Husk| = Ekst;-1(λ/wêI/(Mg(<<x,t>,y>: Husk;(w,t)(x,y))))
Husk_ = <4,2,1,|Husk|>
|Tror| = Ekst;-1(λ/wêI/(Mg(<<x,t>,y>: Tror;(w,t)(x,y))))
Tror_ = <4,2,1,|Tror|>
|Innse| = Ekst;-1(λ/wêI/(Mg(<<x,t>,y>: Innse;(w,t)(x,y))))
Innse_ = <4,2,1,|Innse|>
|Inns| = Ekst;-1(λ/wêI/(Mg(<<x,t>,<y,z>>: Inns;(w,t)(x,y,z))))
Inns_ = <4,2,2,|Inns|>
|Med| = Ekst;-1(λ/wêI/(Mg(<<x,y,t>,z>: Med;(w,t)(x,y,z))))
Med_ = <4,3,1,|Med|>

Anta nå B=<D,X, In> er en begrepsramme, at ξ: CFm(B) -(1-1) →U;f er en intepretasjonsfunksjon assosiert med B og at <B,ξ> representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Da følger det ved hjelp av definisjonen ovenfor at dersom x,t er variabeltegn assosiert med B og αêFm(B) vil for eksempel Vet_;(x,t)α være en formel bestemt av B. Tilsvarende vil Ser;(x,t)(α), Innse_;(x,t)(α) osv. være formler bestemt av B. Dette er selvfølgelig underforutsetning av at |Vet|, |Ser| og |Innse| er med blant de intensjonale relasjonene i B, det vil si om |Vet|, |Ser| , |Innse| ê In.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Betrakter man f= λ/wêI/(Mg(u: uêU;f & μ;f(u)=I)) ser man at dette er en funksjon som til enhver mulig verden w tilordner w mengden av alle de finstrukturerte utsagn hvis sannhetsmengde er mengden av alle mulige verdener. Med andre ord tilordner denne funksjonen enhver mulig verden w mengden av alle de finstrukturerte utsagn som er nødvendig sanne. Den egenskapen som har f som sin ekstensjonsfunksjon er som man ser fra den definisjonen vi tidligere har gitt av "intensjonal relasjon" en intensjonal relasjon av type <0,1>. Vi skal betegne denne |Nec|. Den intensjonale relasjonen hvis ekstensjonsfunksjon er λ/wêI/(Mg(u: uêU;f & μ;f(u)≠ø)) skal vi betegne med |Pos|. Man ser at dette også er en intensjonal relasjon av type <0,1>. Hvis disse to relasjonene er med blant de intensjonale relasjonene i en begrepsramme B er Nec_ navnet assosiert med begrepsrammen B på |Nec| og Pos_ navnet assosiert med begrepsrammen B på |Pos|. Vi gir den følgende formelle definisjon av disse begrepene:

Definisjon: 1.3.4

|Nec| =Ekst;-1(λ/wêI/(Mg(u: uêU;f & μ;f(u)=I)))
Nec_ = <4,0,1,|Nec|>
|Pos| =Ekst;-1(λ/wêI/(Mg(u: uêU;f & μ;f(u)≠ø)))
Pos_ = <4,0,1,|Pos|>

I det følgende skal vi bruke "T" som betegnelse på mengden av tidspunkter. Vi bruker "P" som navn på mengden av personer, ie Mg(x:Pers(x)). Endelig lar vi "<;f" være navnet på "før"-relasjonen mellom tidspunkter, med andre ord betegner "<;f" megden av alle de par <x,y> der vi har at x <:f y. Vi gir den følgende formelle definisjon:

Definisjon 1.3.5:

T= Mg(x: Tp(x))
P= Mg(x: Pers(x))
<;f = Mg(<x,y>: x <;f y)

Den unære egenskapen som har som sin ekstensjonsfunksjon konstantfunksjonen λ/wêI/(T) betegner vi med |T|. Navnet på denne egenskapen er T_. Tilsvarende er |P| den unære egenskapen hvis ekstensjonsfunksjon er λ/wêI/(P). og P_ er navnet på denne egenskapen. Når det gjelder ekstensjonsfunksjonen λ/wêI/(Mg(<x,y>: x,yêT & x <;f y)) betegner vi den binære egenskapen som svarer til denne med |<| og navnet på denne egenskapen er <_. Den formelle definisjonen av disse begrepene er:

Definisjon1.3.6 :

|T| = Ekst;-1(λ/wêI/(T))
T_ = <3,1,0,|T|>
|P| = Ekst;-1(λ/wêI/(P))
P_ = <3,1,0,|P|>
|<| = Ekst;-1(λ/wêI/(Mg(<x,y>: x,yêT & x <;f y)))
<_ = <3,2,0,|<| >

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Vi kan etter at vi nå har definert begrepene ovenfor gi en presis definisjon av en spesiell klasse av begrepsrammer som vi skal kalle (i mangel av et bedre navn) for *standard begrepsrammer*. Definisjonen er den følgende:

Definisjon 1.3.7 : B=<D,X,In> er en standard begrepsramme hvis og bare hvis B er en begrepsramme som oppfyller de følgende krav:

(i) T, P Inkl D & X = UN/n,1,inf/(E(D^n))
(ii) |T|, |P|, |<| êX
(iii) |Ser|,|Vet| , |Tror|, |Husk|, |Inns|, |Innse|, |Med| ê In

Man ser at en standard begrepsramme er en begrepsramme som oppfyller de følgende krav: For det første må mengden av alle personer og mengden av alle tidspunkter være inkludert i domenet til begrepsrammen, det vil si den første komponenten i rammen. For det andre må den andre komponenten i rammen inneholde absolutt alle egenskaper over domenet i rammen. I tillegg til dette må egenskapene å være et tidspunkt og en person, ie. |T| og |P| være med i rammen, samt relasjonen |<| [42]. Det siste kravet er at de intensjonale relasjonene vi har definert ovenfor, altså |Ser|,|Vet| , |Tror|, |Husk|, |Inns|, |Innse| og |Med| er med blant de intensjonale relasjonene i rammen.

Det følgende teorem er en relativt enkel konsekvens av denne definisjonen og vår tidligere definisjon av hva som menes med en intepretasjonsfunksjon assosiert med en begrepsramme. Man har:

Teorem 1.3.1: Anta B=<D,X,In> er en standard begrepsramme og at
ξ: CFm(B) -(1-1)→U;f.
Anta videre at den utvidete begrepsrammen <B,ξ> representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Sett n(x)= <2,0,0,x> for alle xêD. Da har man at følgende holder for alle wêI, y,zêRgn(ξ) og x, x' ,têD:

(i) w ⊨;f ξ(Vet_;(n(x),n(t))(ξ;-1(y))) ↔ Vet;(w,t)(x,y)
(ii) w ⊨;f ξ(Tror_;(n(x),n(t))(ξ;-1(y))) ↔ Tror;(w,t)(x,y)
(iii) w ⊨;f ξ(Ser_;(n(x),n(t))(ξ;-1(y))) ↔ Ser;(w,t)(x,y)
(iv) w ⊨;f ξ(Husk_;(n(x),n(t))(ξ;-1(y))) ↔ Husk;(w,t)(x,y)
(v) w ⊨;f ξ(Innse_;(n(x),n(t))(ξ;-1(y))) ↔ Innse;(w,t)(x,y)
(vi) w ⊨;f ξ(Inns_;(n(x),n(t))(ξ;-1(y),ξ;-1(z))) ↔ Inns;(w,t)(x,y,z)
(vii) w ⊨;f ξMed_;(n(x),n(x'),n(t))(ξ;-1(y))) ↔ Med;(w,t)(x,x',y)

Bevis: Vi gir bare et bevis for det første punktet siden bevisene for de andre punktene blir helt analoge. Anta forutsetningene i teoremet holder. Da har vi ved hjelp av definisjonen av ξ:

w ⊨;f ξ(Vet_;(n(x),n(t))(ξ;-1(y))) ↔ <<x,t>,ξ(ξ;-1(y))>êEkst;w(|Vet|)
↔ <<x,t>,y>êEkst;w(|Vet|)
↔ <<x,t>,y>êMg(<<x,t>,y>>: Vet;(w,t)(x,y))
↔ Vet;(w,t)(x,y).

42 Strengt tatt følger kravet (ii) fra det første kravet (i) som innebærer at T,P Inkl D og X=UN/i,1,inf/E(D^n).

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

De andre punktene bevises som nevnt likedan. **QED**.

Det følgende teorem gir en reformulering av aksiomene E1 - E3 samt C1 og C2 i en litt annen form. Man ser at det er en nær korrespondanse mellom de enkelte punktene i dette teoremet og de grunnsetningene vi har nevnt tidligere.

Teorem 1.3.2: Anta B'=<D,X,In> er en standard begrepsramme og at
ξ: CFm(B') -(1-1)→U;f.
Anta videre at den utvidete begrepsrammen B=<B',ξ> representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Anta x,t er variabeltegn assosiert med B og at α,β,γ êFm(B).
Da har man at følgende holder:

(i)	⊨;B	Vet_;(x,t)(α) → T_(t) & P_(x)
(ii)	⊨;B	Tror_;(x,t)(α) → T_(t) & P_(x)
(iii)	⊨;B	Ser_;(x,t)(α) → T_(t) & P_(x)
(iv)	⊨;B	Husk_;(x,t)(α) → T_(t) & P_(x)
(v)	⊨;B	Innse_;(x,t)(α) → T_(t) & P_(x)
(vi)	⊨;B	Inns_;(x,t)(α,β) → T_(t) & P_(x)
(vii)	⊨;B	Vet_;(x,t)(α) → α
(viii)	⊨;B	Ser_;(x,t)(α) → Vet_;(x,t)(α)
(ix)	⊨;B	Husk_;(x,t)(α) → Vet_;(x,t)(α)
(x)	⊨;B	Vet_;(x,t)(α) → Tror_;(x,t)(α)
(xi)	⊨;B	Inns_;(x,t)(α,β) → Nec_(β→α)
(xii)	⊨;B	Vet_;(x,t)(α) & Inns_;(x,t)(β,α) → Vet_;(x,t)(β)
(xiii)	⊨;B	Tror_;(x,t)(α) & Inns_;(x,t)(β,α) → Tror_;(x,t)(β)
(xiv)	⊨;B	Inns_;(x,t)(β,α) & Inns_;(x,t)(γ,β) → Inns_;(x,t)(γ,α)
(xv)	⊨;B	Innse_;(x,t)(α) →Vet;(x,t)(α)
(xvi)	⊨;B	Innse_;(x,t)(β) & Inns;(x,t)(α,β) → Innse_;(x,t)(α)
(xvii)	⊨;B	Ser;(x,t)(α) → Innse_;(x,t)(α)
(xviii)	⊨;B	Husk;(x,t)(α) → Innse_;(x,t)(α)
(xix)	⊨;B	Med_;(x,y,t)(α) → α
(xx)	⊨;B	Med_;(x,y,t)(α) → Vet;(x,t)(α) & Vet;(y,t)(α)

Bevis: Å gi detaljerte bevis for alle de enkelte punktene i dette teoremet er trolig overflødig. Det er nok å vise et punkt. Vi tar for oss (xii) for å illustrere bevismetoden.

Ad (xii): Anta forutsetningene i satsen holder. Anta γ er en vilkårlig instans av formelen Vet_;(x,t)(α) & Inns_;(x,t)(β,α) → Vet_;(x,t)(β) og (1) at wêI for vilkårlig w. For å vise at punkt (xii) holder vil det da være tilstrekkelig å vise (+) w ⊨;f ξ(γ). Nå har man at (2) γ =Vet_;(i,j)(α') & Inns_;(i,j)(β',α') → Vet_;(i,j)(β') for noen konstanter i,j assosiert med B og visse α'β'êCFm(B) der α' og β' er instanser av henholdsvis α og β. Siden det vil være tilstrekkelig å bevise (+) er det også åpenbart i lys av (2) og definisjonen av ξ tilstrekkelig å vise:

(++) w ⊨;f ξ(Vet_;(i,j)(α')) & w ⊨;f ξ(Inns_;(i,j)(β',α')) → w ⊨;f ξ(Vet_;(i,j)(β'))

La oss vise (++). Anta derfor

(1) w ⊨;f ξ(Vet_;(i,j)(α')) og
(2) w ⊨;f ξ(Inns_;(i,j)(β',α'))

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

I lys av definisjonen av ξ har man at (1) er ekvivalent med

(3) <<(i);4,(j);4>,ξ(α')>êEkst;w(|Vet|). Dette er i sin tur ekvivalent med:

(4) Vet;(w,(j);4)((i);4,ξ(α')) på grunnlag av definisjonen av |Vet|.

Tilsvarende er (2) ekvivalent med:

(5) <<(i);4,(j);4>,ξ(β'),ξ(α')>êEkst;w(|Inns_|) som igjen er ekvivalent med

(6) Inns;(w,(j);4)((i);4, ξ(β'),ξ(α')) igjen i lys av definisjonen av |Inns|

Men fra (4), (6) og E7 følger umiddelbart Vet;(w,(j);4)((i);4,ξ(β')) som ved hjelp av definisjonen av |Vet| og definisjonen av ξ impliserer w ⊨;f ξ(Vet_;(i,j)(β')). Dette viser at (++) holder og derfor at punkt (xii) holder. **QED**.

§1.4 Grunnsetninger som ikke kan formuleres uten å trekke inn begrepsrammer.

Anta B=<D,X,In> er en standard begrepsramme og anta at ξ : CFm(B) -(1-1)→ U;f. Anta at <B,ξ> representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Vi skal betrakte en rekke formler som er med i Fm(B), men som tilsynelatende ikke kan formuleres direkte i språket til vår teori uten at man trekker inn begreper som det vi har kalt begrepsrammer. Vi skal anta x,y,z, t,t' er variabeltegn assosiert med B og at α og β er vilkårlige formler assosiert med B. Den første formelen vi vil betrakte er denne:

(i) Vet_;(x,t)(α) → Vet_;(x,t)(Vet_;(x,t)(α))

Som man ser uttrykker denne formelen at dersom x vet ved tidspunktet t at α er tilfelle er det også slik at x vet ved tidspunktet t at x vet ved t at α. Uttrykt mindre omstendelig sier (i) at dersom noen vet noe så vet vedkommende at han vet dette. Vet jeg at jorden er kuleformet er det også slik at jeg vet at jeg vet at jorden er kuleformet.[43] Det ligger allerede i det at man vet at α har tilfelle, ikke bare at man har den evidens som viser at α er tilfelle, men også den evidens som er nødvendig for at man skal kunne hevde at at man vet dette. Dette er et rent logisk forhold og ikke noe man kan kaste lys over ved introspektiv psykologi.

Den neste setningen vi skal betrakte og som også synes å være logisk nødvendig sann er denne:

(ii) Tror_;(x,t)(α) → Tror_;(x,t)(Tror_;(x,t)(α))

Setningen uttrykker at dersom x tror ved t at α så er dette forhold selv noe x ved dette tidspunkt tror. Med andre ord kan man ikke tro noe uten at man tror at man tror dette.

To prinsipper som ligner svært på (i) kan nevnes. Det første er dette: Ser individet x ved tidspunktet t at α er tilfelle så må også x ved dette tidspunkt vite at han ser at α er tilfelle. Med andre ord er det slik at dersom man ser at noe er tilfelle vet man også at dette er tilfelle. Man kan formalisere denne tesen slik:

(iii) Ser_;(x,t)(α) → Vet_;(x,t)(Ser_;(x,t)(α))

43 En interessant og meget detaljert diskusjon av denne tesen finner man i Hintikkas "Knowledge and Belief" i kapitlet "Knowing that One Knows". Se Hintikka [1], side 103 - 125.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Et helt analogt prinsipp virker også ytterst plausibelt i forbindelse med hukommelse. Husker man at at noe, α, er tilfelle vet man også at man huske at α. Hvis man ikke vet at man husker noe virker det direkte, logisk sett selvmotsigende å hevde at man husker det. Prinsippet kan formaliseres slik:

(iv) Husk_;(x,t)(α) → Vet_;(x,t)(Husk_;(x,t)(α))

Det bør bemerkes at kondisjonalene i (i), (iii) og (iv) i lys av aksiom E2 kan forsterkes til bikondisjonaler: Vet man at noe er tilfelle er dette tilfelle, og vet man derfor at man vet noe, så vet man selvfølgelig dette. Videre vet man at man ser at α så må det av samme grunn være tilfelle at man ser at α. Nøyaktig det samme kan sies i forbindelse med (iv).

De neste setningene vi skal betrakte synes av være av en mindre diskutabel karakter. Anta x vet at både α og β er tilfelle. Det virker da rimelig å slutte at x vet α er tilfelle. Likeledes virker det rimelig å trekke den slutning at x vet at β er tilfelle. Ikke bare virker det rimelig, det synes utvilsomt å være logisk nødvendig. Omvendt, anta at x vet at α er tilfelle og anta også at x vet at β er tilfelle. Man synes da også å kunne slutte at x også vet at konjunksjonen av disse to påstandene holder, med andre ord at x vet at det både er slik at α og slik at β. Det prinsippet vi her har gjort rede for kan formaliseres slik innenfor rammen av en standard begrepsramme B:

(v) Vet_;(x,t)(α&β) ↔ Vet_;(x,t)(α) & Vet_;(x,t)(β)

Det er rimelig å anta at helt tilsvarende setninger gjelder for konstruksjonene "ser at", "husker at", tror at" og "innser at". Dette innebærer at det ikke er urimelig å se på de følgende setninger som logisk nødvendige:

(vi) Tror_;(x,t)(α&β) ↔ Tror_;(x,t)(α) & Tror_;(x,t)(β)
(vii) Ser_;(x,t)(α&β) ↔ Ser_;(x,t)(α) & Ser_;(x,t)(β)
(viii) Husk_;(x,t)(α&β) ↔ Husk_;(x,t)(α) & Husk_;(x,t)(β)
(ix) Innse_;(x,t)(α&β) ↔ Innse_;(x,t)(α) & Innse_;(x,t)(β)

Man ser at (vi) uttrykker at x tror at α&β hvis og bare hvis x tror at α og x tror at β. Tilsvarende bemerkninger kan gjøres i forbindelse med formlene (vii) - (ix).

La oss se på den følgende formel:

(x) Tror_;(x,t)(α) → ¬ Tror_;(x,t)(¬α)

Som man ser uttrykker denne formelen at dersom x ved tidspunktet t tror at α er tilfelle, så kan det ikke være slik at x ved dette tidspunkt tror at det ikke er slik at α. Setningslogisk sett er (x) ekvivalent med (1) ¬(Tror_;(x,t)(α) & Tror_;(x,t)(¬α)). Hvis (x) er logisk nødvendig impliserer dette at også den sistnevnte setningen uttrykker en logisk nødvendig sannhet. Med andre ord vil det i så fall være logisk umulig for en person å tro at en påstand er sann og samtidig tro at den motsatte påstand er sann. Hvis man i tillegg tar prinsippet (vi) for gitt er er (x) ikke bare ekvivalent med (1) men også med (2) ¬Tror_;(x,t)(α&¬α). Det virker rimelig å se på dette som logsik nødvendig. Det er ikke mulig å tenke seg noe individ som tror α&¬α.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Hevder man at man har støtt på en slik person har man i beste fall støtt på en person som mener noe annet med ordene "og" og "ikke" enn det som vanligvis menes.

Det bør understrekes at (x) ikke forhindrer at personer kan ha kontradiktoriske oppfatninger, det vil si ha en rekke oppfatninger som ved nærmere logiske undersøkelser viser seg å være selvmotsigende. Det er ikke noe i forbindelse med grunnsetningen (x) og de andre grunnsetningene vi har nevnt, og som vi også kommer til å nevne, som utelukker at et individ x kan tro at en rekke på stander α;1, ...,α;n er sanne og at det likevel er slik at en formel av typen β&¬β er en logisk følge av konjunksjonen av disse påstandene α,1,...,α;n. Det som er inkonsistent med vår teori er å anta at x ved t tror α;1,....,α;n og samtidig *innser* at β&¬β følger fra konjunksjonen av α;1,...,α;n.[44]

Hvis en person innser ved tidspunktet t at α er tilfelle synes det helt berettiget å slutte at vedkommende ved dette tidspunkt vet at han innser at α. Dette er hva den følgende formel uttrykker:

(xi) Innse_;(x,t)(α) → Vet_;(x,t)(Innse_;(x,t)(α))

Man ser at denne formelen er helt analog med de tilsvarende prinsipper for "ser" og "husker", nemlig setningene (iii) og (iv) som vi nevnte ovenfor.

De to følgende setninger er beslektet med den setningen vi nettopp nevnte:

(xii) Inns_;(x,t)(β,α) → Vet_;(x,t)(Inns_;(x,t)(β,α))
(xiii) Innse_;(x,t)(α) → Innse_;(x,t)(Innse_;(x,t)(α))

Den første av disse to setningene uttrykker at dersom personen x ved tidspunktet t innser at β følger fra α må man kunne slutte at x også vet dette, med andre ord at han innser at α følger fra β. Den andre setningen sier at dersom x innser at α er det også slik at han innser at han innser at α. Like vanskelig som det er å se noen åpenbare innvendiger mot tesen om at viten impliserer viten om at man vet, er det å finne noen holdbare argumenter mot (xii) og (xiii).

Hvis t' er et tidspunkt som kommer før tidspunktet t og x vet ved tidspunktet t at han innså ved det tidligere tidspunktet t' at β følger fra α så synes det berettiget å slutte at x også ved tidspunktet t innser at β følger fra α. Dette er innholdet i den følgende setning:

(xiv) t' <_ t → .Vet_;(x,t)(Inns_;(x,t')(β,α)) → Inns_;(x,t)(β,α)

Tilsvarende, hvis t' er et tidspunkt som kommer før tidspunktet t og x vet ved tidspunktet t at han innså ved det tidligere tidspunktet t' at α så synes det berettiget å slutte at x også ved tidspunktet t innser at α. Det virker som om man direkte motsier seg selv om man benekter dette. Denne tesen kan formaliseres slik:

(xv) t' <_t & Vet_;(x,t)(Innse_;(x,t')(α)) → Innse_;(x,t)(α)

De siste tre potensielle grunnsetningene vi skal ta i betraktning er de følgende som dreier seg om meddelelse. Den første av disse tesene uttrykker at dersom x meddeler y ved tidspunktet t

44 At en person kan ha kontradiktoriske oppfatninger er et empirisk og kontingent fenomen. Det tok tross alt noe tid før Frege innså at hans mengdeteoretiske system inneholdt en motsigelse.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

at α er tilfelle så vet x ved dette tidspunktet at han meddeler y at α. Dette innebærer at meddelelse alltid i en viss forstand er en bevist prosess sett med meddelerens øyne. Den andre setningen siet dersom x meddeler y ved tidspunktet t så vet også y ved dette tidspunkt at x meddeler ham at α. Dette innebærer at dersom en person blir meddelt noe, kan det ikke foreligge noen meddelelse om ikke mottager vet dette. Disse to tesene kan formaliseres slik:

(xvi) $\mathrm{Med_}(x,y,t)(\alpha) \rightarrow \mathrm{Vet_}(x,t)(\mathrm{Med_}(x,y,t)(\alpha))$
(xvii) $\mathrm{Med_}(x,y,t)(\alpha) \rightarrow \mathrm{Vet_}(y,t)(\mathrm{Med_}(x,y,t)(\alpha))$

Den siste tesen er denne:

(xviii) $\mathrm{Med_}(x,y,t)(\alpha) \rightarrow \mathrm{Med_}(x,y,t)(\mathrm{Med_}(x,y,t)(\alpha))$

Som man ser uttrykker denne setningen at dersom x meddeler y ved tidspunktet t at α er tilfelle så er det også slik at x meddeler y at x meddeler y at α er tilfelle. På samme måte som man ikke kan vite noe uten at man vet at man vet, kan man ikke meddele noe uten at man meddeler at man meddeler. Men en gang det meddeles et forhold til en annen er det ikke bare slik at begge parter vet at det som medeles er sant, men den som meddeler forteller også at han meddeler.

Vi har ovenfor tenkt oss at B=<D,X,In> er en standard begrepsramme, ξ en intepretasjonsfunksjon assosiert med B og at <B,ξ> representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Man ser da at alle formlene (i) - (xviii) er med i Fm(B) siden vi forutsatte at x,y,t var variabeltegn assosiert med B og α,β formler i Fm(B).

La oss minne om at en utvidet begrepsramme er et ordnet par <B,ξ> der B er en begrepsramme og ξ en intepretasjonsfunksjon assosiert med B. Den første komponenten i dette paret kaller vi for begrepsrammen assosiert med den utvidete begrepsrammen. Hvis dette er en standard begrepsramme i den betydning vi har forklart ovenfor kaller vi den utvidete begrepsrammen for en standard utvidet begrepsramme. Hvis <B,ξ> er en utvidet begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn har vi tidligere definert hva som menes med at en formel α i denne begrepsrammen, ie et element i Fm(B), er gyldig. Dette innebærer at vi for enhver mulig verden w og enhver instans α' av α har at $w \models_f \alpha$.

Nå er det ingen opplagt ting at dersom <B,ξ> er en standard utvidet begrepsramme som representer en delmengde av de finstrukturerte utsagn så har man at for eksempel formelen (i) ovenfor er gyldig i denne rammen. Dette er intet som kan utledes i vår teori slik vi så langt har beskrevet den. Men det virker som en ytterst rimelig påstand. Den kan formaliseres fullstendig innenfor det språket vi har beskrevet og i prinsippet legges til som en grunnsetning i tillegg til de andre grunnsetningene som inngår i teorien.

En ting er å hevde at *hvis* <B,ξ> er en standard utvidet begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn *så* er formlene (i) - (xviii) gyldige i denne rammen. Vi skal faktisk legge til noen grunnsetninger i tillegg til dem som er nevnt i tidligere avsnitt som samlet er ekvivalente med denne påstand. En annen ting er å påstå at det faktisk *finnes* en standard utvidet begrepsramme <B,ξ> som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn hvor formlene (i) - (xvii) er gyldige. Denne siste setningen er åpenbart en eksistenssetning som kan formaliseres fullstendig innenfor den språkrammen vi har

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

beskrevet så langt. Den første setningen er en kondisjonalsetning som ikke sier noe som helst om eksistensen av begrepsrammer.

§1.5 Sammenfatning av teorien

Vi nevnte ovenfor den påstand at dersom <B,ξ> er en standard utvidet begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn så er formlene (i) - (xviii) i forrige avsnitt gyldige i denne rammen <B,ξ>. Det virker imidlertid mer hensiktsmessig å "dele opp" denne påstanden i fire deler. Disse fire deler av påstanden, hvor konjunksjonen av dem er ekvivalent med påstanden selv, betegner vi E14 - E17. De utgjør de siste grunnsetningene som vi skal ta med i vår teori. Den første av disse grunnsetningene sier at formlene (i) - (iv) er gyldige i enhver standard utvidet begrepsramme <B,ξ> som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn:

E14 Er B=<D,X,In> en standard begrepsramme, ξ : CFm(B) -(1-1)→ U;f og representerer <B,ξ> en delmengde av de finstrukturerte utsagn har man, om x,y,z, t,t' er variabeltegn assosiert med B og α er en vilkårlige formel assosiert med B, at følgende holder:

(a) ⊨;B Vet_;(x,t)(α) → Vet_;(x,t)(Vet_;(x,t)(α))
(b) ⊨;B Tror_;(x,t)(α) → Tror_;(x,t)(Tror_;(x,t)(α))
(c) ⊨;B Ser_;(x,t)(α) → Vet_;(x,t)(Ser_;(x,t)(α))
(d) ⊨;B Husk_;(x,t)(α) → Vet_;(x,t)(Husk_;(x,t)(α))
(e) ⊨;B Tror_;(x,t)(Tror_;(x,t)(α)) → Tror_;(x,t)(α)

Det følgende aksiom innebærer at formlene (v) - (x) i forrige avsnitt er gyldige i enhver standard utvidet begrepsramme <B,ξ> som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn:

E15 Er B=<D,X,In> en standard begrepsramme, ξ : CFm(B) -(1-1)→ U;f og representerer <B,ξ> en delmengde av de finstrukturerte utsagn, har man, om x,y,z, t,t' er variabeltegn assosiert med B og α,β,γ er vilkårlige formler assosiert med B, at følgende holder:

(a) ⊨;B Vet_;(x,t)(α&β) ↔ Vet_;(x,t)(α) & Vet_;(x,t)(β)
(b) ⊨;B Tror_;(x,t)(α&β) ↔ Tror_;(x,t)(α) & Tror_;(x,t)(β)
(c) ⊨;B Ser_;(x,t)(α&β) ↔ Ser_;(x,t)(α) & Ser_;(x,t)(β)
(d) ⊨;B Husk_;(x,t)(α&β) ↔ Husk_;(x,t)(α) & Husk_;(x,t)(β)
(e) ⊨;B Innse_;(x,t)(α&β) ↔ Innse_;(x,t)(α) & Innse_;(x,t)(β)
(f) ⊨;B Tror_;(x,t)(α) → ¬ Tror_;(x,t)(¬α)

Det neste aksiomet impliserer at formlene (xi) - (xv) i forrige avsnitt er gyldige i enhver standard utvidet begrepsramme <B,ξ> som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn:

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

E16 Er B=<D,X,In> en standard begrepsramme, ξ : CFm(B) -(1-1)→ U;f og representerer <B,ξ> en delmengde av de finstrukturerte utsagn har man, om x,y,z, t,t' er variabeltegn assosiert med B og α,β,γ er vilkårlige formler assosiert med B, at følgende holder:

(a) ⊨;B Innse_;(x,t)(α) → Vet_;(x,t)(Innse_;(x,t)(α))
(b) ⊨;B Inns_;(x,t)(β,α) → Vet_;(x,t)(Inns_;(x,t)(β,α))
(c) ⊨;B Innse_;(x,t)(α) → Innse_;(x,t)(Innse_;(x,t)(α))
(d) ⊨;B t' <_ t → .Vet_;(x,t)(Inns_;(x,t')(β,α)) → Inns_;(x,t)(β,α)
(e) ⊨;B t' <_t & Vet_;(x,t)(Innse_;(x,t')(α)) → Innse_;(x,t)(α)

Endelig sier det følgende aksiom at de tre siste formlene vi nevnte i forrige paragraf er gyldige i enhver standard utvidet begrepsramme <B,ξ> som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn:

E17 Er B=<D,X,In> en standard begrepsramme, ξ : CFm(B) -(1-1)→ U;f og representerer <B,ξ> en delmengde av de finstrukturerte utsagn har man, om x,y,z, t,t' er variabeltegn assosiert med B og er α en vilkårlige formler assosiert med B, at følgende holder:

(i) ⊨;B Med_;(x,y,t)(α) → Vet_;(x,t)(Med_;(x,y,t)(α))
(ii) ⊨;B Med_;(x,y,t)(α)→ Vet_;(y,t)(Med_;(x,y,t)(α))
(iii) ⊨;B Med_;(x,y,t)(α) → Med_;(x,y,t)(Med_;(x,y,t)(α))

Vi kan nå gi en presis definisjon av teorien. Man erindrer at språket til den teorien vi nå har beskrevet var språket til teorien om utsagn og egenskaper utvidet med predikatene vi nevnte tidligere, nemlig predikatene i mengden Γ;2. Betegner vi mengden av de primitive predikatene i teorien om utsagn og egenskaper med Δ er følgelig språket til teorien L;e(ΔUΓ;2). La oss nå betegne den mengden av formler i L;e(ΔU Γ;2) som inneholder lukningene av formlene P1, T1 - T3, samt E1- E17 og bare dem med θ;3. Betegner vi alle de ikke-logiske aksiomene i teorien om utsagn og egenskaper med θ kan den teorien vi har avgrenset defineres presist som ZFCu(L;e(ΔUΓ;2)[θ U θ;3].

Ved nærmere ettersyn ser man ganske raskt ser at denne teorien er ganske svak. Er <B,ξ> en standard utvidet begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn er det lett å se at ingen av de vanlige lovene i modallogikken gjelder for for eksempel operatoren Vet_. Man kan for eksempel ikke slutte at ⊨;B Vet_;(x,t)(α) om ⊨;B α. Heller ikke kan man fra ⊨;B (α→β) slutte at ⊨;B Vet_;(x,t)(α) → Vet_;(x,t)(β). Dette er som det bør være. Ingen av disse slutningsreglene er, som vi tidligere har understreket, på noen måte realistiske. Enda mer urealistiske virker slike slutningsregler i forbindelse med konstruksjoner som "ser at -" og "husker at -", eller konstruksjonene "innser at - følger fra -" og "innser at -". Vi skal komme tilbake til dette i et senere avsnitt.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

§2 Satser i kunnskapsteorien

Den teorien vi har formulert ovenfor og der hovedaksiomene er E1 - E17 er i en viss forstand ganske svak i deduktiv henseede. Man kan for eksempel sammenligne den med mengdelæren. Innenfor denne kan man definere et vidt spektrum av interessante begreper og på grunnlag av noen ganske få aksiomer utlede en lang rekke satser som virkelig har karakter av å være dype og konsekvensrike. Noe tilsvarende synes ikke å være tilfelle i samme grad med den kunnskapsteorien vi har definert og beskrevet ovenfor.

I det følgende skal vi imidlertid utvikle denne teorien. Dette innebærer ikke noe annet enn at vi vil utlede en lang rekke med satser som forhåpentligvis vil gi leseren et mer fyldig bilde av hva teorien sier. Vi skal gjøre dette i den etterfølgende paragrafen og de to neste. I den neste paragrafen skal vi formulere, bevise og kommentere endel satser som i litt mindre utstrekning er basert på de aksiomene som involverer finstrukturerte utsagn. Hovedteoremet i dette avsnittet er en sats som viser at enhver logisk sannhet i prinsippet er erkjennbar under visse nærmere angitte betingelser. Vi vil drøfte denne hovedsatsen ganske utførlig og betrakte en rekke varianter av den.

De teoremene vi utleder vil hovedsakelig ha med viten og tro å gjøre. I mindre utstrekning vil vi gjøre utførlig rede for hva som kan utledes om erindring og sanseiaktagelse på basis av de aksiomene vi har formulert.

I de to paragrafene som følger etter den neste vil vi igjen konsenterer oss om viten og tro. I disse to paragrafene anlegger vi imidlertid et noe mer spesielt perspektiv. Vi er her interessert i å studere i hvilken grad man innenfor rammen av vår kunnskapsteori kan "emulere" de lover som gjelder for den vanlige modaloperatoren "Det er nødvendig at -" når det gjelder de to konstruksjonene "vet at -" og "tror at -" Som man etterhvert vil se fra resultatene i disse to paragrafene lar dette seg gjøre i en ganske stor utstrekning, men det vil også trolig bli klart for leseren i lys av de resulatene vi viser i hvor stor grad de epistemiske og doxastiske konstruksjonene skiller seg fra modaloperatoren "Det er nødvendig at - "

Det bør nevnes at de satsene vi skal bevise er av en ganske elementær natur. Bevisene som gis er enkle og ikke av en slik art at det ikke kreves særlig mye skarpsindighet i bevisføringen.

§2.1 Deduksjon. Epistemologiens fundamentalsatser.

I det følgende skal vi legge en bestemt forutsetning eller antagelse til grunn for det meste av det vi skriver. Vi skal anta

(+) at B=<D,X,In> er en standart begrepsramme, videre at ξ avbilder CFm(B), de lukkede formelene over begrepsrammen B en-entydig inn i mengden av finstrukturerte utsagn, ie. ξ: CFm(B) -(1-1)→ U;f, og at den utvidete begrepsrammen <B,ξ> representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn.

Dette vil være en slags standardforutsetning for det vi skriver her. I det følgende skal vi også anta at w er en mulig verden, ie. wêI og vi skal betrakte et visst individ x0êP, og betrakte hva denne personen x0 ser, vet, innser, tror og husker ved diverse tidspunkter têT i denne verdenen w (w kan naturligvis være den aktuelle verden).

La oss før vi går videre forklare hva vi mener med kunnskapsfeltet til en person x ved tidspunktet t i verdenen w. Dette er rett og slett mengden av alle de finstrukturerte utsagn som

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

x vet er sanne ved tidspunktet t i verdenen w. Uttrykt på en annen måte er kunnskapsfeltet til x i verdenen w det samme som Mg(y: Vet;(w,t)(x,y)).

Anta nå at t1 og t2 er to tidspunkter der tidspunktet t2 kommer etter tidspunktet t1. Vi skal da si at kunnskapsfeltet til personen x i verdenen w er *monotont* i tidsintervallet [t1,t2] hvis og bare hvis alt det x vet vet et tidspunkt t i intervallet også er forhold x vet ved alle tidspunkter som kommer etter t i intervallet.

Med andre ord er kunnskapsfeltet til individet x i verdenen w monotont i tidsintervallet [t1,t2] hvis og bare hvis man har:

(1) $(Ay)(y\hat{e}U;f \,\&\, t1 =< t =< t2 \,\&\, Vet;(w,t)(x,y) \rightarrow (At')(t=<t' =<t2 \rightarrow Vet;(w,t')(x,y))$

Det følger fra dette at dersom kunnskapsfeltet til x er monotont i et gitt intervall vil alt det x vet ved begynnelsen av intervallet også være forhold som x vet ved slutten av intervallet. Det vil også være slik at dersom personen får vite noe nytt ved et eller annet tidspunkt i intervallet så vil denne kunskapen være persistent i resten av intervallet.

Det er imidlertid ikke noe logisk sett som tilsier at man fra det at kunnskapsfeltet til en person er monotont i et gitt tidsintervall kan slutte at vedkommende nødvendigvis vet mer ved slutten av tidsintervallet enn ved begynnelsen av det. Det er fullstendig forenelig med et monotonitetsbegrep vi har definert at en person vet nøyaktig det samme ved slutten som ved begynnelsen av intervallet. Det eneste som det at et kunnskapsfelt er monoton utelukker er at personen ved mindre vet et tidspunkt i intervallet en vedkommende visste ved tidligere tidspunkter i intervallet. Vedkommende må vite minst like mye ved ethvert tidspunkt som ved alle de foregående tidspunkter i intervallet.

Er det nå slik at kunnskapsfeltet til personen x er monotont i verdenen w i intervallet [t1,t2] *og* slik at det finnes et eller annet utsagn z som x vet ved et eller annet tidspunkt t i intervallet, men som x ikke vet ved noe tidspunkt tidligere i intervallet skal vi kalle kunnskapsfeltet til x i dette intervallet for voksende.

Med andre ord sier vi at *kunnskapsfeltet til x i verdenen w er voksende i tidsintervallet [t1,t2]* hvis og bare hvis det oppfyller kravet (1) og følgende tilleggskrav:

(2) $(Ez)(z\hat{e}U;f \,\&\, (Et)(t\hat{e}[t1,t2] \,\&\, Vet;(w,t)(x,z) \,\&\, (At')(t1=<t' <t \rightarrow \neg Vet;(w,t')(x,y))))$

At en persons kunnskapsfelt er voksende i et visst tidsintervall innebærer ikke nødvendigvis at x vet noe nytt ved hvert eneste tidspunkt i intervallet. Det innebærer bare at det i løpet av tidsintervallet finnes utsagn som x vet men som han ikke visste tidligere i intervallet. Det er nok at det bare er ett slikt utsagn slik at ved slutten av intervallet ved personen akkurat det samme som ved begynnelsen av intervallet pluss dette ene nye utsagnet.

Hvis derimot en person x vet noe nytt ved hvert eneste tidspunkt t i intervallet [t1,t2] skal vi si, i det vi forutsetter at kunnskapsfeltet til x er monotont i dette intervallet, at kunnskapsfeltet til x er *kontinuerlig voksende*.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Mer formelt kan dette uttrykkes slik: *Kunnskapsfeltet til personen x i verdenen w er kontinuerlig voksende i intervallet [t1,t2]* hvis og bare hvis det i denne verdenen er montont i dette intervallet, dvs. oppfyller kravet (1) og det dessuten oppfyller følgende krav:

(3) $(At)(t1<t=<t2 \rightarrow (Ez)(z\hat{e}U;f \,\&\, Vet;(w,t)(x,z) \,\&\, (At')(t1=<t'<t \rightarrow \neg Vet;(w,t')(x,z))))$

Man kan spørre, i forbindelse med de tre betingelsene vi har formulert ovenfor, om de er realistiske. Med andre ord kan spørre om det faktisk finnes noen person x, noen tidspunkter t1 og t2 og noen verden w som faktisk oppfyller for eksempel kravet (1). Er det virkelig slik at det finnes noen person på denne kloden som i løpet av et et tidsintervall på la oss si ti minutter vet nøyaktig det samme, eller mer, ved slutten av intervallet enn ved begynnelsen av det? Det virker ikke som om dette er spesielt rimelig om man ser på mer konkrete eksempler.

I løpet av en ti minutters tid vil det for eksempel være en lang rekke ting jeg sier til meg selv. I det jeg sier disse tingene til meg selv i mitt indre vil jeg naturligvis vite hva det er jeg sier. En del av disse indre ytringene vil jeg imidlertid ikke feste meg ved og etter ganske kort tid vil det være umulig for meg å erindre hva det var jeg sa innvendig for meg selv. Det jeg visste vil være definitivt tapt. Dette er selvfølgelig ikke fordi jeg er spesielt glemsk og ikke kan "huske fra nese til munn", men noe som ligger i sakens natur. I og med at jeg handler målrettet, og det er et apriori kjennetegn ved mennesket at det handler målrettet, vil man feste seg ved de observasjoner og fakta som umiddelbart oppfattes som relevante for å oppnå de mål man streber etter å realisere. Men utallige av de observasjoner man gjør mens man forsøker å oppnå målet er ikke relevante for oppnåelsen av målet. Man vil derfor ikke feste seg ved dem, ikke gjøre noe forsøk på å innprente seg dem eller overhodet foreta seg noe aktivt for å huske dem. Kort sagt går de i glemmeboken etter meget kort tid. Av denne grunn er det derfor nærliggende å konkludere med at det ikke er spesielt realistisk (i allefall ikke i den virkelige verden) å tro at en persons kunnskapsfelt er monotont eller voksende over selv ganske korte tidsintervaller. Satser om viten eller tro som derfor har en betingelse som (1), eventuelt supplert med (2) eller (3), blandt forutsetninger må derfor regnes som relativt svake og ikke av spesielt stor interesse.

Før vi går videre for å studere mer realistiske betingelser enn (1)- (3) kan det være av interesse å se på noen enkle konsekvenser av (1).

I det følgende skal vi naturligvis forutsette (+) og vi vil også forutsette at (1) holder. Dessuten skal vi anta at:

(4.1) $t0,t2\hat{e}T \;\&\; t0 <t2 \;\&\; x\hat{e}P$

Dessuten vil vi anta

(4.2) $w\hat{e}I$.

Som man ser antar vi altså at t0,t2 er tidspunkter, at tidspunktet t0 kommer før tidspunktet t2, at x er en person og at w er en mulig verden.

Merk at $Mg(<2,0,0,x>: x\hat{e}D)$ er mengden av konstanter som er assosiert med begrepsrammen B. Setter vi $n(x)=<2,0,0,x>$ om $x\hat{e}D$ er n(x) konstanten som betegner objektet x om $x\hat{e}D$. Funksjonen n er altså navngivningsfunksjonen over D. Siden mengden av tidspunkter T er inkludert i D, ie. T Inkl D,har vi for eksempel at n(t0) og n(t2) er navnene på henholdsvis tidspunktene t0 og t2. Siden vi også har at P Inkl D og $x\hat{e}P$ følger det at n(x) er navnet på personen x.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Anta nå at t0=< t =< t2 for et eller annet tidspunkt t. Anta videre t=<t' =<t2 og at Vet;(w,t)(x,y) og anta yêRgn(ξ). Med andre ord anta at

(4.3) t0=< t =< t2 & Vet;(w,t)(x,y) & t=<t' =<t2 & yêRgn(ξ)

Fra den andre konjunkten i (4.3), forutsetningen (+) og aksiom E14a følger da

(a1) Vet;(w,t)(x, ξ(Vet_;(n(x),n(t))(ξ;-1(y))))

Fra dette følger videre at det må finnes z der man har:

(a2) Vet;(w,t)(x,z) og

(a3) z = ξ(Vet_;(n(x),n(t))(ξ;-1(y)))

Fra forutsetningen (4.3) har vi t =<t'=<t2. Fra dette, (a2) og forutsetningen (1) følger at

Vet;(w,t')(x,z) og fra dette og (a3) følger i sin tur at

Vet;(w,t')(x, ξ(Vet_;(n(x),n(t))(ξ;-1(y))))

Man ser altså at det ved hvert tidspunkt t' som kommer etter tidspunktet t , men før tidspunktet t2 er det slik at x vet at han ved tidspunktet t vet at y er tilfelle. Dette er hva vi kan utlede fra forutsetningene ovenfor inkludert den forutsetningen at kunnskapsfeltet til x i verdenen w er monotont i tidsintervallet [t0,t1]

Man kan imidlertid vise noe mer. La oss induktivt definere Vet_(k) der kêN ved den følgende induktive definisjon:

Definisjon 2.1.1: Sett:

(i) Vet_(0);(w,t)(x,y)(α) = Vet_;(x,y)(α)

(ii) Vet_(k+1);(x,y)(α) = Vet;(x,y)(Vet_(k);(x,y)(α))

Gitt (+), samt den forutsetning at <x,t>êPxT & wêI og yêRgn(ξ) sier aksiom E14a at følgende er tilfelle:

Vet;(w,t)(x,y) → Vet;(w,t)(x, ξ(Vet_;(n(x),n(t))(ξ;-1(y))))

Det man nå kan vise er at noe sterkere holder, nemlig:

Teorem 2.1.1: Anta k>=0 og yêRgn(ξ). Da gjelder:

Vet;(w,t)(x,y) → Vet;(w,t)(x, ξ(Vet_(k);(n(x),n(t))(ξ;-1(y))))

Bevis:[45] Dette bevises ved induksjon på k. (a) Det er åpenbart at satsen holder for k=0. Dette følger ved hjelp av definisjonen av Vet_(k) som ble gitt ovenfor. (b) Anta satsen holder for k. Det må da bevises at den holder for k+1. Det vil være tilstrekkelig å bevise:

(1) Vet;(w,t)(x,ξ(Vet_(k);(n(x),n(t))(ξ;-1(y))) →
Vet;(w,t)(x,ξ(Vet_(k+1);(n(x),n(t))(ξ;-1(y)))

Anta (2.1) Vet;(w,t)(x,ξ(Vet_(k);(n(x),n(t))(ξ;-1(y))) . Sett per definisjon:

(2.2) z0= ξ(Vet_(k);(n(x),n(t))(ξ;-1(y))

Fra (2.1) og (2.2) følger:

(2.3) Vet;(w,t)(x,z0)

Fra dette og aksiom E14a følger:

(2.4) Vet;(w,t)(x, ξ(Vet_;(n(x),n(t)(ξ;-1(z0)))

45 Merk at nummereringen i dette beviset er internt for beviset. Formelen (1) i dette beviset må derfor ikke sammenblandes med forutsetningen (1) som sier at kunnskapsfeltet til x er monotont i verdenen w med hensyn på intervallet [t1,t2].

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Ved hjelp av (2.2) har vi:

(2.5) $\xi;\text{-}1(z0) = Vet_(k);(n(x),n(y))(\xi;\text{-}1(y))$ Fra (2.4) og (2.5) følger:

(2.6) $Vet;(w,t)(x, \xi(Vet_;(n(x),n(t)(Vet_(k);(n(x),n(y))(\xi;\text{-}1(y))))$

Men fra dette og definisjonen av Vet_(k) følger:

$Vet;(w,t)(x,\xi(Vet_(k+1);(n(x),n(t))(\xi;\text{-}1(y)))$

Dette viser at (1) holder. **QED**.

Under forutsetningene vi nevnte ovenfor, nemlig (+), (1), (4.1) - (4.3) kunne vi utlede som man har sett:

$Vet;(w,t')(x,\xi(Vet_;(n(x),n(t))(\xi;\text{-}1(y)))$.

Man ser nå at ved å benytte teoremet ovenfor istedet for aksiom E14a kan man også utlede følgende:

$Vet;(w,t')(x,\xi(Vet_(k);(n(x),n(t))(\xi;\text{-}1(y)))$ for alle $k>=0$.

Vi kan oppsummere det vi har vist ovenfor i det følgende teorem:

Teorem 2.1.2: Anta $B=<D,X,In>$ er en standard begrepsramme, at $\xi : CFm(B) \text{-}(1\text{-}1)\rightarrow U;f$ og at $<B,\xi>$ representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Anta dessuten:

(i) $t0,t2 \hat{e} T \ \& \ t0<t2 \ \& \ x \hat{e} P \ \& \ w \hat{e} I \ \& \ y \hat{e} Rgn(\xi)$ Inkl U;f

(ii) $(At)(Ay)(y \hat{e} U;f \ \& \ t0 =<t=<t2 \ \& \ Vet;(w,t)(x,y). \rightarrow$
$(At')(t' \hat{e} T \ \& \ t=<t'=<t2 \rightarrow Vet;(w,t')(x,y))$

(iii) $t0 =<t =<t2 \ \& \ Vet;(w,t)(x,y) \ \& \ t=<t'=<t2$

Da gjelder for alle $k \hat{e} N$:

$Vet;(w,t')(x,\xi(Vet_(k);(n(x),n(t))(\xi;\text{-}1(y)))$

Man ser at forutsetningen (ii) i denne satsen sier at kunnskapsfeltet til x i verdenen w er monotont i tidsintervallet [t0,t2]. Teoremet kan derfor sies å kaste noe, om en beskjedent lys over hva som følger fra denne antagelsen.

Vi skal også, men uten å gå svært detaljert inn på dem, studere de følgende to betingelser som er svært tungleste, nemlig:

(*) $t,t' \hat{e} T \ \& \ t< t' \rightarrow (Ay)(Vet;(w,t)(x,y) \ \& y \hat{e} Rgn(\xi) \rightarrow$
$\neg Vet;(w,t)(\xi(Vet_;(n(x),n(t')(\xi;\text{-}1(y))))$

(**) $(At)(At')(t,t' \hat{e} T \ \& y \hat{e} Rgn(\xi) \rightarrow$
$Vet;(w,t)(x, \xi(Vet_;(n(x)(n(t'))(\xi;\text{-}1(y)))) \rightarrow$
$Vet;(w,t)(x,\xi(Vet_;(n(x),n(t'))(Vet_;(n(x)(n(t'))(\xi;\text{-}1(y)))))$

Det første man kan si om disse formlene er at meningsinnholdet egentlig ligger nærmere overflaten enn man kan få inntrykk av. Fordi vi må ta omveien om begrepsrammer og funksjonen ξ, er de ytterst besværlige å lese. Hvis man ikke presser det for langt kan (*) uformelt formuleres slik:

$t<t' \rightarrow Vet_;(x,t)(\alpha) \rightarrow \neg Vet_;(x,t)(Vet_;(x,t')(\alpha))$

Med andre ord er t' et tidspunkt som kommer etter tidpunktet t og vet x ved tidspunktet t at α så er det ikke slik at x ved t vet at han ved det senere tidspunkt t' vet at _. Dette synes ved

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

første øyekast ikke helt urimelig, men det virker tvilsomt om det holder generelt og enda mer tvilsom om det er logisk nødvendig.

Formelen (**) kan uformelt oversettes slik:

t,t'êt → Vet_;(x,t)(Vet_;(x,t')(α)) → Vet_;(x,t)(Vet_;(x,t')(Vet_;(x,t')(α)))

Hvis vi lar t være det nuværende tidspunkt og t' være det tidspunkt som kommer om fem minutter sier formelen ovenfor ikke noe annet enn at dersom x vet *nå* at han om fem minutter vet at α så er det også slik at han vet *nå* at han om fem minutter vil vite at vet at α. Heller ikke dette er noen direkte opplagt setning, men det kan neppe helt benektes at den kan virke rimelig.

Hvorfor (*) og (**) er av interesse er at dersom man antar noe slikt, og i tillegg antar at x's kunnskapsfelt er montont i tidsintervallet [t0,t2], kan man også vise at det er kontinuerlig voksende i dette tidsintervallet. Man har:

Teorem 2.1.3: Anta B=<D,X,In> er en standard begrepsramme, at ξ : CFm(B) -(1-1)→U;f og at <B,ξ> representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Anta dessuten:

(i) t0,t2êT & t0<t2 & xêP & wêI

(ii) (At)(Ay)(yêU;f & t0 =<t=<t2 & Vet;(w,t)(x,y). →
(At')(t'êT & t=<t'=<t2 → Vet;(w,t')(x,y))

(iii) (At)(At')(t,t'ê[t0,t2] & t<t' → (Ay)(Vet;(w,t)(x,y) &yêRgn(ξ) →
¬Vet;(w,t)(ξ(Vet_;(n(x),n(t')(ξ;-1(y))))))

(iv) (At)(At')(t,t'êT &yêRgn(ξ) →
Vet;(w,t)(x, ξ(Vet_;(n(x)(n(t'))(ξ;-1(y)))) →
Vet;(w,t)(x,ξ(Vet_;(n(x),n(t'))(Vet_;(n(x)(n(t'))(ξ;-1(y)))))

(v) Vet;(w,t0)(x,y0) & y0êRgn(ξ)

Gitt disse forutsetningene har man at:

(At)(tê<t0,t2] → (Ez)(zêU;f & Vet;(w,t)(z) &
(At')(t0 =< t' <t → ¬Vet;(w,t')(x,z))))

Bevis: Anta forutsetningene i teoremet holder. Vi skal vise at konsekventen i teoremet holder. Anta derfor for vilkårlig t at tê<t0,t2], med andre ord at (1) t0 <t =< t2. Fra forutsetning (v) følger ved hjelp av aksiom E14a at (2) Vet;(w,t0)(x,ξ(Vet_;(n(x),n(t0)(ξ;-1(y0))))). Fra dette og monotonitetsforutsetningen, forutsetning (ii), følger:

(3) Vet;(w,t)(x, ξ(Vet_;(n(x),n(t0)(ξ;-1(y0))))

Fra dette følger i sin tur ved ytterligere å anvende aksiom E14a at

(4) Vet;(w,t)(x, ξ(Vet_;(n(x),n(t)(Vet_;(n(x),n(t0)(ξ;-1(y)))))

La oss per definisjon sette: (5) q = ξ(Vet_;(n(x),n(t)(Vet_;(n(x),n(t0)(ξ;-1(y))))

Da følger fra (4) og (5) at

(6) Vet;(w,t)(x,q)

Anta nå for vilkårlig t' at (7) t0=<t' <t og anta for reduktio ad absurdum at (8) Vet;(w,t')(x,q). Fra dette og forutsetning (iv) kan man slutte at

(9) Vet;(w,t')(ξ(Vet_;(n(x),n(t)(ξ;-1(q))

Men fra (6) og forutsetningen (iii) kan man slutte:

(10) ¬Vet;(w,t')(ξ(Vet_;(n(x),n(t)(ξ;-1(q))

Man ser at (9) og (10) motsier hverandre. Det følger at (8) er usann og at vi derfor har

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(11) ¬ Vet;(w,t')(x,q).

Siden t' var vilkårlig tidspunkt som oppfylte (7) kan vi konkludere med;

(12) (At')(t0 =< t' <t → ¬Vet;(w,t')(x,q))

Fra dette og (12) kan man så slutte at:

(13) (Ez)(zêU;f & Vet;(w,t)(z) & (At')(t0 =< t' <t → ¬Vet;(w,t')(x,z)))). Men t var et vilkårlig tidspunkt der tê<t0,t2]. Det følger at konklusjonen i teoremet holder. **QED**.

Det virker rimelig å si at denne satsen har en nokså begrenset interesse, men det viser at om vi antar det som kommer til å være standardforutsetningen i en rekke av våre teoremer, nemlig at B=<D,X,In> er en standard begrepsramme, ξ : CFm(B) -(1-1)→ U;f og <B,ξ> representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn, samt gjør den antagelse at kunnskapsfeltet til x i verdenen w er monotont i tidsintervallet [t0,t2] så er x's kunnskapsfelt også kontinuerlig voksende i det samme tidsintervall så sant man forutsetter at (*) og (**), dvs. forutsetter (iii) og (iv) i teoremet ovenfor.

Som vi nevnte er alle disse forutsetningene neppe realistiske, selvom de mer overfladisk sett kan fortone seg plausible. Det følger derfor at teoremet ovenfor er av en mer kuriøs karakter selv om det ikke er fullstendig trivielt. Hovedhensikten her har tross alt bare vært å gi en illustrasjon på forholdet mellom monotone og kontinuerlig voksende kunnskapsfelt.

Vi så at de kravene vi startet med ovenfor var temmelig sterke og ikke kunne karakteriseres som spesielt realistiske. De kravene vi har i tankene er (1) - (3). Det er imidlertid mulig å relativisere disse kravene, i alle fall de to første, slik at de relativiserte krav i prinsippet kan oppfylles i praksis. Vi skal nå se nærmere på dette.

Anta Δ Inkl U;f, ie. at Δ er en mengde med finstrukturerte utsagn. Da skal vi si at *kunnskapsfeltet til x i verdenen w er monotont i tidsintervallet [t0,t1] relativt til Δ* hvis følgende holder:

(Ay)(At)(yêΔ & t0 =<t =<t1 & Vet;(w,t)(y) →
(At')(t =<t' =<t1 → Vet;(w,t')(y)))

Erstatter man utrykket "Δ" i denne definisjonen med "U;f" får man den definisjonen vi ga tidligere.

Vi skal videre si at *kunnskapsfeltet til x i verdenen w er voksende i tidsintervallet [t0,t1] relativt til Δ* hvis og bare hvis vi (a) har at kunnskapsfeltet til x i verden w er monotont i intervallet [t0,t1] relativt til Δ og (b) man har at

(Ez)(Et)(zêΔ &tê[t0,t1] & Vet;(w,t)(x,z) &
(At')(t'ê[t0,t'> → ¬Vet;(w,t')(x,z))

Endelig definerer vi kontinuerlig voksende kunnskapsfelt på følgende vis: Kunnskapsfeltet til x i verdenen w er voksende i tidsintervallet [t0,t1] relativt til Δ hvis og bare hvis (a) kunnskapsfeltet til x i verdenen w er monotont i intervallet [t0,t1] relativt til Δ og (b) man har at

(At)(tê<t0,t1] → (Ez)(zêΔ & Vet;(w,t)(x,z) &
(At')(t0=<t' <t → ¬ Vet;(w,t')(x,z)))))

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Man ser at alle de tre begrepene vi har innført tidligere er spesialtilfeller av dem vi har innført her. Erstatter man uttrykket "Δ" overalt i definisjonene ovenfor med "U;f" får man de gamle definisjonene.

Vi skal nå formulere en temmelig enkel og primitiv sats. Den er kun ment som et eksempel. Senere vil vi ta for oss et mer generelt teorem som kan oppfattes som en generalisering av dette eksemplet. Forutsetningene i denne satsen skal vi betegne med c1, c2, c3, ... osv. Konklusjonene i satsen skal vi betegne med k1, k2 , ... Vi skal altså bevise en setning av typen: c1&c2& ... & cn → k.

I det følgende skal vi anta at det vi kalte standardforutsetningen holder. Med andre ord skal vi anta at:

c1 B=<D,X,In> er en standard begrepsramme, ξ : CFm(B) -(1-1)→ U;f og dessuten at <B,ξ> representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagnene.

Videre skal vi forutsette at α0, ...,α4 er fem formler i CFm(B). Vi forutsetter altså at

c2 Δ Inkl CFm(B) & Δ ={α0, α1, α2, α3, α4}

Nå skal vi også forutsette at x0 er en person og at t;1, ..., t;4 er fire tidspunkter som kommer etter hverandre og at w er en mulig verden. Denne forutsetningen kan formuleres slik:

c3 x0êP & t;1, t;2,t;3,t;4 ê T & (Ai)(iê{1,2,3} → t;i < t;i+1) & wêI

Som man ser uttrykker den tredje konjunkten i c3 at tidspunktene t;1,...,t;4 kommer etter hverandre.

Ytterligere skal vi forutsette at kunnskapsfeltet til x0 i verdenen w er monotont i tidsintervallet [t0,t4] relativt til ξ"Δ. Denne forutsetningen kan formuleres slik i lys av den definisjonen vi har gitt tidligere:

c4 (Ay)(At)(yêξ"Δ & t0 =<t =<t1 & Vet;(w,t)(y) →
(At')(t =<t' =<t1 → Vet;(w,t')(y)))

Vi skal altså anta at c1 - c4 er tilfelle. Dette forhindrer imidlertid ikke at man også kan gjøre en rekke tilleggsantagelser som strengt tatt ikke er nødvendige for utlede konklusjonen i det teorem vi tilslutt skal formulere. Disse tileggsantagelsene er ikke desto mindre fullt ut forenelige med våre "offisielle" antagelser hvorav vi nå har formulert fire, nemlig c1 ... c4.

Det er derfor ingenting i veien for å tenke seg at x0 i verdenen w før tidspunktet t;1 har undret seg over, og stilt seg selv spørsmålet om det utsagn som uttrykkes av setningen α4, med andre ord ξ(α4), er riktig. Vi kan også tenke oss at han har en mistanke om dette. Videre er det intet i veien for å tenke seg at x0 før tidspunktet t1 har lurt på om utsagnet ξ(a4) kan utledes fra de to utsagnene som uttrykkes av formlene α0 og α1. Vi skal nå forutsette at han er sikker på at de finstrukturerte som uttrykkes av α0 og α1 er riktige, med andre ord vet x0 dette ved tidspunktet t1. Denne premissen kan uttrykkes slik:

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

c5 Vet;(w,t;1)(x0, ξ(α0)) & Vet;(w,t;1)(x0, ξ(α1))

Fra c5 kan man naturligvis ved hjelp av aksiom E15a og forutsetningen c1 slutte at
w ⊨;f Vet_;(n(x0),n(t;1)(ξ(α0&α1).

Vi kan nå uten noen motsigelser anta at x0 i tidsintervallet fra t;1 og intil t;2 gjør følgende: Først tenker han mer over hvorvidt utsagnet ξ(α4) følger fra ξ(α0) og ξ(α1). Vedkommende ser imidlertid ikke i denne tidsperioden hvordan dette kan bevises. Så går x0 over til å betrakte spørsmålet om ξ(α4) kan utledes fra ξ(α2). Heller ikke dette kan han innse at er tilfelle. Imidlertid vender han etterhvert blikket mot forholdet mellom utsagnet ξ(α2) og utsagnene ξ(α0) og ξ(α1) og ved tidspunktet t2 innser han at ξ(α2) faktisk følger fra ξ(α0) og ξ(α1). Med andre ord skal vi tillegg til det vi nettopp har forutsatt, eksplistt forutsette:

c6 Inns;(w,t2)(x0, ξ(α2), ξ(α0& α1))

La oss nå fortsette historien og tenke oss at x0 etter tidspunktet t1 reflekterer videre. Han kommer til den konklusjon at ξ(α4) ikke følger fra ξ(α2), men lurer på om ikke ξ(α4) kan utledes fra ξ(α2), samt et annet utsagn ξ(α3). Ved tidspunktet t;3 innser han så at ξ(α3) er riktig. Vi forutsetter derfor:

c7 Vet;(w,t;3)(x0, ξ(α3)

La oss nå anta at x like etter tidspunktet t;3 ser nærmere på forholdet mellomξ(α4) på den ene side og ξ(α2) og ξ(α3) på den annen. La oss anta at han da ved tidspunktet t;4 innser at ξ(α4) følger fra konjunksjonen av disse to finstrukturerte utsagnene, med andre ord at

c8 Inns;(w,t;4)(x0, ξ(α4), ξ(α2&α3))

Dette avslutter listen over forutsetninger. Vi har nå nevnt alle dem som vi vil ta med. Betingelsene c1 - c8 er våre hovedforutsetninger, alt det vi nevnte at skjedde før vi nevnte de forskjellige forutsetningene er en slags "biforutsetninger" som utelukkende er nevnt for å gi et mer utfyllende bilde av hendelsesforløpet fra tidspunktet t;1 til tidspunktet t;4.

Hva kan man nå slutte fra forutsetningene c1 - c8? Det første man kan nevne at følger fra disse antagelsene er:

k1 (Aα)(αêΔ → Vet;(w,t;4)(x0, ξ(α)))

Med andre ord er α en formel i Δ så vil x0 ved det siste tidspunktet som ble nevnt, nemlig t;4, vite at det finstrukturerte utsagn som uttrykkes av α beskriver et faktisk foreliggende forhold.

Det kan være av interesse å gi et detaljert bevis for denne påstanden. Siden Δ={α0,...,α4} behøver vi strengt tatt bare betrakte følgende tilfelle:

(i) Vi må først vise at (1) Vet;(w,t4)(x,ξ(α0)) og Vet;(w,t4)(x,ξ(α1). Men dette følger umiddelbart fra c5 og den forutsetning at kunnskapsfeltet til x0 i verdenen w er montont i tidsintervallet relativt til Δ, med andre ord forutsetning c4.

(ii) For det andre må vi vise at Vet;(w,t;4)(x0, ξ(α2)). Som man ser sier c6 at

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(2) Inns;(w,t;2)(x0, ξ(α2), ξ(α0&α1)). Fra c5 følger

(3) Vet;(w,t;2)(x,ξ(α0)) og Vet;(w,t;2)(x,ξ(α1) ved hjelp av monotonitetsforutsetningen. Fra dette og forutsetning c1 - c3 kan vi så ved hjelp av konjunksjonsaksiomet E15a slutte at (4) Vet;(w,t;2)(x0,ξ(α0&α1). Men fra dette, (2), forutsetningene c1 - c3 og aksiom E7 kan man så slutte (5) Vet;(w,t2)(x, ξ(α2)). Fra dette og monotonitetsforutsetningen c4 kan man så slutte Vet;(w,t;4)(x0, ξ(α2)).

(iii) Det neste som vi må vise er at Vet;(w,t;4)(x0,ξ(α3)). Dette følger imidlertid umiddelbart fra forutsetningen c7 og monotonitetsanatgelsen c4.

(iv) Tilslutt må vi også vise Vet;(w,t;4)(x0, ξ(α4)). Fra (5) ovenfor og c7 følger ved hjelp av c4 at

(6) Vet;(w,t;4)(x0,ξ(α2)) & Vet;(w,t;4)(x9, ξ(α3)

Fra dette kan vi så ved hjelp av forutsetningene c1 - c3 og konjunksjonsaksiomet E15a slutte at: (7) Vet(w,t;4)(x0, ξ(α2&α3))

Men fra dette, forutsetning c8 og aksiom E7 følger så at Vet;(w,t;4)(x0,ξ(α4)).

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for at k1 følger fra c1 - c8.

Konklusjonen k1 kan naturligvis formuleres på andre måter. De følgende to formler er ekvivalente med k1:

k11 w ⊨;f Vet_;(n(x0),n(t;4)(Konj/i,0,4/(α;i))

k12 w ⊨;f Vet;(w,t;4)(x0, ξ(Konj/i,0,4/(α;i))

Begge kan utledes fra k1 ved hjelp av konjunksjonsaksiomet E15a. Ikke bare kan k11 og k2 utledes fra k1, men k11 såvel som k12 impliserer k1. De tre formlene er derfor ekvivalente.

Vi kan nå oppsummere våre resultater så langt i form av det følgende teorem:

Teorem 2.1.4: Anta (i) at B=<D,X,In> er en standard begrepsramme, ξ: CFm(B) -(1-1)→ U;f og at <B,ξ> representerer en delmengde av de finstukturerte utsagn.

Anta videre at følgende holder:

(ii) Δ Inkl CFm(B) & Δ={α0,α1,α2,α3,α4}

(iii) x0êP & t;1,...,t;4êT & wêI & t;1 < t;2<t;3 <t;4

(iv) (Ay)(At)(tê[t;1,t;4] & yêξ"Δ & Vet;(w,t)(x0,y) →
(At')(t=<t' =< t;4 → Vet;(w,t')(x0,y))

(v) Vet;(w,t;1)(x0, ξ(α0)) & Vet;(w,t;1)(x0,ξ(α1)

(vi) Inns;(w,t;2)(x0, ξ(α2), ξ(α0&α1))

(vii) Vet;(w,t;3)(x0, ξ(α3))

(viii) Inns;(w,t;4)(x0, ξ(α4), ξ(α2&α3))

Da gjelder:

(Aα)(αêΔ → Vet;(w,t;4)(x0, ξ(α)))

Det bør bemerkes at Teorem 4 fremdeles holder om vi over alt i teoremet erstatter "Vet" med "Tror". Likeledes vil Teorem 4 holde om man overalt i forutsetningene erstatter "Vet" med "Husk". I det hele tatt kan forutsetningene i teoremet ovenfor varieres en god del slik at man kan formulere en rekke beslektede satser.

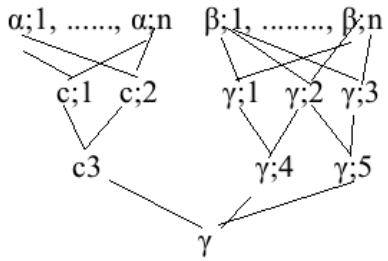
Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Det bør understrekes at teoremet ovenfor er et ytterst enkelt eksempel på hva som kan utledes i den kunnskapsteorien vi har rigorøst definert ovenfor. Det er ment som en enkel illustrasjon til hva som kan utledes. Vi har ikke hatt til hensikt å formulere noen virkelig dypsindig sats. Toremet ovenfor er alt annet enn dypsindig.

Det bør også understrekes at deduktiv tenkning, som alltid er en konkret persons deduktive tenkning, er en konkret prosess som foregår i tid. Naturligvis er det eksemplet vi har gitt ovenfor ytterst primitivt og forenklet, men det er i hovedsak rimelig å påstå at all deduktiv tenkning følger det mønster, eller lignende mønstre, som det som er illustrert i eksemplet.

La oss forsøke å illustrere dette ved et annet eksempel. Man kan tenke seg en matematiker som etter en god del strev har formulert en viss sats γ. Vedkommende lurer nå på om han kan greie å bevise denne satsen. Han har en mistanke om at dette er tilfelle, men kan ved det tidspunktet satsen har blitt tydelig formulert ikke si med sikkerhet at dette er tilfelle. Etter adskillig tankearbeid kommer vedkommende frem til at satsen γ følger fra tre andre setninger: c;3, γ;4 og γ;5. Vedkommende innser altså at satsen γ følger fra konjunksjonen av setningene c;3, γ;4 og γ;5. Han undres nå på om disse tre setningene kan utledes fra andre setninger som han kjenner til fra tidligere og som han vet er sanne. Vi kan anta at han starter med c;3. Etter noe om og men finner han ut at c;3 kan utledes fra to setninger c;1 og c;2. Etter enda mer tankearbeid finner han så ut at både c;1 og c;2 følger fra setningene α;1,....,α;n som han kjenner fra tidligere og vet er sanne. Vår matematiker innser nå at hovedsatsen γ følger fra α;1,...α;n samt γ;4 og γ;5. Siden α;1,....,α;n er innlysende vet han at kondisjonalen som har konjunksjonen av γ;4 og γ;5 som antesedent og γ som konsekvent er riktig. Imidlertid har vår matematiker en sterk tro på γ;4 og γ;5 også lar seg utlede fra helt selvinnlysende setninger han vet er sanne. Etter endel anstrengende tankearbeid finner han at γ;4 følger fra setningene γ;1 og γ;2 og at γ;5 følger fra setningene γ;2 og γ;3. Etter igjen å gjennomført tidskrevende spekulasjoner i forbindelse med setningene γ;1 ... γ;3 innser han tilslutt at hver og en av disse setningene γ;1, γ;2, γ;3 følger fra konjunksjonen av visse setninger β;1,...,β;j som han på forhånd vet at er sanne. Ved dette tidspunkt tar han et overblikk over tankegangen og innser at γ følger fra setningene α;1,... α;n og β;1,...., β;j som han tidligere visste var riktige og som han nå husker og derfor vet er riktige. Ved dette tidspunkt vil altså matematikeren vite at den satsen han til å begynne med ikke visste var riktig, faktisk er riktig.

Følgende figur illusterer det vi har nevnt ovenfor:



Studerer man trestrukturen til figuren ovenfor ser man at hvert punkt i treet, bortsett fra de øverste punktene har visse entydig bestemte etterfølgerpunkter. Etterfølgerpunktene til γ

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

representeres av c;3, γ;4 og γ;5. Etterfølgerpunktene til formelen γ;4 er γ;1 og γ;2. Etterfølgerpunktene til c;2 er en ikke-tom delmengde av α;1,...,α;n, og så videre.

Man ser fra dette at figuren er et endelig tre og og derfor bare har endelig mange grener. Ethvert punkt i treet har enten minst en etterfølger eller så mangler det etterfølgere. De punktene som ikke har noen etterfølger skal vi kalle sluttpunkter i treet.
Hvis man ser på vårt eksempel ovenfor og kaller vår tenkte matematiker for x er det lett å se at dersom y er et punkt i treet og z er konjunksjonen av etterfølger punktene til y så innser x ved et eller annet tidspunkt at det finstrukturerte utsagn som uttrykkes av y følger fra det finstrukturerte utsagn som uttrykkes av z, såsant y ikke er noe sluttpunkt i treet.

Hvis man har for seg et tre av den typen som er anskueliggjort i figuren er det mulig å legge ut alle punktene i treet i en lineær rekkefølge. Dette må gjøres på en slik måte at alle de formlene som er lengst unna toppunktet i treet kommer først, dernest de som er nestlengst unna, osv., inntil man kommer til toppunktet i treet som man plasserer helt sist i rekken.

La oss nå formulere et mer generelt teorem som dekker de to eksemplene som vi har trukket frem og i noen grad har studert ovenfor. Satsen er den følgende:

Teorem 2.1.5: Anta følgende holder:

(i) B=<D,X,In> er en standard begrepsramme, ξ: CFm(B) -(1-1)→U;f og <B,ξ> representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn.

(ii) Δ={α;0,....., α;n} Inkl CFm(B) og t;0,.....,t;n êT , t;i < t;i+1 for alle iê{0,...,n-1} og wêI & xêP

(iii) For alle iê{0,....,n} har vi enten

(a) Vet;(w,t;i)(x, ξ(α;i)) eller så har man

(b) at det finnes Γ der ø≠ Γ Inkl {α;0, ... , α;(i-1) } og en konjunksjon β av formlene i Γ slik at Inns;(w,t;i)(ξ(α;i), ξ(β))

(iv) Kunnskapsfeltet til x i verdenen w er monotont i tidsintervallet [t;0, t;n] relativt til Δ

Holder forutsetningene (i) - (iv) har man:

(Aα)(αêΔ → Vet;(w,t;n)(x, ξ(α))

Beviset for dette teoremet er et enkelt induksjonsbevis. Før vi gir dette beviset finner vi det imidlertid hensiktsmessig å kommentere de enkelte forutsetningene i satsen.

Forutsetning (i) er den vanlige standardforutsetningen som vi har nevnt tidligere. Det skulle ikke være nødvendig på dette punkt å si mer om denne akkurat her. Forutsetning (ii) skulle heller ikke være spesielt vanskelig å fortstå. Den sier bare at Δ er en mende med lukkede formler bestemt av begrepsrammen B, at w er en mulig verden og x en person og at t;0, ...,t;n er tidspunkter som kommer etter hverandre i den orden som er nevnt. Hopper vi til forutsetning (iv) har vi på et tidligere tidspunkt gjort utførlig rede for den.

Det er imidlertid nødvendig å si noen ord om forutsetning (iii). Anta Γ Inkl {α;0, ...,α;(i-1)} og at Γ inneholder minst to formler. Da gir det strengt tatt ikke noen mening å snakke om konjunksjonen av elementene i Γ. Inneholder Γ kun to formler, la oss si α;k og α;j der k,j ê{0, ... ,(i-1)} finnes det to måter å danne en konjunksjon av dem på nemlig α;k& α;j og α;j&α;k. Inneholder Γ for eksempel tre formler α;j, α;k og α;s vil det finnes seks mulige måter å legge disse i en rekke og for hver av disse mulighetene vil det være to måter å sette paranteser på, siden vi må skille mellom (a;j & α;k)& α;s og α;j & (α;k &α;s).

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Selvfølgelig vil alle disse måtene å danne konjunksjoner av α;j, α;k og α;s resultere i logisk sett ekvivalente setninger. Men strengt tatt vil de uttrykke distinkte finstrukturerte utsagn om forutsetning (i) legges til grunn. Punkt (b) i forutsetning (iii) innebærer derfor ikke noe annet enn at β skal være en av disse konjunksjonene som kan dannes fra formlene i Γ om Γ inneholder mer enn ett element. Hvis Γ bare inneholder en formel, ie. Γ={γ} for noen γ må uttrykket " en konjunksjon av formlene i Γ" tolkes slik at det innebærer at β=γ, med andre ord at β er identisk med det ene elementet som befinner seg i Γ.

Vi gir så beviset for teoremet ovenfor:

Bevis: Satsen bevises ved induksjon på n. *Basistrinn*: n=0. Da har vi i kraft av forutsetning (iii) at Δ={α;0} og derfor at Vet;(w,t;0)(x,ξ(α;0)). Det følger umiddelbart at

(Aα)(αêΔ → Vet;(w,t;n)(x, ξ(α;0)) siden t;n=t;0 når n=0.

Induksjonstrinn: Anta satsen holder for n>0. Vi skal vise at den holder for n+1. Anta derfor (1) forutsetningene (i) - (iv) holder for n+1. Det vil da være nok å vise at dette og induksjonshypotesen impliserer at (+) (Aα)(αê{α;0, ... ,α;(n+1)} → Vet;(w,t;(n+1))(x,ξ(α))) Siden (1) holder har vi ved hjelp av induksjonshypotesen at

(2) (Aα)(αê{α;0, ... ,α;n} → Vet;(w,t;n)(x,ξ(α))

Siden (iii) holder for n+1 har vi om vi setter i=n+1 at en av to ting er tilfelle:

Tilfelle (a): (3) Vet;(w,t;(n+1))(x,ξ(α;(n+1))). I dette tilfelle følger (+) umiddelbart ved hjelp av (2).

Tilfelle (b): Det finnes Γ og β der:

(4) ø≠Γ Inkl {α;0, ... ,α;n}

(5) β er en konjunksjon av formlene i Γ

(6) Inns;(w,t;(n+1))(ξ(α;(n+1), ξ(β))

Fra (5) følger det at vi kan anta at det finnes j;1,....,j;kê{0, ... ,n} og at β= α;(j;1)& α;(j;2) & ... &α;(j;k). (Parantesene utelates). Siden j;1,....,j;kê{0, ... ,n} følger ved hjelp av (2) at

(8) Vet;(w,t;n)(x, ξ(α;(j;1)) & .....& Vet;(w,t;n)(x, ξ(α;(j;k)))

Fra dette og den forutsetning at kunnskapsfeltet til x i verdenen w er monotont med hensyn på intervallet [t;0, t;(n+1)] relativt til {α;0, ... ,α;(n+1)} (Jmf. (1)) samt konjunksjonsaksiomet E15a følger at (9) Vet;(w,t;(n+1))(x, ξ(β)). Fra dette, (6) og aksiom E7 kan man slutte at Vet;(w,t;(n+1))(x, ξ(α;(n+1))). Dette sammen med (2) impliserer (+).

I begge tilfelle ser man at (+) holder. Dette viser at satsen holder for n+1 om den holder for n. Ved induksjon følger så at den holder for alle n>=0. **QED**.

Vårt neste teorem er nær beslektet med det foregående teorem, Teorem 2.1.5. Vi antar at B=<D,X,In> er en standard begrepsramme, videre at ξ : CFm(B) -(1-1)→U;f og at <B,ξ> representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Vi betegner navngivningsfunksjonen, dvs. funksjonen som tilordner ethvert element a i D navnet på dette, ie, <2,0,0,a> med n. Dette innebærer at n = Mg(<a,<2,0,0,a>> : aêD). Videre antar vi at x er en person, ie. xêP og at wêI, mao. at w er en mulig verden. En ytterliger forutsetning er at t;0 og t;2 er to tidspunkter der t;2 kommer etter t;0 og at t';0, ...,t';j er en rekke av tidspunkter som alle kommer etter hverandre og at t:0 kommer før alle tidspunktene t';0, ...,t';j og at t;2 kommer etter dem alle. Ytterligere forutsetninger i teoremet er at α;1,....,α;n og α;(n+1) ,..., α;(n+j) er lukkede formler over begrepsrammen B. Vi setter Δ = {α;1,....,α;n, α;(n+1) ,..., α;(n+j)}.

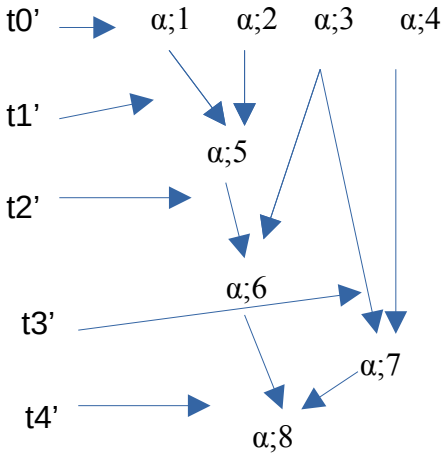
Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Vi skal anta kunnskapsfeltet til x i verdenen w er monotont over tidsintervallet [t;0,t;2] relativt til Δ og dessuten at x ved tidspunktet t;0' i verdenen w vet at alle de finstrukturerte utsagnene som uttrykkes av α;1,...,α;n, ie ξ(α;1), ... , ξ(α;n) er sanne. Dessuten har vi som en siste forutsetning at for alle r der 1 =<r =< j finnes det s,p <n+r slik at x ved tidspunktet t;r' innser at utsagn ξ(α;n+r) (ie. det finstrukturerte utsagnet som uttrykkes av α;(n+r)) følger fra det finstrukturerte utsagnet ξ(α;s & α;p).

Under disse forutsetninger kan man konkludere med at for alle p der 1 =< p =< n+j har man at Vet;(w,t';j)(x,ξ(α;p))

Man kan forsøke å illustrere innholdet i denne satsen ved den følgende figur:

Figur 1



Ser man på forutsetningene vi har angitt ovenfor ser man at i det tilfellet som er forsøkt anskueliggjort i figuren ovenfor er n=4 og j=4. Man har altså at α;1,...,α;n = α;1, ... ,α;4 og at α;(n+1), ... , α;(n+j) = α;5, α;6, ... , α;8. I figuren er det slik at vi tenker oss at personen x (i verdenen w) ved tidspunktet t';0 vet at de finstrukturerte utsagnene som uttrykkes av α;1,...,α;4 er sanne. Ved tidtspunktet t';1 innser vedkommende at utsagnet uttrykt av α;(n+1), ie α;5 følger fra det finstrukturerte utsagnet som uttrykkes av konjunksjonen av α;1 og α;2. Videre innser x ved tidspunktet t';2 at utsagnet α;6 følger fra utsagnet uttrykt av konjunksjonen av α;5 og α;3 og ved tidspunktet t';3 at utsagnet uttrykt av α;7 følger fra det finstrukturerte utsagnet som uttrykkes av konjunksjonen av α;3 og α;4. Endelig innser x ved t';4 at utsagnet uttrykt av α;8 følger fra utsagnet uttrykt av konjunksjonen av formlene α;6 og α;7. Siden kunnskapsfeltet til x i verdenen w er monotont i tidsintervallet [t;0,t;2] med hensyn på Δ= {α;1,....,α;8} følger det x ved tidspunktet t';4 (ie. t';j siden j=4) må vite at alle utsagnene uttrykt av formlene i Δ er sanne.

Det teoremet som vi nå har gjort rede for kan formuleres formellt på følgende måte:

Teorem 2.1.6: Anta B=<D,X,In> er en standard begrepsramme. Anta videre at ξ: CFm(B) -(1-1)→U;f og at <B,ξ> representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagnene. Sett:

n = Mg(<x, <2,0,0,x>>: xêD)

Anta følgende holder:

(i) xêP, t;0, t;2êT og wêI

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(iii) α;0,.... α;n, α;(n+1),..., α;(n+j) ê CFm(B) der n>=0 og j >= 1 &
Δ={α;0,.... α;n, α;(n+1),..., α;(n+j)}
(ii) (Ay)(At)(yêξ"Δ & têT & t;0 =< t =< t;2 & Vet;(w,t)(x,y) →
(At')(t'êT & t =< t' =<t;2 → Vet;(w,t')(x,y)))
(iv) t';0,...., t';jêT og t;0 < t';0 < t';1 < ..... <t';(j-1) < t';j < t;2
(v) (Aj)(jê{0,....,n} → w ⊨;B Vet_;(n(x),n(t';0)(α;j))
(vi) For alle r der n+1 =<r =< n+j finnes s,p <r slik at
w ⊨; B Inns_;(n(x),n(t';(r-n)))(α;r, α;s & α;p)
Under disse forutsetningene har man, for alle p der 0 =< p =< n+j, at
w ⊨;B Vet_;(n(x),n(t';j))(α;p)

Bevis: Denne satsen bevises ved induksjon på j >=1. Vi viser først at satsen holder for j=1. Dernest viser vi at den holder for j+1 om den holder for j. På grunnlag av disse to forhold kan man så slutte at den holder for alle j>=1.

Basistrinn: Anta (0) j=1. Fra forutsetning (v) i teoremet kan man da slutte at (1) (Aj)(jê{0,....,n} → w ⊨;B Vet_;(n(x),n(t';0)(α;j)). Siden j=1 følger ved hjelp av forutsetning (vi) at det finnes s,p der (2) s,p <n+1 og hvor man har:

(3) w ⊨; B Inns_;(n(x),n(t';1))(α;(n+1), α;s & α;p)

Siden s,p <n+1 følger at s,p =< n og derfor at (4) α;s,α;p ê {α;0,...,α;n}. Fra dette og (1) kan man slutte:

(5.1) w ⊨;B Vet_;(n(x),n(t';0)(α;s)
(5.2) w ⊨;B Vet_;(n(x),n(t';0)(α;p)

Fra disse to påstandene kan man så ved hjelp av definisjonene av Vet_ og |Vet| slutte:

(6.1) Vet;(w,t';0)(x, ξ(α;s))
(6.2) Vet;(w,t';0)(x, ξ(α;p))

Fra dette følger så ved hjelp av aksiom E15, punkt (i), at

(7) Vet;(w,t';0)(x, ξ(α;s &α;p))

Fra (3) kan man likeledes, ved hjelp av definisjonene av Inns_ og |Inns| slutte:

(8) Inns;(w,t';1)(x, ξ(α;(n+1)),ξ(α;s &α;p))

Fra dette og (7) følger så ved hjelp av aksiom E7 at (9) Vet;(w,t';1)(x,ξ(α;(n+1))). Men herav kan man igjen ved hjelp av definisjonene av Vet_ og |Vet| slutte

(10) w ⊨;B Vet_;(n(x),n(t';1)(α;(n+1)).

Anta nå for vilkårlig p at 0=< p =<n+j. Da følger ved hjelp av (1) og (10) at

w ⊨;B Vet_;(n(x),n(t';j)(α;p)

Men fra dette kan man slutte at satsen holder for j=1.

Induksjonstrinn: Anta satsen holder for j>=1 (Induksjonshypotese). Anta (1) at forutsetningene i satsen holder for j+1 (med andre ord anta at (i) - (vi) holder med "j" erstattet overalt med "j+1"). Fra dette og induksjonshypotesen følger:

(2) (Ap)(0=<p =< n+j → w ⊨;B Vet_;(n(x),n(t';j))(α;p)

Nå har vi fra forutsetning (vi) at det finnes s,p der (3) s,p < n+(j+1) og slik at

(4) w ⊨;B Inns_;(n(x),n(t':(j+1))(α;(n+(j+1)), α;s &α;p)

Fra (3) følger s,p =< n+j og derfor ved hjelp av (2) at

(5.1) w ⊨;B Vet_;(n(x),n(t';j)(α;p)
(5.2) w ⊨;B Vet_;(n(x),n(t';j)(α;s)

Fra dette følger ved hjelp av definisjonene av Vet_ og |Vet| at

(6.1) Vet;(w,t';j)(x,ξ(α;p))

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(6.2) Vet;(w,t';j)(x,ξ(α;s))

Fra dette følger så ved hjelp av aksiom E15, punkt (a), at

(7) Vet;(w,t;j)(x, ξ(α;s &α;p))

Siden t;0 < t';j < t';(j+1) < t;2 har vi fra (7) og forutsetning (ii) at

(8) Vet;(w,t';(j+1))(x, ξ(α;s &α;p))

Fra (4) følger ved hjelp av definisjonene av Inns_ og |Inns| at

(9) Inns;(w,t';(j+1))(x, ξ(α;(n+(j+1))),ξ(α;s&α;p))

Fra dette og (8) kan man så ved hjelp av aksiom E7 slutte

(10) Vet;(w, t';(j+1))(ξ(α;(n+(j+1))))

Herav følger så ved hjelp av definisjonene av Vet_ og |Vet| at

(11) w ⊨;B Vet_;(n(x),n(t';(n+(j+1))))(α;(n+(j+1)))

Fra (2) og forutsetning (ii) følger:

(12) (Ap)(0=<p =< n+j → w ⊨;B Vet_;(n(x),n(t';(j+1))(α;p))

siden t;0 < t;j =< t';(j+1) < t;2. Fra (11) og (12) følger imidlertid det vi ønsker nemlig:

(Ap)(0=<p =< n+(j+1) → w ⊨;B Vet_;(n(x),n(t';(j+1))(α;p))

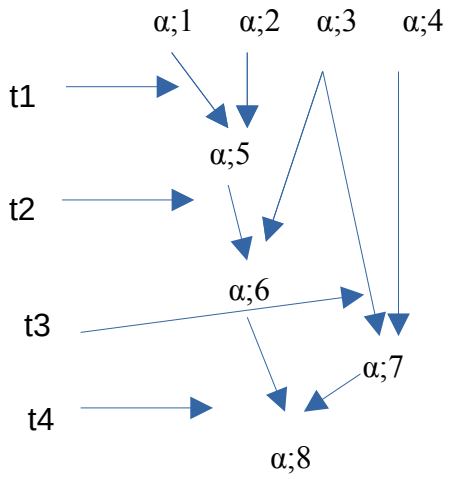
Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Forutsetningene i vårt neste teorem sammenfaller i hovedsaken det vi har gjort rede for, bortsett at vi sløyfer forutsetningen om at trosfeltet til individet x skal være monotont. For det første forutsetter vi at B=<D,X,In> er en standard begrepsramme, at ξ er en funksjon der vi har ξ: CFm(B) -(1-1)→ U;f og at den utvidete begrepsrammen <B,ξ> representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagnene. Dessuten setter vi n= Mg(<a, <2,0,0,a>>: aêD). Er aêD representerer da n(a) navnet på a. For det andre antar vi at x er en person, w er en mulig verden og at t;1, ... ,t;j er tidspunkter som kommer etter hverandre. Videre antar vi at α;0, ..., α;n , α;(n+1) ,..., α;(n+j) er lukkede formler over begrepsrammen B og at n>=1 og j>=1. Tilslutt forutsetter vi at for alle rê{1, ... ,j} finnes det s,p < n+r slik at x ved tidspunktet t;r i verdenen w innser at det finstrukturerte utsagnet som uttrykkes av α;(n+r) følger fra det finstrukturerte utsagnet som uttrykkes av konjunksjonen av α;s og α;p. Gitt disse forutsetningene kan vise at det finstrukturerte utsagnet som uttrykkes av konjunksjonen av de diverse α;0, ... ,α;n (ie. ξ(Konj/i,0,n/(α;i))) impliserer utsagnet uttrykt av α;(n+r) for 1 =<r =<j. Som vi gjorde i forbindelse Teorem 2.1.6 kan vi også forsøke å illustere innholdet i satsen ved en figur. (Se Figur 2)

Studerer man de forutsetningene vi har nevnt ovenfor ser man vi i figuren betrakter en situasjon der n=4 og j=4. Ved tidspunktet t1 innser x (i verdenen w) at α;5 følger fra α;1 og α;2. Ved t2 innser vedkommende at α;6 følger fra α;5 og α;3. Fra forutsetningene i satsen impliserer dette ved hjelp av aksiom E6 at konjunksjonen av α;1 og α;2 impliserer α;5, eller nøyaktigere at μ;f(ξ(α;1&α;2)) Inkl μ;f(ξ(α;5)), og at konjunksjonen av α;3 og α;5 impliserer α;6. Tilsvarende ser man at α;3 og α;4 impliserer α;7 og at α;6 og α;7 impliserer α;8. Det følger derfor at utsagnene i rekken α;5, α;6, α;7, α;8 alle er implisert av konjunksjonen av α;1,...,α;4.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Figur 2



Vi gir nå en formell formulering av teoremet og et bevis for det. Selve teoremet kan formuleres presist på denne måten:

Teorem 2.1.7: Anta B=<D,X,In> er en standard begrepsramme. Anta videre at ξ: CFm(B) -(1-1)→U;f og at <B,ξ> representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagnene. Sett:

n = Mg(<x, <2,0,0,x>>: xêD)

Anta følgende holder:

(i) xêP og wêI

(ii) t;1, ... ,t;j êT

(ii) α;1,.... α;n, α;(n+1),..., α;(n+j) ê CFm(B) der n>=2 og j >= 1

(iv) For alle r der rê{1, ... ,j} finnes s,p <n+r slik at

w ⊨;B Inns_;(n(x),n(t;r))(α;(n+r), α;s & α;p)

Under disse forutsetningene gjelder:

(Ar)(rê {1, ... ,j} → μ;f(ξ(Konj/i,1,n/(α;i))) Inkl μ;f(ξ(α;(n+r)))

Bevis: Det er naturlig å bevise denne satsen ved induksjon på j. Vi viser først at den holder for j=1, og dernest at den holder for j+1 om den holder for j >=1. Den vil da selvfølgelig holde for absolutt alle j>=1.

Basistrinn: Anta forutsetningene i satsen holder, videre at j=1 og rê{1,...,j} for vilkårlig r. Det følger da at r=1. Det vil da finnes s,p der (1) s,p < n+r =n+1 og slik at:

(2) w ⊨;B Inns_;(n(x),n(t;r))(α;(n+1), α;s & α;p)

Fra (2) følger ved hjelp av aksiom E6 at

(3) μ;f(ξ(α;s&α;p)) Inkl μ;f(ξ(α;n+1)) Inkl μ;f(ξ(α;n+r)) (siden r=1)

Fra (1) følger s,p =<n og derfor at α;s, α;p ê{α;0,..., α;n}. Da har man i lys av definisjonen av ξ : μ;f(ξ(Konj/i,1,n/(α;i))) = SN/i,1,n/μ;f(ξ(α;i)) Inkl μ;f(ξ(α;s &α;p))

Men fra dette og (3) følger μ;f(ξ(Konj/i,0,n/(α;i))) Inkl μ;f(α;n+r).

Dette viser at satsen holder for j=1.

Induksjonstrinn: Anta at satsen holder for j. Vi skal vise at den holder for j+1. Anta derfor for vilkårlig r at (1) rê{1,...,j+1}. Det er da to muligheter:

(a) rê{1,...,j}. Da har vi ved hjelp av induksjonshypotesen at

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

μ;f(ξ(Konj/i,0,n/(α;i))) Inkl μ;f(ξ(α;(n+r))

(b) r=j+1. Da har vi ved hjelp av forutsetning (iv)

(2) w ⊨; f Inns_;(n(x),n(t;(j+1)))(α;(n+(j+1)), α;s & α;p)

der s,p < n+r= n+(j+1). Det siste impliserer at s,p =< n+j. Vi må derfor ha i lys av induksjonshypotesen at

(3.1) μ;f(ξ(Konj/i,0,n/(α;i))) Inkl μ;f(ξ(α;s))

(3.2) μ;f(ξ(Konj/i,0,n/(α;i))) Inkl μ;f(ξ(α;p))

Det følger fra dette at (4) μ;f(ξ(Konj/i,0,n/(α;i))) Inkl μ;f(ξ(α;s&α;p))

Fra (2) har vi imidlertid ved hjelp av definisjonene av Inns_ og |Inns|, samt aksiom E6, at μ;f(ξ(α;s&α;p)) Inkl μ;f(ξ(α;(n+(j+1)))). Men fra dette og (4) kan vi slutte:

μ;f(ξ(Konj/i,0,n/(α;i))) Inkl μ;f(ξ(α;(n+(j+1)))) som impliserer siden r=j+1

μ;f(ξ(Konj/i,0,n/(α;i))) Inkl μ;f(ξ(α;(n+r))

Man ser at i begge tilfellene holder satsen for j+1 om den holder for j. Dette avslutter dermed beviset. **QED**.

Vårt neste teorem fortjener mer utførlige kommentarer. Men la oss først forklare i ren prosa hva det sier. I teoremet forutsetter vi for det *første* at B=<D,X,In> er en standard begrepsramme, at ξ er en funksjon der vi har ξ: CFm(B) -(1-1)→ U;f og at den utvidete begrepsrammen <B,ξ> representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagnene.[46] For det *andre* antar vi at x er en person, w en mulig verden og at t;1, ... ,t;n er tidspunkter som kommer etter hverandre i den rekkefølgen som er antydet (ie t;i < t;(i+1) for i=1, ... ,n). For det *tredje* antar vi at α;1, ... ,α;n er formler i CFm(B), ie er lukkede formler over begrepsrammen B og at α;1, ... ,α;n representerer et bevis over B. (Jmf. Del I, §2.6). For det *fjerde* forutsetter vi at for alle jê{1, ... ,n}at dersom α;j er et aksiom i beviset α;1, ... ,α;n så innser x ved tidspunktet t;j (i verdenen w) at det finstrukturerte utsagn som uttrykkes av α;j er sant, og at dersom α;j er sluttet fra α;k og α;s (k,s <j) ved hjelp av modus ponens så innser x vet tidspunktet t;j at ξ(α;j) følger fra ξ(α;k &α;s). For det femte forutsetter vi at kunnskapsfeltet til x i verdenen w er monotont i tidsintervallet [t;1,t;n] med hensyn på Δ={α;1,...,α;n}.

Gitt disse forutsetningene kan man konkludere med at for alle j der 1=<j =<n er det slik at x ved tidspunktet t;j vet at det finstrukturerte utsagnet som uttrykkes α;j er sant.

Teorem 2.1.8: Anta B=<D,X,In> er en standard begrepsramme. Anta videre at ξ: CFm(B) -(1-1)→U;f og at <B,ξ> representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagnene. Sett:

n = Mg(<x, <2,0,0,x>>: xêD)

Anta følgende holder:

(i) α;1, ..., α;nêCFm(B) og at sekvensen α;1 .... α;n representerer et bevis over B.

(ii) wêI , xêP, t;1, ..., t;n êT

(iii) Anta t;i <;f t;(i+1) for i = 1,..., n-1

(iv) Anta for alle jê{1, ... ,n } at

(a) w ⊨;B Innse_;(n(x),n(t;j))(α;j) om α;j er et aksiom

(b) w ⊨;B Inns_;(n(x),n(t;j))(α;j, α;k & α;s) om α;j er sluttet fra α;k og α;s

46 Vi forutsetter også at n= Mg(<a,<2,0,0,a>>: aêD), med andre ord at n er navngivningsfunksjonen.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

ved hjelp av modus ponens. (k,s <j)

(v) Anta at følgende holder:

(Ay)(At)(t;1 =< t =< t;n & Vet;(w,t)(x,y) →

(At')(t =< t' =< t;n → Vet;(w,t')(x,y)))

Under disse forutsetningene har man:

(Ak)(1 =< k =< n→ Vet;(w,t;k)(x,ξ(α;k)))

Bevis: Også beviset for denne satsen er ved induksjon. *Basistrinn*: Vi viser at satsen holder for om n=1. Anta derfor at n=1, forutsetningene i satsen holder og at (1) 1=<k <=n. Da kan beviset α;1,....,α;n kun inneholde en formel. I lys av definisjonen vi ga av et bevis må derfor denne formelen være et aksiom. Det følger da ved hjelp av forutsetning (iv) at

w ⊨;B Innse_;(n(x),n(t;1))(α;1). Fra dette har vi ved hjelp av definisjonene av Innse_ og |Innse_| at Innse;(w,t;1)(x,ξ(α;1). Men fra dette, aksiom E10 og det forhold at k=1 følger Vet;(w,t;k)(ξ(α;k)). Dette viser at satsen holder om n=1.

Induksjonstrinn: Anta satsen holder for n. Vi skal da vise at den holder for n+1. Anta derfor forutsetningene i satsen holder når n+1 settes inn for n og anta at

(1) 1=<k =<n+1. Etter induksjonshypotesen har vi da

(2) (Ak)(1 =< k =< n→ Vet;(w,t;k)(x,ξ(α;k))). Det vil derfor være nok å vise at

(+) Vet;(w,t;k)(x,ξ(α;(n+1))). Nå er det to muligheter når det gjelder α;(n+1).

Tilfelle (i): α;(n+1) er et aksiom. Da har vi i lys av forutsetning (iv) at

(3) w ⊨;B Innse_;(n(x),n(t;(n+1)))(α;(n+1)). Fra dette har vi ved hjelp av definisjonene av Innse_ og |Innse_| at Innse;(w,t;(n+1))(x,ξ(α;(n+1)). Men fra dette, aksiom E10 og det forhold at k=1 følger Vet;(w,t;(n+1))(x, ξ(α;(n+1))). Satsen holder derfor i dette tilfellet.

Tilfelle (ii) α;(n+1) er sluttet ved hjelp av modus ponens fra to tidligere formler i rekken α;p og α;s der (4) p,s <n+1. Da har vi i kraft av forutsetning (iv) at

(5) w ⊨;B Inns_;(n(x),n(t;(n+1)))(α;(n+1), α;p & α;s)

Det er åpenbart at p,s >=1. Vi har derfor i lys av (2) at

(6.1) Vet;(w,t;s)(x, ξ(α;s)))

(6.2) Vet;(w,t;p)(x, ξ(α;p)))

Fra (6.1) og (6.2) følger ved hjelp av forutsetning (v) at

(7) Vet;(w,t;(n+1))(x, ξ(α;s)) & Vet;(w,t;(n+1))(x,ξ(α;p))

Men fra dette og aksiom E15, punkt (i), følger (8) Vet;(w,t;(n+1))(x, ξ(α;p & α;s)) Fra (5) har vi ved hjelp av definisjonene av Innse_ og |Innse_| at

(9) Inns;(w,t;(n+1))(x, ξ(α;(n+1)), ξ(α;p&α;s)). Fra dette, (8) og aksiom E7 følger så: Vet;(w,t;(n+1))(x, ξ(α;(n+1))). Satsen holder derfor også i dette tilfellet.

Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

La oss forsøke å foreta en slags oppsummering og vurdering av de resultatene vi har oppnådd i denne paragrafen. Som vi har sagt i den innledende kommentaren til Teorem 2.1.8 vist at dersom B= <<D,X,In>,ξ> er en standard utvidet begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn og αêCFm(B) som er en predikatlogisk sannhet kan vi alltid finne et bevis α;0, ... ,α;n der α;n=α og tenke oss en person som suksesivt erkjenner at de diverse setningene er sanne og derfor også ved et gitt tidspunkt innser at den siste setningen i beviset uttrykker et finstrukturert utsagn som er sant. Man kan uttrykke dette ved å si at enhver predikatlogisk sannhet i prinsippet er erkjennbar.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Dette har visse konsekvenser. Anta λ er en lukket formel over B (ie. λêCFm(B)) og at λ uttrykker et utsagn som er kontingent. Da kan selvfølgelig ikke λ være noen predikatlogisk sannhet. La oss nå videre anta at e;1, ..., e;n êCFm(B) og at e;1, ... ,e;n er formler som uttrykker påstander som kan kontrolleres ved observasjon eller eksperiment, slik at det ubetinget er mulig å tenke seg en person enten vet at e;i er sann eller vet at ¬e;i er sann (i=1,...,n) ved et tidspunkt t. Anta tilslutt at λ uttrykker en påstand som ikke i seg selv kan kontrolleres ved observasjon eller eksperiment og at λ impliserer de diverse e;i'ene. Under disse omstendigheter er det naturlig er det naturlig å kalle λ for en *prøvbar hypotese*. La oss bemerke at vi sier akkurat her at en formel α impliserer enn annen formel β hvis og bare hvis α →β er en predikatlogisk sannhet over B (α,β êCFm(B)).

Under disse forutsetningene kan man tenke seg en person som ved et gitt tidspunkt t vet at den prøvbare hypotesen λ er usann. Vedkommende kan ved et tidligere tidspunkt t;1 ha gitt bevis for alle kondisjonalene λ →e;i (i=1,...,n) og derfor vite at disse uttrykker sanne utsagn. Vedkommende kan så ved et senere tidspunkt t;2 ha kontrollert alle utsagnene som uttrykkes av e;1, ... , e;n og funnet at alle disse utsagnene er sanne bortsett fra det som uttrykkes av e;k. Mao. vet vedkommende da ved t;2 at e;k er usann og siden personen også vet at λ → e;k er sann ved t;2[47] og innser at man fra λ → e;k & ¬e;k kan slutte ¬λ, vil han ved t;2 også vite at den prøvbare hypotesen λ er usann.

Det er naturlig på dette punkt å skyte inn noen bemerkninger om det som ofte kalles for *hypotetisk deduktiv metode*. Som navnet antyder består denne metode av hovedsakelig to momenter. Det *første* er at man fremsetter en hypotese (eller en samling av hypoteser som har karakter av en tentativ teorie), altså en gjetning som går utover de data man er i besittelse av og som kan ha en viss relevans for hypotesen. Det *andre moment* er at man fra denne hypotesen (tentative teorien) utleder det som ofte kalles *testimplikasjoner* ved rent logisk-matematisk deduksjon. Disse testimplikasjonene kan være av forskjellig type. For det første kan det dreie seg om setninger som beskriver enkelthendelser i fremtiden (såkalte prediksjoner) som kan kontrolleres direkte ved sanseiaktagelse og observasjon, eventuelt ved hjelp av måleinstrumenter. For det andre kan det dreie seg om setninger som beskriver hendelser som har inntruffet i fortiden (retrodiksjoner). Disse setningene må imidlertid være av en slik art at man kan tenke seg at de *kunne* ha blitt kontrollert ved hjelp av sanseiaktagelse eller observasjon, eventuelt ved hjelp av måleapparater, på det relevante fortidige tidspunkt. En tredje type testimplikasjoner er hva man kan kalle *eksperimentellt prøvbare* setninger. Dette er, grovt formulert, setninger av typen "Hvis A så B", der A er en setning som beskriver en betingelse som en person kan realisere og vite at har blitt realisert ved et gitt tidspunkt, og der B beskriver en hendelse som vil inntreffe etter at A har blitt realisert og der den som realiserer A kan kontrollere hvorvidt B inntreffer eller ikke ved sanseiaktagelse.

Det tredje man gjør om man bruker hypotetisk deduktiv metode er at man kontrollerer de testimplikasjonene man har utledet fra hypotesen (eventuelt den tentative teorien) ved å utføre observasjoner eller eksperimenter. Ved denne kontroll er det kun to muligheter: Enten finner man at alle de testimplikasjonene man har utledet er sanne. I så fall kan man i en viss forstand konkludere med at hypotesen (den tentative teorien) har blitt bekreftet. Men man kan ikke fra dette slutte at hypotesen (den tentative teorien) er sann. Dette vi i så fall være en feilslutning. I dette tilfellet hvor alle de testimplikasjonene man har utledet har vist seg å

47 Vi forutsetter at alt det personen vet ved tidspunktet t;1 også er forhold vedkommende vet ved det senere tidspunktet t;2.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

være sanne er det stort sett ikke annet å gjøre enn å forsøke å finne andre prøvbare setninger som kan utledes fra teorien og kontrollere riktigheten av dem.

Den andre muligheten er at man ved kontroll av testimplikasjonene finner at noen av dem er usanne. Siden disse er logiske koneskvenser av teorien kan man, og må man, slutte at hypotesen (den tentative teorien) som helhet er usann og at minst ett eller flere av de utsagn i teorien som ble brukt ved utledningen av testimplikasjonene er usanne. I dette tilfelle må teorien revideres den reviderte teorien som nå er konsistent med observasjonene testes videre.

En hypotese (tentativ teori) vil være et kontingent utsagn. Det følger derfor at man ikke kan gi noe strengt deduktivt bevis for en teori som fremkastes mer eller mindre forsøksvis. Et bevis må naturlig nok ta sitt utgangspunkt i apriori og nødvendig sanne setninger. Det følger derfor at det av rent logiske grunner er umulig å bevise at en konsistent teori som man kan utlede empirisk kontrollerbare testimplikasjoner fra. En testimplikasjon må nødvendigvis være et kontingent og konsistent utsagn som må være slik at en person ved et gitt tidspunkt kan vite om det er sant eller usant ved sanseiaktagelse. Ved logisk deduksjon i vid forstand kan man derfor bare vise at *hvis en teori er sann så er en viss testimplikasjon sann*, noe som gjøres ved å gi et bevis for denne "Hvis - så -"-setningen. Hvis man nå ved et gitt tidspunkt vet at en testimplikasjon utledet fra en teori er usann vet man selvfølgelig at teorien er usann. Dette er alt hypotetisk deduktiv metode, til tross for sitt litt pompøse navn, yder.

Hva nå om en teori til stadighet blir bekreftet over et langt tidsrom? Kan man da konkludere med at den er sann? Nei. Så lenge man kan utlede nye forutsigelser fra teorien vil den alltid stå i fare for å bli gjendrevet. Det eneste man i noen tilfelle kan konkludere med er at det er *fornuftig å akseptere teorien relativt til all den evidens man så langt har akkumulert* så sant det er umulig å finne en enklere teori som passer like godt med denne evidens. Dette er imidlertid ikke noe man kan finne ut ved hypotetisk deduktiv metode strengt forstått.

§2.2. Elementære setninger om viten

I denne paragrafen og den neste skal vi se på en rekke satser som kan utledes om viten og tro i den kunnskapsteorien (erkjennelsesteorien) som vi definerte helt presist i Del II, §1.5. Vi har allerede i foregående paragraf, §2.1, gitt en rekke eksempler på hva som kan utledes, og kommentert og gitt bevis for de satsene vi har formulert. Vi har også, i den utstrekning det har vært mulig, forsøkt å forklare hvorfor disse satsene er viktige.

Hensikten med denne paragrafen er for det første å gi leseren et enda fyldigere innblikk i hva som kan utledes i den teorien som ble definert i §1.5. For det andre ønsker vi å sammenligne de lover som kan utledes om operatoren Vet_ med de lover som gjelder for nødvendighetsoperatoren Nec i noen av de vanlige systemene for modallogikk.

For eksempel er det følgende et teorem i det modallogiske systemet som går under navnet K:

(1) $\mathrm{Nec}(\alpha) \,\&\, \mathrm{Nec}(\neg(\alpha\&\beta)) \rightarrow \mathrm{Nec}(\neg\beta)$

Men erstatter vi her uttrykket "Nec" med uttrykket "Vet_;(x,t)" får man som resultat:

(2) $\mathrm{Vet_;(x,t)}(\alpha) \,\&\, \mathrm{Vet_;(x,t)}(\neg(\alpha \,\&\beta)) \rightarrow \mathrm{Vet_;(x,t)}(\neg\beta)$

som ikke er gyldig i noen standard begrepsramme B=<D,X,In>. Derimot er den kondisjonalen som har

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(3) Inns_;(x,t)(¬β, α& ¬(α&β))

som antesedent og (2) ovenfor som konsekvent, altså følgende setning:

(4) Inns_;(x,t)(¬β, α& ¬(α&β)) →

Vet_;(x,t)(α) & Vet_;(x,t)(¬(α &β)) → Vet_;(x,t)(¬β)

en sats som man kan vise at er gyldig i enhver utvidet standard begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn.

Vi kan også gi et annet eksempel. I ethvert vanlig normalt modalsystem, for eksempel systemet K, er den følgende formel et teorem:

(5) Nec(Nec(α)) → Nec(Nec(¬¬α))

Men erstatter vi her "Nec" med "Vet_;(x,t)" får vi her den følgende formel:

(6) Vet_;(x.t)(Vet_;(x,t)(α)) → Vet_;(x.t)(Vet_;(x,t)(¬¬α))

Denne ser man ganske lett at man ikke kan vise at er gyldig i noen utvidet standard begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn om man legger til grunn aksiomene i den teorien vi definerte i Del II, §1.5.

Derimot kan man vise at dersom B=<<D,X,In>,ξ> er en standard utvidet begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn som har konjunksjonen av de følgende formler som antesedent og (6) som konsekvent er gyldig i enhver slik begrepsramme om man baserer seg på de grun8nsetningene som inngår i vår teori:

(7) Inns_;(x,t)(Vet_;(x,t)(¬¬α), Inns_;(x,t)(¬¬α,α) & Vet_;(x,t)(α))

(8) Innse_(x,t)(Inns_;(x,t)(¬¬α, α))

Med andre ord, selvom man ikke kan vise at (6) alene er gyldig, kan man vise at kondisjonalen (7) & (8) → (6) er det.

Vi skal formulere og bevise en rekke teoremer av denne typen som har med viten å gjøre i denne paragrafen.

Det tredje vi vil minne om her, før vi går over til de enkelte satsene i dette avsnittet, er at den teorien vi har formulert i de enkelte underparagrafene til §1 og sammenfattet i §1.5 i en viss forstand er meget svak. Det er imidlertid vår overbevisning at dersom man tenker grundig over begrepene tro og viten så er en teori av den art vi har beskrevet det mest realistiske man kan oppnå.

La oss nå vende oss mot den første av de satsene vi vil gi bevis for i denne paragrafen. I denne satsen forutsetter vi at B = <D;X,In> er en begrepsramme, at ξ er en intpretasjonsfunksjon som avbilder CFm(B) en-entydig inn i U;f, mengden av de finstrukturerte utsagn, og at den utvidete begrepsrammen <B,ξ> representerer en delmengde av U;f. Vi forutsetter videre at α;β,γ er formler over B og at x, t, t' er variabeltegn assosiert med B. Dette er forutsetningene i satsen. Konklusjonen i teoremet er at formlene (i) - (xi) er gyldige i B.

I det store og hele tror vi ikke leseren vil ha noen spesielle problemer med å skjønne hva disse formlene sier om man har greid å følge med i de utredningene av våre begreper som vi tidligere har gjort. Vi innskrenker oss bare til å gjengi hva punkt (xi) sier. Man kan si at denne påstanden har to premisser.

Den første premissen er at x ved tidspunktet t husker at han ved et tidligere tidspunkt t' trodde at han så at α var tilfelle. Den andre premissen er at x ved tidspunktet t vet at α ikke er tilfelle og desssuten innser at det fra det α ikke er tilfelle følger at han ikke ved det tidligere tidspunktet t' kunne ha sett at α. Konklusjonen i satsen er at x ved tidspunktet t vet to ting, nemlig (a) at han trodde ved t' at han så at α, og (b) at det ikke var slik ved dette tidligere tidspunkt at han faktisk så at α.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Teorem 2.2.1: Anta B=<D,X,In> er en standard begrepsramme. Anta videre at ξ: CFm(B) -(1-1)→U;f og at <B,ξ> representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagnene. Da har man:

(i) $\models_{;B}$ Tror_;(x,t)(α) & Inns_;(x,t)(¬β,α) → ¬Ser;(x,t)(β)
(ii) $\models_{;B}$ Ser_;(x,t)(α) → ¬ Tror_;(x,t)(¬α)
(ii) $\models_{;B}$ Vet_;(x,t)(α) → ¬ Tror_;(x,t)(¬α)
(iv) $\models_{;B}$ Husk_;(x,t)(α) → ¬ Tror_;(x,t)(¬α)
(v) $\models_{;B}$ Vet_;(x,t)(α) & Inns_;(x,t)(β,α) → ¬ Tror_;(x,t)(¬β)
(vi) $\models_{;B}$ Vet_;(x,t)(α&(β&γ)) ↔ Vet_;(x,t)((α&β)&γ)
(vii) $\models_{;B}$ Ser_;(x,t)(α&(β&γ)) ↔ Ser_;(x,t)((α&β)&γ)
(viii) $\models_{;B}$ Tror_;(x,t)(Ser_;(x,t)(α)) & Inns_;(x,t)(α,Ser_;(x,t)(α)) → Tror_;(x,t)(α)
(ix) $\models_{;B}$ Ser;(x,t)(α) → ¬ Vet_;(x,t)(¬α)
(x) $\models_{;B}$ Ser_;(x,t)(α) & Inns_;(x,t)(¬Vet_;(x,t)(¬α),α) → ¬Tror_;(x,t)(Vet_;(x,t)(¬α))
(xi) $\models_{;B}$ Husk_;(x,t)(Tror_;(x,t')(Ser_;(x,t')(α))) & t' <_ t & Vet_;(x,t)(¬α)& Inns_;(x,t)(¬Ser_;(x,t')(α),¬α) → Vet_;(x,t)(Tror_;(x,t')(Ser_;(x,t')(α))& ¬Ser_;(x,t')(α))

Vi gir nå et bevis for denne satsen:

Bevis: *Ad (i)*: Anta (1) Tror_;(x,t)(α) & Inns_;(x,t)(¬β,α). Fra dette kan man ved hjelp av aksiom A8 slutte (2) Tror;(x,t)(¬β). Anta for reduktio ad absurdum at (3) Ser_;(x,t)(β). Da følger ved hjelp av aksiom E3 og E5 at Tror_;(x,t)(β). Men i lys av aksiom E15f er dette uforenelig med (2). Det følger at (2) er umulig og at vi derfor har ¬Ser_;(x,t)(β). Dette viser at punkt (i) holder.

Ad (ii): Anta (1) Ser_;(x,t)(α). Da følger ved hjelp av E3 og E5 at Tror_;(x,t)(α). Men dette og aksiom E15f impliserer umiddelbart ¬ Tror_;(x,t)(¬α).

Ad (iii): Anta (1)Vet_;(x,t)(α) Fra dette følger umiddelbart ved hjelp av E5 at Tror_;(x,t)(α) som sammen med E15f impliserer det man ønsker, nemlig ¬ Tror_;(x,t)(¬α).

Ad (iv): Anta Husk_;(x,t)(α). Fra dette følger ved hjelp av E4 at Vet_;(x,t)(α). I sin tur impliserer dette ved hjelp av aksiom E5 at Tror_;(x,t)(α). Ved hjelp av E15f kan man så utlede ¬ Tror_;(x,t)(¬α), som er det vi ønsker.

Ad (v): Anta (1) Vet_;(x,t)(α) & Inns_;(x,t)(β,α) . Fra dette og aksiom E7 kan man slutte Vet_;(x,t)(β). Ved hjelp av aksiom E5 følger herav Tror_;(x,t)(β) som i sin tur impliserer ¬ Tror_;(x,t)(¬β) ved hjelp av E15f.

Ad (vi): Man har ved hjelp av E15a:

Vet_;(x,t)(α&(β&γ)) ↔ Vet_;(x,t)(α)&Vet_;(x,t)(β&γ))
↔ Vet_;(x,t)(α)&(Vet_;(x,t)(β) &Vet_;(x,t)(γ))
↔ (Vet_;(x,t)(α)&Vet_;(x,t)(β)) &Vet_;(x,t)(γ)
↔Vet_;(x,t)(α&β) & Vet_;(x,t)(γ)
↔ Vet_;(x,t)((α&β)&γ)

Ad (vii): Beviset er nøyaktig som beviset for (vi) bortsett fra at man benytter E15c istedet for E15a.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Ad (viii): Fra Tror_;(x,t)(Ser_;(x,t)(α)) & Inns_;(x,t)(α,Ser_;(x,t)(α)) følger umiddelbart ved hjelp av aksiom E8 at Tror_;(x,t)(α).

Ad (ix): Siden vi har Ser;(x,t)(α) →α og Vet_;(x,t)(¬α) → ¬α ved hjelp av aksiomene E2 og E3, følger det umiddelbart at Ser;(x,t)(α) → ¬ Vet_;(x,t)(¬α).

Ad (x): Anta (1) Ser_;(x,t)(α) og (2) Inns_;(x,t)(¬Vet_;(x,t)(¬α),α). Fra (1) og aksiom E3 følger Vet_;(x,t)(α) som sammen med (2) og aksiom E7 impliserer Vet_;(x,t)(¬Vet_;(x,t)(¬α). Fra dette kan man så ved hjelp av aksiom E5 slutte: (3) Tror_;(x,t)(¬Vet_;(x,t)(¬α)). Anta for reduktio at (4) Tror_;(x,t)(Vet_;(x,t)(¬α)) Dahar man ved hjelp av aksiom E15f at ¬Tror_;(x,t)(¬Vet_;(x,t)(¬α)). Dette strider mot (3). Vi kan derfor konkludere med at ¬Tror_;(x,t)(Vet_;(x,t)(¬α)).

Ad (xi): Anta (1) Husk_;(x,t)(Tror_;(x,t')(Ser_;(x,t')(α))) & t' <_ t og dessuten at (2) Vet_;(x,t)(¬α). Anta (3) Inns_;(x,t)(¬Ser_;(x,t')(α),¬α). Fra (2) og (3) følger ved hjelp av aksiom E7 at (4) Vet_;(x,t)(¬Ser_;(x,t')(α)). Fra (1) og aksiom E4 kan man slutte Vet_;(x,t)(Tror_;(x,t')(Ser_;(x,t'))). Men fra dette og (4) kan man ved hjelp av aksiom E15a konkludere med at: Vet_;(x,t)(Tror_;(x,t')(Ser_;(x,t')(α))& ¬Ser_;(x,t)(α))

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Vår neste sats formulerer vi kort på følgende vis:

Teorem 2.2.2:

(i) Inns_;(x,t)(β,α) & Ser_;(x,t)(α) → Vet_;(x,t)(β)
(ii) Inns_;(x,t)(β,α) & Ser_;(x,t)(α) → Vet_;(x,t)(Vet_;(x,t)(β)&Ser_;(x,t)(α))
(iii) Vet_;(x,t)(α) → ¬Vet_;(x,t)(¬α)
(iv) ¬(Vet_;(x,t)(α) & Vet_;(x,t)(¬α))
(v) ¬Vet_;(x,t)(α) v ¬Vet_;(x,t)(¬α)

Kommentar: Ved formuleringen av denne sats har vi av bekvemmelighetsgrunner sløyfet forutsetningene som er felles for dette teoremet, det foregående og alle de etterfølgende teoremene, nemlig at vi forutsetter at B=<D,X,In> er en standard begrepsramme, at ξ : CFm(B) - (1-1) → U;f , at <B,ξ> er en utvidet begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagm og at α,β , γ, δ osv. er formler over B og at x, y, z,w, og t, t', t'' etc. er variabeltegn assosiert med B. Dessuten har vi ikke eksplisitt skrevet at at vi påstår under disse forutsetningene at formlene (i) - (v) er gyldige i begrepsrammen B. Hadde satsen vært formulert helt eksplisitt formulert hadde vi naturligvis føyd til den nevnte standard-forutsetningen og skrevet "B ⊨ " foran formlene (i) - (v).

I det følgende må leseren selv, om vedkommende ønsker det, føye til denne forutsetningen og føye til "B ⊨ " foran kondisjonalen som har forutsetningene som antesedent konklusjonen som konsekvent i de teoremene vi nevner. Vi forutsetter altså implisitt i alle de neste teoremene at formlene som nevnes er gyldige i en standard utvidet begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn.

Det bør noteres at beviset for punkt (i) og (ii) i teoremet ovenfor er basert på at skjemaene:

Ser_;(x,t)(α) → Vet_;(x,t)(α)
Ser_;(x,t)(α) → Vet_;(x,t)(Ser_;(x,t)(α)) og
Vet_;(x,t)(α) → Vet_;(x,t)(Vet_;(x,t)(α))

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

er gyldige i enhver standard utvidet begrepsramme B som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Vi bemerker også at punktene (iv) og (v) er lette å utlede fra skjemaet Vet_;(x,t)(α) → α som åpenbart er gyldig.

Bevis: Ad(i): Anta (1) Inns_;(x,t)(β,α) & Ser_;(x,t)(α). Fra den siste konjunkten og aksiomskjemaet Ser_;(x,t)(α) → Vet_;(x,t)(α) følger (2) Vet_;(x,t)(α). Fra dette, den første konjunkten i (1) og "implikasjonsaksiomet for viten", E7, kan man slutte Vet_;(x,t)(β).

Ad (ii): Anta (1) Inns_;(x,t)(β,α) & Ser_;(x,t)(α). Fra den siste konjunkten følger ved hjelp av aksiomskjemaet Ser_;(x,t)(α) → Vet_;(x,t)(Ser_;(x,t)(α)) at (2) Vet_;(x,t)(Ser_;(x,t)(α)). Dessuten følger fra den siste konjunkten i (1) og aksiomskjemaet Ser_;(x,t)(α) → Vet;(x,t)(α) at (3) Vet_;(x,t)(α). Fra dette, første konjunkt i (1) og aksiomet E7 følger (4) Vet_;(x,t)(β). Herav følger ved hjelp av aksiomet Vet_;(x,t)(β) → Vet_;(x,t)(Vet_;(x,t)(β)) at man har (5) Vet_;(x,t)(Vet_;(x,t)(β)) som sammen med (2) og aksiom E15a impliserer det vi ønsker, nemlig: Vet_;(x,t)(Vet_;(x,t)(β)&Ser_;(x,t)(α)). Dette viser at (ii) holder.

Ad (iii): Man har Vet_;(x,t)(α) → α. Videre har man Vet_;(x,t)(¬α) → ¬α. Fra disse to setningene følger: Vet_;(x,t)(α) → ¬Vet;(x,t)(¬α).

Ad (iv): Fra Vet_;(x,t)(α) → ¬Vet;(x,t)(¬α) følger rent setningslogisk ¬(Vet_;(x,t)(α) & Vet_;(x,t)(¬α)). Dette viser at (iv) holder.

Ad (v): Dette er igjen er en rent setningslogisk konsekvens av Vet_;(x,t)(α) → ¬Vet;(x,t)(¬α). Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Punkt (i) og (ii) i det følgende teorem er nærmest en triviell følge av aksiomet E7 samt "konjunksjons-aksiomet" E15a. Det har en viss interesse når man sammenligner den epistemiske logikken vi utvikler her med modallogikk, siden konsekventen i punkt (ii) i teoremet er helt analogt med det grunnleggende modallogiske teorem:

Nec(α) & Nec(α→β). → Nec(β)

Teorem 2.2.3:

(i) Inns_;(x,t)(β, α&(α→β)) →. Vet_;(x,t)(α&(α→β)) → Vet_;(x,t)(β)

(ii) Inns_;(x,t)(β, α&(α→β)) →. Vet_;(x,t)(α)&Vet_;(x,t)(α→β)) → Vet_;(x,t)(β)

Bevis: Ad (i): Anta (1) Inns_;(x,t)(β, α&(α→β)) og (2) Vet_;(x,t)(α&(α→β)) . Da har man umiddelbart ved hjelp av aksiom E7 at Vet_;(x,t)(β). Det er derfor trivielt at (i) holder.

Ad (ii) Anta (1) Inns_;(x,t)(β, α&(α→β)) og (2) Vet_;(x,t)(α)&Vet_;(x,t)(α→β)). Fra (2) følger ved hjelp av aksiom E15a at

(3) Vet_;(x,t)(α&(α→β))

Fra dette, (1) og aksiom E7 følger så Vet_;(x,t)(β). **QED**.

Vårt neste teorem er også en temmelig triviell følge av aksiomet E7 samt "konjunksjons-aksiomet" E15a. Satsen er denne:

Teorem 2.2.4:

Fra

(i) Inns_;(x,t)[Vet_;(x,t)(α)&Vet_;(x,t)(α→β)) → Vet_;(x,t)(β) , Inns_;(x,t)(β, α&(α→β))]

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(ii) Vet_;(x,t)(Inns_;(x,t)(β, α&(α→β)))
kan man slutte:
Vet_;(x,t)(Vet_;(x,t)(α)&Vet_;(x,t)(α→β) → Vet_;(x,t)(β))

Bevis: Konsekventen i denne satsen følger umiddelbart fra den første og andre forutsetningen samt det vi kan kalle aksiom E15a. **QED**.

I motsetning til Teorem 2.2.4 er det følgende teorem av betraktelig større interesse om man er ute etter å sammenligne teoremer om kunnskapsoperatoren Vet_;(x,t) med teoremer om modaloperatoren Nec i vanlig modallogikk. Ser man på konsekventen i teoremet er denne helt analog med det følgende modallogiske teorem:

Nec(Nec(α)) & Nec(Nec(α→β)) → Nec(Nec(α))

Men naturligvis, erstatter man "Nec" med "Vet_;(x,t)" i denne formelen får man bare noe som er gyldig dersom man føyer til de ganske intrikate forutsetningene (i) - (iii).

Teorem 2.2.5:
Fra
(i) Inns_;(x,t)[Vet_;(x,t)(α)&Vet_;(x,t)(α→β)) → Vet_;(x,t)(β) ,
Inns_;(x,t)(β, α&(α→β))]
(ii) Vet_;(x,t)(Inns_;(x,t)(β, α&(α→β)))
(iii) Innse_;(x,t)[Vet_;(x,t)(β), Vet_;(x,t)(α)&Vet_;(x,t)(α→β) → Vet_;(x,t)(β) &
Vet_;(x,t)(α)&Vet_;(x,t)(α→β)]
kan man slutte:
Vet_;(x,t)(Vet_;(x,t)(α))&Vet_;(x,t)(Vet_;(x,t)(α→β)) → Vet_;(x,t)(Vet_;(x,t)(β)))

Bevis: Anta forutsetningene i teoremet holder og anta dessuten at
(1) Vet_;(x,t)(Vet_;(x,t)(α)) og (2) Vet_;(x,t)(Vet_;(x,t)(α→β)) . Fra disse to forhold og aksiom E15a følger:

(3) Vet_;(x,t)(Vet_;(x,t)(α) & Vet_;(x,t)(α→β))

Fra forutsetning (i) og (ii) følger ved hjelp av aksiomet E7:

(4) Vet;(x,t)(Vet_;(x,t)(α)&Vet_;(x,t)(α→β)) → Vet_;(x,t)(β))

Fra dette og (3) følger i sin tur ved hjelp av aksiom E15a:

(5) Vet;(x,t)[(Vet_;(x,t)(α)&Vet_;(x,t)(α→β) → Vet_;(x,t)(β)) &
Vet_;(x,t)(α)&Vet_;(x,t)(α→β)]

Men herav følger ved hjelp av forutsetning (iii) og E7 at
Vet;(x,t)(Vet;(x,t)(β)). Dette viser at påstanden holder. **QED**.

Den neste satsen er også av en viss interesse om man vil sammenligne de lovene man kan utlede i den teorien vi har formulert om operatoren "Vet_;(x,t)" med lovene for nødvendighetsoperatoren Nec i modallogikken. Konklusjonen i det følgende teorem ser man at er helt analog med det følgende modallogiske teorem:

Nec(Nec(α)) & Nec(¬Nec(β)) → Nec(¬Nec(α→β))

Erstatter man her overalt uttrykket "Nec(α)" med uttrykket "Vet_;(x,t)(α)" ser man at man får frem konklusjonen i teoremet nedenfor. Imidlertid er det bare under forutsetningene (i) - (iii) at man kan slutte at dette holder.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Teorem 2.2.6:
Fra
(i) $\text{Inns_}(x,t)[\text{Vet_}(x,t)(\alpha)\&\neg\text{Vet_}(x,t)(\beta)) \rightarrow \neg\text{Vet_}(x,t)(\alpha\rightarrow\beta)\ ,\ \text{Inns_}(x,t)(\beta,\ \alpha\&(\alpha\rightarrow\beta))]$
(ii) $\text{Vet_}(x,t)(\text{Inns_}(x,t)(\beta,\ \alpha\&(\alpha\rightarrow\beta)))$
(iii) $\text{Innse_}(x,t)[\neg\text{Vet_}(x,t)(\alpha\rightarrow\beta),\ \text{Vet_}(x,t)(\alpha)\&\neg\text{Vet_}(x,t)(\beta) \rightarrow \neg\text{Vet_}(x,t)(\alpha\rightarrow\beta)\ \&\text{Vet_}(x,t)(\alpha)\&\neg\text{Vet_}(x,t)(\beta)]$
kan man slutte:
$\text{Vet_}(x,t)(\text{Vet_}(x,t)(\alpha))\&\text{Vet_}(x,t)(\neg\text{Vet_}(x,t)(\beta)) \rightarrow \text{Vet_}(x,t)(\neg\text{Vet_}(x,t)(\alpha\rightarrow\beta)))$

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder. Vi skal vise at konsekventen holder. Anta derfor (1) $\text{Vet_}(x,t)(\text{Vet_}(x,t)(\alpha))$ og (2) $\text{Vet_}(x,t)(\neg\text{Vet_}(x,t)(\beta))$. Fra disse to forhold og konjunksjonsaksiomet for Vet_ følger:
(3) $\text{Vet_}(x,t)(\text{Vet_}(x,t)(\alpha)\ \&\ \neg\text{Vet_}(x,t)(\beta))$
Fra forutsetning (i) og (ii) følger ved hjelp av aksiomet E7:
(4) $\text{Vet};(x,t)(\text{Vet_}(x,t)(\alpha)\&\neg\text{Vet_}(x,t)(\beta) \rightarrow \neg\text{Vet_}(x,t)(\alpha\rightarrow\beta)\ )$
Fra dette og (3) følger i sin tur ved hjelp av aksiom E15a:
(5) $\text{Vet};(x,t)[(\text{Vet_}(x,t)(\alpha)\&\neg\text{Vet_}(x,t)(\beta) \rightarrow \neg\text{Vet_}(x,t)(\alpha\rightarrow\beta))\ \&\ \text{Vet_}(x,t)(\alpha)\&\neg\text{Vet_}(x,t)(\beta)]$
Men herav følger ved hjelp av forutsetning (iii) og aksiom E7 at
$\text{Vet};(x,t)(\neg\text{Vet};(x,t)(\alpha\rightarrow\beta))$. Dette viser at påstanden holder. **QED**.

Det er et meget elementært teorem i modallogikken at Nec(α) impliserer Nec(αvβ), med andre ord at $\text{Nec}(\alpha) \rightarrow \text{Nec}(\alpha\text{v}\beta)$ er et teorem i alle vanlige modallogikker. Setter man her inn uttrykket "Vet_;(x,t)" for alle forekomster av "Nec" får man konsekventen i den følgende sats. Denne alene kan ikke utledes i den teori som har blitt formulert her. Det er nødvendig å føye til de forutsetningene som er nevnt i satsen.

Teorem 2.2.7:
Fra
(i) $\text{Innse_}(x,t)[\alpha\rightarrow(\alpha\text{v}\beta)]$
(ii) $\text{Inns_}(x,t)(\alpha\text{v}\beta,\ \alpha\ \&(\alpha\rightarrow(\alpha\text{v}\beta)))$
kan man slutte:
$\text{Vet_}(x,t)(\alpha) \rightarrow \text{Vet_}(x,t)(\alpha\text{v}\beta)$

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder og anta (1) $\text{Vet_}(x,t)(\alpha)$. Fra den første forutsetningen følger ved hjelp av aksiomet $\text{Innse_}(x,t)(\alpha) \rightarrow \text{Vet_}(x,t)(\alpha)$ at
(2) $\text{Vet_}(x,t)(\alpha\rightarrow(\alpha\text{v}\beta))$. Men fra dette, (1) og forutsetning (ii) samt aksiomet E7 følger umiddelbart $\text{Vet_}(x,t)(\alpha\text{v}\beta)$. **QED**.

Man kan notere i forbindelse med teoremet ovenfor at man får et lignende teorem om man ersatter forutsetningene (i) og (ii) med $\text{Inns;_}(x,t)(\alpha\text{v}\beta,\ \alpha)$. Men dette teoremet er ikke ekvivalent med Teorem 2.2.7.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Det følgende teorem viser at vi ikke bare kan vise Vet_;(x,t)(α) → Vet_;(x,t)(αvβ) under visse forutsetninger, men at vi også kan utlede:

Vet_;(x,t)(Vet_;(x,t)(α)) → Vet_;(x,t)(Vet_;(x,t)(αvβ))

om man utvider forutsetningene i Teorem 2.2.7 med ytterligere en premiss.

Teorem 2.2.8:
Fra
(i) Innse_;(x,t)(α→(αvβ))
(ii) Inns_;(x,t)(αvβ, α &(α→(αvβ)))
(iii) Inns_;(x,t)(Vet_;(x,t)(αvβ), Innse_;(x,t)(α→(αvβ)) &
Inns_;(x,t)(αvβ, α &(α→(αvβ))) & Vet_;(x,t)(α))
kan man slutte:
Vet_;(x,t)(Vet_;(x,t)(α)) → Vet_;(x,t)(Vet_;(x,t)(αvβ))

Forutsetningene i teoremene vi har kommentert ovenfor er naturligvis temmelig sterke. Det virker imidlertid ikke fullstendig urealistisk å tro at en person x ved et gitt tidspunkt t kan oppfylle kravene (i) - (iii) ovenfor.

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder og anta at (1) Vet_;(x,t)(Vet_;(x,t)(α)). Fra forutsetning (i) og aksiomskjemaet Innse_;(x,t)(α) → Vet_;(x,t)(Innse_;(x,t)(α)) kan man slutte:

(2) Vet_;(x,t)(Innse_;(x,t)(α →(αvβ)))

Likeledes kan fra forutsetning (ii) og aksiomskjemaet

Inns_;(x,t)(β,α) → Vet_;(x,t)(Inns_;(x,t)(β,α))

slutte at (3) Vet_;(x,t)(Inns_;(x,t)(αvβ, α &(α→(αvβ))))

Fra (1), (2) og (3) samt aksiom E15a følger:

(4) Vet_;(x,t)(Innse_;(x,t)(α →(αvβ)) &
Inns_;(x,t)(αvβ, α &(α→(αvβ))) &Vet_;(x,t)(α))

Fra (4) og forutsetning (iii) følger så det vi ønsker ved hjelp av aksiom E15a, nemlig: Vet_;(x,t)(Vet_;(x,t)(αvβ)). **QED**.

Følgende formler er alle teoremer i hva man ofte kaller normale modallogiske systemer:

(1) Nec(α↔β) →. Nec(α) ↔ Nec(β)
(2) Nec(α↔β) →. Nec(α&γ) ↔ Nec(β&γ)
(3) Nec(α→β) & Nec(β → γ) ↔ Nec(α→γ)

Erstatter man i (1) - (3) alle forekomster av uttrykket "Nec" med uttrykket "Vet_;(x,t)" får vi selvfølgelig tre nye formler:

(4) Vet_;(x,t)(α↔β) →. Vet_;(x,t)(α) ↔ Vet_;(x,t)(β)
(5) Vet_;(x,t)(α↔β) →. Vet_;(x,t)(α&γ) ↔ Vet_;(x,t)(β&γ)
(6) Vet_;(x,t)(α→β) & Vet_;(x,t)(β → γ) ↔ Vet_;(x,t)(α→γ)

som er konklusjonene i henholdsvis Teorem 2.2.9, Teorem 2.2.10 og Teorem 2.2.11 nedenfor. Naturligvis er ikke (4), (5) og (6) gyldige i noen standard utvidet begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn, men betegner vi forutsetningene i Teorem 2.2.9, Teorem 2.2.10 og Teorem 2.2.11 med henholdsvis δ;1, δ;2 og δ;3 har vi at formlene δ;1 → (4), δ;2 → (5) og δ;3 → (6) alle er gyldige i enhver standard utvidet

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Bevisene for Teorem 2.2.9 - Teorem 2.2.11 viser at dette er tilfelle.

Teorem 2.2.9

Fra

(i) Inns_;(x,t)(β, α&(α→β))

(ii) Inns_;(x,t)(α, β&(β→α))

(iii) Inns_;(x,t)((α→β)&(β→α), α↔β)

kan man slutte:

Vet_;(x,t)(α↔β) → (Vet_;(x,t)(α) ↔ Vet_;(x,t)(β))

Bevis: Anta forutsetningene holder og anta at (1) Vet_;(x,t)(α↔β). Det er nødvendig å vise: (2) Vet_;(x,t)(α) ↔ Vet_;(x,t)(β). (i) Vi viser kondisjonalen mot høyre i (2). Anta derfor (3) Vet_;(x,t)(α). Fra (1) og forutsetning (iii) følger ved hjelp av aksiomet E7 at (4) Vet_;(x,t)(α→β & β→α). Fra dette følger ved hjelp av aksiomet E15a at Vet_;(x,t)(α→β). Fra dette, (3) og aksiomet E15a man slutte: (5) Vet_;(x,t)(α&(α→β)) som sammen med forutsetning (i) og E7 impliserer Vet_;(x,t)(β). (ii) Det er også nødvendig å vise kondisjonalen mot venstre i (2). Anta derfor (6) Vet_;(x,t)(β). Fra (1) og forutsetning (iii) følger ved hjelp av aksiomet E7 at (6) Vet_;(x,t)(α→β & β→α). Fra dette følger ved hjelp av aksiomet E15a at Vet_;(x,t)(β→α). Fra dette, (6) og aksiomet E15a kan man slutte: (7) Vet_;(x,t)(β&(β→α)) som sammen med forutsetning (ii) og implikasjonsaksiomet for viten impliserer Vet_;(x,t)(α). Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Teorem 2.2.10

Fra

(i) Inns_;(x,t)(β&γ, (α&γ)&(α→β))

(ii) Inns_;(x,t)(α&γ), (β&γ)&(β→α))

(iii) Inns_;(x,t)((α→β)&(β→α), α↔β)

kan man slutte:

Vet_;(x,t)(α↔β) → Vet_;(x,t)(α&γ) ↔ Vet_;(x,t)(β&γ)

Bevis: Anta forutsetningene holder og anta at (1) Vet_;(x,t)(α↔β). Det er nødvendig å vise: (2) Vet_;(x,t)(α&γ) ↔ Vet_;(x,t)(β&γ). (i) Vi viser kondisjonalen mot høyre i (2). Anta derfor (3) Vet_;(x,t)(α&γ). Fra (1) og forutsetning (iii) følger ved hjelp av implikasjonsaksiomet for viten at (4) Vet_;(x,t)(α→β & β→α). Fra dette følger ved hjelp av aksiomet E15a at Vet_;(x,t)(α→β). Fra dette, (3) og aksiomet E15a kan man slutte: (5) Vet_;(x,t)((α&γ)&(α→β)) som sammen med forutsetning (ii) og implikasjonsaksiomet for viten impliserer Vet_;(x,t)(β&γ).

(ii) Det er også nødvendig å vise kondisjonalen mot venstre i (2).
Anta derfor (6) Vet_;(x,t)(β&γ). Fra (1) og forutsetning (iii) følger ved hjelp av implikasjonsaksiomet for viten at (6) Vet_;(x,t)(α→β & β→α). Fra dette følger ved hjelp av aksiomet E15a at Vet_;(x,t)(β→α). Fra dette, (6) og aksiomet E15a kan man slutte: (7) Vet_;(x,t)((β&γ)&(β→α)) som sammen med forutsetning (ii) og implikasjonsaksiomet for viten impliserer Vet_;(x,t)(α&γ). Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Teorem 2.2.11:
Fra
Inns_;(x,t)(α→γ), (α→β)&(β→γ)
kan man slutte
Vet_;(x,t)(α→β) & Vet_;(x,t)(β→γ) → Vet_;(x,t)(α→γ)

Bevis: Anta (i) holder og anta (2) Vet_;(x,t)(α→β) & Vet_;(x,t)(β→γ). Fra dette kan man ved hjelp av aksiomet E15a slutte at Vet_;(x,t)(α→β) &(β→γ)). Dette sammen med forutsetning (i) og implikasjonsaksiomet for viten impliserer: Vet_;(x,t)(α→γ). **QED**.

På samme måte som man i modallogikken kan innføre en dual operator Pos til nødvendighetsoperatoren Nec og definere Pos(α) ved Pos(α) = ¬Nec(¬α), kan man i vår teori en tilsvarende operator CVet_;(x,t)(α) som kan oppfattes som dual i forhold til Vet_;(x,t)(α). Denne kan man definere slik:

Definisjon 2.2.1: CVet_;(x,t)(α) ↔ ¬Vet_;(x,t)(¬α)

Uttrykket "CVet_;(x,t)(α)" leses "det at α er tilfelle er logisk sett forenelig med alt det x vet ved tidspunktet t". Operatoren "CVet_" er analog med mulighetsoperatoren i de vanlige modallogiske systemene.

Vi skal vise noen teoremer som involverer denne operatoren.

Det første teoremet er det følgende som sier at dersom x ved tidspunktet t vet at α og det at β er kompatibelt med alt det x vet ved tidspunktet t, så er også konjunksjonen α&β forenelig med alt det x vet ved tidspunktet t. Imidlertid er ikke denne setningen isolert sett gyldig i noen standard utvidet begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Vi må også legge til de to forutsetningene som er nevnt.

Teorem 2.2.12:
Fra
(i) Inns_;(x,t)(¬β, α&(α→¬β))
(ii) Inns_;(x,t)(α→¬β, ¬(α&β))
kan man slutte:
Vet_;(x,t)(α) & CVet_;(x,t)(β) → CVet_;(x,t)(α&β)

Bevis: Det vil være tilstrekkelig å vise:
(1) Vet_;(x,t)(α) & Vet_;(x,t)(¬(α&β)) → Vet_;(x,t)(¬β)
siden konsekventen i satsen følger nesten umiddelbart fra (1) og definisjonen av CVet_.
La oss derfor bevise (1). Anta (2) Vet_;(x,t)(α) & Vet_;(x,t)(¬(α&β)). Fra den andre konjunkten her og forutsetning (ii) følger ved hjelp av aksiomet E7 at
(3) Vet_;(x,t)(α→¬β). Fra dette og den første konjunkten i (2) følger så
(4) Vet_;(x,t)(α& (α→¬β)). Men fra dette, forutsetning (i) og aksiomet E7 følger Vet_;(x,t)(¬β). Dette viser at (1) holder. **QED**.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Ovenfor ble CVet_;(x,t)(α) definert ved hjelp av Vet_;(x,t)(α). Det følgende teorem viser at vi i en viss forstand kunne ha definert Vet_;(x,t) ved hjelp av CVet_;(x,t), men selvfølgelig gjelder ikke dette uten at man forutsetter to ting nemlig: Inns_;(x,t)(¬¬α,α) og Inns_;(x,t)(α, ¬¬α). Teoremet er dette:

Teorem 2.2.13
Fra
(i) Inns_;(x,t)(¬¬α, α)
(ii) Inns_;(x,t)(α, ¬¬α)
kan man slutte:
Vet_;(x,t)(α) ↔ ¬CVet_;(x,t)(¬α)

Bevis: Det vil være tilstrekkelig å bevise (1) Vet_;(x,t)(α) → Vet;(x,t)(¬¬α) og (2) Vet_;(x,t)(¬¬α) → Vet_;(x,t)(α) siden konsekventen i satsen følger umiddelbart fra disse to påstandene ved hjelp av definisjonen av CVet_ og ren setningslogikk. La oss først vise (1): Anta Vet_;(x,t)(α). Fra dette og forutsetning (i) følger ved hjelp av aksiomet E7 at Vet_;(x,t)(¬¬α). Dette viser at (1) holder. Når det gjelder (2) bevises dette på nøyaktig samme måte, bortsett fra at man nå benytter seg av forutsetning (ii). **QED**.

Det er logisk nødvendig at dersom x ved tidspunktet t vet at α er tilfelle så er det slik at α faktisk er tilfelle. Tilsvarende kan man uten forbehold utlede at dersom α er tillfelle så er α forenelig med alt det x vet ved tidspunktet t. Med andre ord har vi:

Teorem 2.2.14
α → CVet_;(x,t)(α)

Bevis: Fra aksiomskjemaet Vet_;(x,t)(α)→ α følger umiddelbart Vet_;(x,t)(¬α) → ¬α. Fra dette har man ved hjelp av ren setningslogikk: α → ¬Vet_;(x,t)(¬α). Fra dette og definisjonen av CVet_ har man så α → CVet_;(x,t)(α). **QED**.

Vårt neste teorem er en slags epistemisk variant til skjemaet Nec(Nec(α)) ↔ ¬Pos(Pos(¬α)) som er et teorem i vanlig modallogikk. Vi viser altså at under visse ganske kompliserte forutsetninger holder:
Vet_;(x,t)(Vet_;(x,t)(α)) ↔ ¬CVet_;(x,t)(CVet_;(x,t)(¬α))
Teoremet er dette:

Teorem 2.2.15
Fra
(i) Inns_;(x,t)(¬¬α,α)
(ii) Inns_;(x,t)(¬¬Vet_;(x,t)(¬¬α), Inns_;(x,t)(¬¬α,α) & Vet_;(x,t)(α))
(iii) Inns_;(x,t)(α,¬¬α)
(iv) Inns_;(x,t)(Vet_;(x,t)(α), Inns_;(x,t)(α,¬¬α) & ¬¬Vet_;(x,t)(¬¬α))
kan man slutte:
Vet_;(x,t)(Vet_;(x,t)(α)) ↔ ¬CVet_;(x,t)(CVet_;(x,t)(¬α))

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Bevis: Det vil være tilstrekkelig å bevise følgende to påstander gitt at forutsetningene i satsen holder:

(1) $Vet_;(x,t)(Vet_;(x,t)(\alpha)) \rightarrow Vet_;(x,t)(\neg\neg Vet_;(x,t)(\neg\neg\alpha))$

(2) $Vet_;(x,t)(\neg\neg Vet_;(x,t)(\neg\neg\alpha)) \rightarrow Vet_;(x,t)(Vet_;(x,t)(\alpha))$

Man ser lett at konsekventen i satsen følger fra (1) og (2) ved hjelp av ren setningslogikk og definisjonen av CVet_ .

Vi viser først at (1) holder. Anta derfor (3) $Vet_;(x,t)(Vet_;(x,t)(\alpha))$. Fra forutsetning (i) og aksiomskjemaet $Inns_;(x,t)(\alpha,\beta) \rightarrow Vet_;(x,t)(Inns_;(x,t)(\alpha,\beta))$ følger

(4) $Vet_;(x,t)(Inns_;(x,t)(\neg\neg\alpha,\alpha))$. Fra (3) og (4) kan man ved hjelp av aksiomet E15a slutte at

(5) $Vet_;(x,t)(Inns_;(x,t)(\neg\neg\alpha,\alpha) \& Vet_;(x,t)(\alpha))$. Men fra dette, forutsetning (ii) og aksiomet E7 slutte at $Vet_;(x,t)(\neg\neg Vet_;(x,t)(\neg\neg\alpha))$. Dette viser at (1) holder.

Vi viser så at (2) holder. Anta derfor (6) $Vet_;(x,t)(\neg\neg Vet_;(x,t)(\neg\neg\alpha))$ Fra forutsetning (i) og aksiomskjemaet $Inns_;(x,t)(\alpha,\beta) \rightarrow Vet_;(x,t)(Inns_;(x,t)(\alpha,\beta))$ følger (7) $Vet_;(x,t)(Inns_;(x,t)(\alpha,\neg\neg\alpha))$. Fra (6) og (7) kan man ved hjelp av aksiomet E15a slutte at (8) $Vet_;(x,t)(Inns_;(x,t)(\neg\neg\alpha,\alpha) \& \neg\neg Vet_;(x,t)(\neg\neg\alpha))$ Men fra dette, forutsetning (iv) og aksiomet E7 slutte at $Vet_;(x,t)(Vet_;(x,t)(\alpha))$. Dette viser at (2) holder. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Vårt siste teorem viser, under viss forutsetninger, at operasjonen $CVet_;(x,t)$ distribuerer over disjunksjon på samme måte som operatoren Pos, og på en analog måte $Vet_;(x,t)$ distribuerer over konjunksjon:

Teorem 2.2.16:

Fra

(i) $Inns_;(x,t)(\neg\alpha ,\neg(\alpha v\beta))$

(ii) $Inns_;(x,t)(\neg\beta , \neg(\alpha v\beta))$

(iii) $Inns_;(x,t)(\neg(\alpha v\beta), \neg\alpha\&\neg\beta)$

kan man slutte:

$CVet_;(x,t)(\alpha v\beta) \leftrightarrow CVet_;(x,t)(\alpha) \text{ v } CVet_;(x,t)(\beta)$

Bevis: Konsekventen i satsen er i lys av definisjonen av CVet_ ekvivalent med

$\neg Vet_;(x,t)(\neg(\alpha v\beta)) \leftrightarrow \neg Vet_;(x,t)(\neg\alpha) \text{ v } \neg Vet_;(x,t)(\neg\beta)$

Dette er i sin tur setningslogisk ekvivalent med:

$Vet_;(x,t)(\neg(\alpha v\beta)) \leftrightarrow \neg(\neg Vet_;(x,t)(\neg\alpha) \text{ v } \neg Vet_;(x,t)(\neg\beta))$

og derfor ekvivalent med:

(1) $Vet_;(x,t)(\neg(\alpha v\beta)) \leftrightarrow Vet_;(x,t)(\neg\alpha) \& Vet_;(x,t)(\neg\beta)$

Det vil derfor være tilstrekkelig å vise at (1) holder under de forutsetninger som er nevnt i satsen. La oss først vise kondisjonalen mot høyre i (1). Anta $Vet_;(x,t)(\neg(\alpha v\beta))$. Fra dette, forutsetning (i) og (ii) samt aksiomet E7 følger umiddelbart

$Vet_;(x,t)(\neg\alpha) \& Vet_;(x,t)(\neg\beta)$. Vi viser så kondisjonalen mot venstre i (1). Anta

(2) $Vet_;(x,t)(\neg\alpha) \& Vet_;(x,t)(\neg\beta)$. Fra dette og aksiomet E15a følger:

(3) $Vet_;(x,t)(\neg\alpha \&\neg\beta)$. Fra dette, forutsetning (iii) og aksiomet E7 kan man så slutte at $Vet_;(x,t)(\neg(\alpha v\beta))$. Dette viser at (1) holder og gir oss dermed et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Teoremene som vi har gjennomgått ovenfor, ikke bare i denne paragrafen, men også i §2.1, skulle gi leseren et tydeligere og mer utførlig bilde av hva som kan utledes om viten i den teorien vi har formulert og sammenfattet i Del II, §1, §1.1 - §1.5. Det har vært dette som har vært vårt primære mål.

Ser man på de teoremene vi har utledet ovenfor virker imidlertid den følgende påstand, som her bare fremsettes som en ren gjetning, ikke uten enhver plausibilitet:

Anta α er et teorem i det modallogiske systemet T for setningslogikk. (Se f.eks. Hughes & Cresswell for en opplysende fremstilling av dette systemet.) Anta B= <B',ξ> er en utvidet standard begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. La α være resultatet av å erstatte alle forekomster av "Nec" i α med "Vet_;(x,t)" og alle forekomster av "Pos" i α med "CVet_;(x,t)". Da finnes det en endelig mengde med formler γ;1, ... ,γ;n over B, der γ;i (i=1, ... ,n) enten er en formel av typen Innse_;(x,t)(δ) for en eller annen formel δ, eller er en formel av typen Inns_;(x,t)(φ:1, φ;2) for visse formler φ;1, φ;2, slik at γ;1 & ,..... , γ;n → α* er gyldig i den utvidete begrepsrammen B.*

Det må innrømmes at denne påstanden på det nuværende tidspunkt bare er å anse som en ren og skjær gjetning, som det, såsant den er riktig, kunne vært interessant å sett et detaljert bevis for. Like interessant kunne det ha vært å se et bevis for at den er uriktig, om den faktisk er det. Vi lar spørsmålet være åpent.

§2.3 Noen teoremer om tro.

I det følgende skal vi bevise en rekke setninger om tro. Satsene er analoge med dem vi i den foregående paragrafen har bevist i forbindelse med viten. På samme måte som tidligere unnlater vi å ta med standardforutsetningen som vi nevnte i forrige paragraf, nemlig at B = <D;X,In> er en begrepsramme, at ξ er en intpretasjonsfunksjon som avbilder CFm(B) en-entydig inn i U;f, mengden av de finstrukturerte utsagn, og at den utvidete begrepsrammen <B,ξ> representerer en delmengde av U;f. Vi forutsetter videre at α;β,γ er formler over B og at x, t, t' er variabeltegn assosiert med B. Denne froutsetningen må skytes foran alle påstandene i de følgende teoremer. Det er naturlig å sammenligne konstruksjonen "Vet_;(x,t)(α)" med konstruksjonen "Nec(α)" i et vanlig system for alethisk modallogikk, f.eks. systemet T. I det følgende skal vi sammenligne de lovene som gjelder for "Tror_;(x,t)(α)" med de lovene som gjelder i et vanlig svakt system for deontisk logikk, f.eks. K. I det store og hele er lovene for "Tror_;(x,t)(α)" av samme type som for "Vet_;(x,t)(α)" bortsett fra at "Tror;(x,t)(a) → α" ikke gjelder.

Det følgende teorem er helt analogt med Teorem 2.2.3. Punkt (i) og (ii) i det følgende teorem er nærmest en triviell følge av aksiomet E8 samt "konjunksjons-aksiomet" E15b. Det har en viss interesse når man sammenligner den doxastiske logikken vi utvikler her med modallogikk, siden konsekventen i punkt (ii) i teoremet er helt analogt med det følgende grunnleggende teorem i det modallogiske K:

Nec(α) & Nec(α→β). → Nec(β)

Teorem 2.3.1:

(i) Inns_;(x,t)(β, α&(α→β)) →. Tror_;(x,t)(α&(α→β)) → Tror_;(x,t)(β)

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(ii) $\text{Inns_};(x,t)(\beta, \alpha\&(\alpha\rightarrow\beta)) \rightarrow .$
$\text{Tror_};(x,t)(\alpha)\&\text{Tror_};(x,t)(\alpha\rightarrow\beta)) \rightarrow \text{Tror_};(x,t)(\beta)$

Bevis: Ad (i): Anta (1) $\text{Inns_};(x,t)(\beta, \alpha\&(\alpha\rightarrow\beta))$ og (2) $\text{Tror_};(x,t)(\alpha\&(\alpha\rightarrow\beta))$. Da har man umiddelbart ved hjelp av aksiom E8 at $\text{Tror_};(x,t)(\beta)$. Det er derfor trivielt at (i) holder.

Ad (ii) Anta (1) $\text{Inns_};(x,t)(\beta, \alpha\&(\alpha\rightarrow\beta))$ og (2) $\text{Tror_};(x,t)(\alpha)\&\text{Tror_};(x,t)(\alpha\rightarrow\beta))$. Fra (2) følger ved aksiom E15b at

(3) $\text{Tror_};(x,t)(\alpha\&(\alpha\rightarrow\beta))$

Fra dette, (1) og E8 følger så $\text{Tror_};(x,t)(\beta)$. **QED**.

Vårt neste teorem, som er helt analogt med Teorem 2.2.4 er også en temmelig triviell følge av aksiomet E8 samt "konjunksjons-aksiomet" E15b. Satsen er denne:

Teorem 2.3.2:
Fra
(i) $\text{Inns_};(x,t)[\text{Tror_};(x,t)(\alpha)\&\text{Tror_};(x,t)(\alpha\rightarrow\beta)) \rightarrow \text{Tror_};(x,t)(\beta)$, $\text{Inns_};(x,t)(\beta, \alpha\&(\alpha\rightarrow\beta))]$
(ii) $\text{Tror_};(x,t)(\text{Inns_};(x,t)(\beta, \alpha\&(\alpha\rightarrow\beta)))$
kan man slutte:
$\text{Tror_};(x,t)(\text{Tror_};(x,t)(\alpha)\&\text{Tror_};(x,t)(\alpha\rightarrow\beta) \rightarrow \text{Tror_};(x,t)(\beta))$

Bevis: Konsekventen i denne satsen følger umiddelbart fra den første og andre forutsetningen samt aksiom E8. **QED**.

I motsetning til Teorem 2.3.2 er det følgende teorem av betraktelig større interesse om man er ute etter å sammenligne teoremer om trosoperatoren $\text{Tror_};(x,t)$ med teoremer om modaloperatoren Nec i vanlig deontisk logikk. Ser man på konsekventen i teoremet er denne helt analog med det følgende teorem som lar seg utlede i systemet K:

$\text{Nec}(\text{Nec}(\alpha)) \,\&\, \text{Nec}(\text{Nec}(\alpha\rightarrow\beta)) \rightarrow \text{Nec}(\text{Nec}(\alpha))$

Men naturligvis, erstatter man "Nec" med "$\text{Tror_};(x,t)$" i denne formelen får man bare noe som er gyldig dersom man føyer til de ganske intrikate forutsetningene (i) - (iii).

Teorem 2.3.3:
Fra
(i) $\text{Inns_};(x,t)[\text{Tror_};(x,t)(\alpha)\&\text{Tror_};(x,t)(\alpha\rightarrow\beta)) \rightarrow \text{Tror_};(x,t)(\beta)$, $\text{Inns_};(x,t)(\beta, \alpha\&(\alpha\rightarrow\beta))]$
(ii) $\text{Tror_};(x,t)(\text{Inns_};(x,t)(\beta, \alpha\&(\alpha\rightarrow\beta)))$
(iii) $\text{Inns_};(x,t)[\text{Tror_};(x,t)(\beta), \text{Tror_};(x,t)(\alpha)\&\text{Tror_};(x,t)(\alpha\rightarrow\beta) \rightarrow \text{Tror_};(x,t)(\beta)\ \&$ $\text{Tror_};(x,t)(\alpha)\&\text{Tror_};(x,t)(\alpha\rightarrow\beta)]$
kan man slutte:
$\text{Tror_};(x,t)(\text{Tror_};(x,t)(\alpha))\&\text{Tror_};(x,t)(\text{Tror_};(x,t)(\alpha\rightarrow\beta)) \rightarrow$ $\text{Tror_};(x,t)(\text{Tror_};(x,t)(\beta)))$

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder. Vi skal vise at konsekventen holder. Anta derfor (1) $\text{Tror_};(x,t)(\text{Tror_};(x,t)(\alpha))$ og (2) $\text{Tror_};(x,t)(\text{Tror_};(x,t)(\alpha\rightarrow\beta))$. Fra disse to forhold og aksiom E15b følger:

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(3) Tror_;(x,t)(Tror_;(x,t)(α) & Tror_;(x,t)(α→β))

Fra forutsetning (i) og (ii) følger ved hjelp av E8:

(4) Tror;(x,t)(Tror_;(x,t)(α)&Tror_;(x,t)(α→β)) → Tror_;(x,t)(β))

Fra dette og (3) følger i sin tur ved hjelp av aksiom E15b:

(5) Tror;(x,t)[(Tror_;(x,t)(α)&Tror_;(x,t)(α→β) → Tror_;(x,t)(β)) &
Tror_;(x,t)(α)&Tror_;(x,t)(α→β)]

Men herav følger ved hjelp av forutsetning (iii) og aksiom E8 at
Tror;(x,t)(Tror;(x,t)(β)). Dette viser at påstanden holder. **QED**.

Den neste satsen, som er analog med Teorem 2.2.6, er også av en viss interesse om man vil sammenligne de lovene man kan utlede i den teorien vi har formulert om operatoren "Tro_;(x,t)" med lovene for nødvendighetsoperatoren Nec i modallogikken K. Konklusjonen i det følgende teorem ser man at er helt analog med det følgende modallogiske teorem:

Nec(Nec(α)) & Nec(¬Nec(β)) → Nec(¬Nec(α→β))

Erstatter man her overalt uttrykket "Nec(α)" med uttrykket "Tror_;(x,t)(α)" ser man at man får frem konklusjonen i teoremet nedenfor. Imidlertid er det bare under forutsetningene (i) - (iii) at man kan slutte at dette holder.

Teorem 2.3.4

Fra

(i) Inns_;(x,t)[Tror_;(x,t)(α)&¬Tror_;(x,t)(β)) → ¬Tror_;(x,t)(α→β) ,
Inns_;(x,t)(β, α&(α→β))]

(ii) Tror_;(x,t)(Inns_;(x,t)(β, α&(α→β)))

(iii) Innse_;(x,t)[¬Tror_;(x,t)(α→β),
Tror_;(x,t)(α)&¬Tror_;(x,t)(β) → ¬Tror_;(x,t)(α→β)
&Tror_;(x,t)(α)&¬Tror_;(x,t)(β)]

kan man slutte:

Tror_;(x,t)(Tror_;(x,t)(α))&Tror_;(x,t)(¬Tror_;(x,t)(β)) →
Tror_;(x,t)(¬Tror_;(x,t)(α→β)))

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder. Vi skal vise at konsekventen holder. Anta derfor (1) Tror_;(x,t)(Tror_;(x,t)(α)) og (2) Tror_;(x,t)(¬Tror_;(x,t)(β)) . Fra disse to forhold og aksiom E15b følger:

(3) Tror_;(x,t)(Tror_;(x,t)(α) & ¬Tror_;(x,t)(β))

Fra forutsetning (i) og (ii) følger ved hjelp av E8:

(4) Tror;(x,t)(Tror_;(x,t)(α)&¬Tror_;(x,t)(β) → ¬Tror_;(x,t)(α→β))

Fra dette og (3) følger i sin tur ved hjelp av aksiom E15b:

(5) Tror;(x,t)[(Tror_;(x,t)(α)&¬Tror_;(x,t)(β) → ¬Tror_;(x,t)(α→β)) &
Tror_;(x,t)(α)&¬Tror_;(x,t)(β)]

Men herav følger ved hjelp av forutsetning (iii) og aksiom E8 at
Tror;(x,t)(¬Tror;(x,t)(α→β)). Dette viser at påstanden holder. **QED**.

Det er et meget elementært teorem i modallogikken K at Nec(α) impliserer Nec(αvβ), og derfor at Nec(α) → Nec(αvβ) er et teorem i alle vanlige modallogikker. Setter man her inn uttrykket "Tror_;(x,t)" for alle forekomster av "Nec" får man konsekventen i den følgende sats. Denne alene kan ikke utledes i den teori som har blitt formulert her. Det er nødvendig å

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

føye til de forutsetningene som er nevnt i satsen. Satsen er forøvrig helt analog med Teorem 2.2.7.

Teorem 2.3.5:
Fra
(i) Innse_;(x,t)[α→(αvβ)]
(ii) Inns_;(x,t)(αvβ, α &(α→(αvβ)))
kan man slutte:
Tror_;(x,t)(α) → Tror_;(x,t)(αvβ)

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder, og anta (1) Tror_;(x,t)(α). Fra den første forutsetningen følger ved hjelp av aksiomet Innse_(x,t)(α) → Vet_;(x,t)(α) at (2) Vet_;(x,t)(α→(αvβ)). Fra dette og aksiomskjemaet Vet_;(x,t)(α) → Tror_;(x,t)(α) kan man slutte at Tror_;(x,t)(α → (αvβ)). Men fra dette og forutsetning (ii) samt E8 følger umiddelbart Tror_;(x,t)(αvβ). **QED**.

Man kan notere i forbindelse med teoremet ovenfor at man får et lignende teorem om man ersatter forutsetningene (i) og (ii) med Inns;_(x,t)(αvβ, α). Men dette teoremet er ikke ekvivalent med Teorem 2.3.5.

Det følgende teorem, som er analogt med Teorem 2.2.8, viser at vi ikke bare kan vise Tror_;(x,t)(α) → Tror_;(x,t)(αvβ) under visse forutsetninger, men at vi også kan utlede:
Tror_;(x,t)(Tror_;(x,t)(α)) → Tror_;(x,t)(Tror_;(x,t)(αvβ))
om man utvider forutsetningene i Teorem 2.3.5 med ytterligere en premiss.

Teorem 2.3.6
Fra
(i) Innse_;(x,t)(α→(αvβ))
(ii) Inns_;(x,t)(αvβ, α &(α→(αvβ)))
(iii) Inns_;(x,t)(Tror_;(x,t)(αvβ), Innse_;(x,t)(x,t)(α→(αvβ)) &
Inns_;(x,t)(αvβ, α &(α→(αvβ))) & Tror_;(x,t)(α))
kan man slutte:
Tror_;(x,t)(Tror_;(x,t)(α)) → Tror_;(x,t)(Tror_;(x,t)(αvβ))

Forutsetningene i teoremene vi har kommentert ovenfor er naturligvis temmelig sterke. Det virker imidlertid ikke fullstendig urealistisk å tro at en person x ved et gitt tidspunkt t kan oppfylle kravene (i) - (iii) ovenfor.

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder og anta at (1) Tror_;(x,t)(Tror_;(x,t)(α)). Fra forutsetning (i) og aksiomskjemaene Innse_;(x,t)(α) → Vet_;(x,t)(Innse_;(x,t)(α)) og Vet_;(x,t)(α) → Tror_;(x,t)(α) kan man slutte:
(2) Tror_;(x,t)(Innse_;(x,t)(α →(αvβ)))
Likeledes kan fra forutsetning (ii) og aksiomskjemaene
Inns_;(x,t)(β,α) → Vet_;(x,t)(Inns_;(x,t)(β,α)) og Vet_;(x,t)(α) → Tror_;(x,t)(α) slutte at (3) Tror_;(x,t)(Inns_;(x,t)(αvβ, α &(α→(αvβ))))
Fra (1), (2) og (3) samt konjunksjonsaksiomet E15b følger:

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(4) Tror_;(x,t)(Innse_;(x,t)(α →(αvβ)) &
Inns_;(x,t)(αvβ, α &(α→(αvβ))) &Tror_;(x,t)(α))

Fra (4) og forutsetning (iii) følger så det vi ønsker ved hjelp av aksiom E8, nemlig: Tror_;(x,t)(Tror_;(x,t)(αvβ)). **QED**.

Følgende formler er alle teoremer i hva man ofte kaller normale modallogiske systemer, og derfor i systemet K:

(1) Nec(α↔β) →. Nec(α) ↔ Nec(β)
(2) Nec(α↔β) →. Nec(α&γ) ↔ Nec(β&γ)
(3) Nec(α→β) & Nec(β → γ) ↔ Nec(α→γ)

Erstatter man i (1) - (3) alle forekomster av uttrykket "Nec" med uttrykket "Tror_;(x,t)" får vi selvfølgelig tre nye formler:

(4) Tror_;(x,t)(α↔β) →. Tror_;(x,t)(α) ↔ Tror_;(x,t)(β)
(5) Tror_;(x,t)(α↔β) →. Tror_;(x,t)(α&γ) ↔ Tror_;(x,t)(β&γ)
(6) Tror_;(x,t)(α→β) & Tror_;(x,t)(β → γ) ↔ Tror_;(x,t)(α→γ)

som er konklusjonene i henholdsvis Teorem 2.3.7, Teorem 2.3.8 og Teorem 2.3.9 nedenfor. Naturligvis er ikke (4), (5) og (6) gyldige i noen standard utvidet begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn, men betegner vi forutsetningene i Teorem 2.3.7, Teorem 2.3.8 og Teorem 2.3.9 med henholdsvis δ;1, δ;2 og δ;3 har vi at formlene δ;1 → (4), δ;2 → (5) og δ;3 → (6) alle er gyldige i enhver standard utvidet begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Bevisene for Teorem 2.3.7 - Teorem 2.3.9 viser at dette er tilfelle.

Teorem 2.3.7

Fra
(i) Inns_;(x,t)(β, α&(α→β))
(ii) Inns_;(x,t)(α, β&(β→α))
(iii) Inns_;(x,t)((α→β)&(β→α), α↔β)

kan man slutte:
Tror_;(x,t)(α↔β) → (Tror_;(x,t)(α) ↔ Tror_;(x,t)(β))

Bevis: Anta forutsetningene holder og anta at (1) Tror_;(x,t)(α↔β). Det er nødvendig å vise: (2) Tror_;(x,t)(α) ↔ Tror_;(x,t)(β). (i) Vi viser kondisjonalen mot høyre i (2). Anta derfor (3) Tror_;(x,t)(α). Fra (1) og forutsetning (iii) følger ved hjelp av E8 at (4) Tror_;(x,t)(α→β & β→α). Fra dette følger ved hjelp av E15b at Tror_;(x,t)(α→β). Fra dette, (3) og E15b kan man slutte: (5) Tror_;(x,t)(α&(α→β)) som sammen med forutsetning (i) og E8 impliserer Tror_;(x,t)(β). (ii) Det er også nødvendig å vise kondisjonalen mot venstre i (2). Anta derfor (6) Tror_;(x,t)(β). Fra (1) og forutsetning (iii) følger ved hjelp av E8 at (6) Tror_;(x,t)(α→β & β→α). Fra dette følger ved hjelp av E15b at Tror_;(x,t)(β→α). Fra dette, (6) og E15b kan man slutte: (7) Tror_;(x,t)(β&(β→α)) som sammen med forutsetning (ii) og E8 impliserer Tror_;(x,t)(α). Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Teorem 2.3.8

Fra
(i) Inns_;(x,t)(β&γ, (α&γ)&(α→β))
(ii) Inns_;(x,t)(α&γ), (β&γ)&(β→α))

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(iii) Inns_;(x,t)((α→β)&(β→α), α↔β)
kan man slutte:
Tror_;(x,t)(α↔β) → Tror_;(x,t)(α&γ) ↔ Tror_;(x,t)(β&γ)

Bevis: Anta forutsetningene holder og anta at (1) Tror_;(x,t)(α↔β). Det er nødvendig å vise: (2) Tror_;(x,t)(α&γ) ↔ Tror_;(x,t)(β&γ). (i) Vi viser kondisjonalen mot høyre i (2). Anta derfor (3) Tror_;(x,t)(α&γ). Fra (1) og forutsetning (iii) følger ved hjelp av E8 at (4) Tror_;(x,t)(α→β & β→α). Fra dette følger ved hjelp av E15b at Tror_;(x,t)(α→β). Fra dette, (3) og E15b kan man slutte: (5) Tror_;(x,t)((α&γ)&(α→β)) som sammen med forutsetning (ii) og E8 impliserer Tror_;(x,t)(β&γ).

(ii) Det er også nødvendig å vise kondisjonalen mot venstre i (2).
Anta derfor (6) Tror_;(x,t)(β&γ). Fra (1) og forutsetning (iii) følger ved hjelp av E8 at (6) Tror_;(x,t)(α→β & β→α). Fra dette følger ved hjelp av E15b at Tror_;(x,t)(β→α). Fra dette, (6) og E15b kan man slutte: (7) Tror_;(x,t)((β&γ)&(β→α)) som sammen med forutsetning (ii) og E8 impliserer Tror_;(x,t)(α&γ). Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Teorem 2.3.9
Fra
(i) Inns_;(x,t)(α→γ, (α→β)&(β→γ))
kan man slutte
Tror_;(x,t)(α→β) & Tror_;(x,t)(β→γ) → Tror_;(x,t)(α→γ)

Bevis: Anta (i) holder og anta (2) Tror_;(x,t)(α→β) & Tror_;(x,t)(β→γ). Fra dette kan man ved hjelp av E15b slutte at Tror_;(x,t)(α→β) &(β→γ)). Dette sammen med forutsetning (i) og E8 impliserer: Tror_;(x,t)(α→γ). **QED**.

På samme måte som man i modallogikken kan innføre en dual operator Pos til nødvendighetsoperatoren Nec og definere Pos(α) ved Pos(α) = ¬Nec(¬α), kan man i vår teori en tilsvarende operator CTror_;(x,t)(α) som kan oppfattes som dual i forhold til Tror_;(x,t)(α). Denne kan man definere slik:

Definisjon 2.3.1: CTror_;(x,t)(α) ↔ ¬Tror_;(x,t)(¬α)

Uttrykket "CTror_;(x,t)(α)" leses "det at α er tilfelle er logisk sett forenelig med alt det x tror ved tidspunktet t". Operatoren "CTror_" er analog med mulighetsoperatoren i de vanlige modallogiske systemene.

Vi skal vise noen teoremer som involverer denne operatoren.

Det første teoremet er det følgende som sier at dersom x ved tidspunktet t tror at α, og det at β er kompatibelt med alt det x tror ved tidspunktet t, så er også konjunksjonen α&β forenelig med alt det x tror ved tidspunktet t. Imidlertid er ikke denne setningen isolert sett gyldig i

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

noen standard utvidet begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Vi må også legge til de to forutsetningene som er nevnt.

Teorem 2.3.10
Fra
(i) Inns_;(x,t)(¬β, α&(α→¬β))
(ii) Inns_;(x,t)(α→¬β, ¬(α&β))
kan man slutte:
Tror_;(x,t)(α) & CTror_;(x,t)(β) → CTror_;(x,t)(α&β)

Bevis: Det vil være tilstrekkelig å vise:
(1) Tror_;(x,t)(α) & Tror_;(x,t)(¬(α&β)) → Tror_;(x,t)(¬β)
siden konsekventen i satsen følger nesten umiddelbart fra (1) og definisjonen av CTror_. La oss derfor bevise (1). Anta (2) Tror_;(x,t)(α) & Tror_;(x,t)(¬(α&β)). Fra den andre konjunkten her og forutsetning (ii) følger ved hjelp av E8 at
(3) Tror_;(x,t)(α→¬β). Fra dette og den første konjunkten i (2) følger så
(4) Tror_;(x,t)(α& (α→¬β)). Men fra dette, forutsetning (i) og E8 følger Tror_;(x,t)(¬β). Dette viser at (1) holder. **QED**.

Ovenfor ble CTror_;(x,t)(α) definert ved hjelp av Tror_;(x,t)(α). Det følgende teorem viser at vi i en viss forstand kunne ha definert Tror_;(x,t) ved hjelp av CTror_;(x,t), men selvfølgelig gjelder ikke dette uten at man forutsetter to ting nemlig: Inns_;(x,t)(¬¬α,α) og Inns_;(x,t)(α, ¬¬α). Teoremet er dette:

Teorem 2.3.11
Fra
(i) Inns_;(x,t)(¬¬α, α)
(ii) Inns_;(x,t)(α, ¬¬α)
kan man slutte:
Tror_;(x,t)(α) ↔ ¬CTror_;(x,t)(¬α)

Bevis: Det vil være tilstrekkelig å bevise (1) Tror_;(x,t)(α) → Tror;(x,t)(¬¬α) og (2) Tror_;(x,t)(¬¬α) → Tror;(x,t)(α) siden konsekventen i satsen følger umiddelbart fra disse to påstandene ved hjelp av definisjonen av CTror_ og ren setningslogikk. La oss først vise (1): Anta Tror_;(x,t)(α). Fra dette og forutsetning(i) følger ved hjelp av E8 at Tror_;(x,t)(¬¬α). Dette viser at (1) holder. Når det gjelder (2) bevises dette på nøyaktig samme måte, bortsett fra at man nå benytter seg av forutsetning (ii). **QED**.

Vårt neste teorem er en slags doxastisk variant til skjemaet Nec(Nec(α)) ↔ ¬Pos(Pos(¬α)) som er et teorem i vanlig modallogikk. Vi viser altså at under visse ganske kompliserte forutsetninger holder:
Tror_;(x,t)(Tror_;(x,t)(α)) ↔ ¬CTror_;(x,t)(CTror_;(x,t)(¬α))
Teoremet er dette:

Teorem 2.3.12
Fra

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(i) Inns_;(x,t)(¬¬α,α)
(ii) Inns_;(x,t)(¬¬Tror_;(x,t)(¬¬α), Inns_;(x,t)(¬¬α,α) & Tror_;(x,t)(α))
(iii) Inns_;(x,t)(α,¬¬α)
(iv) Inns_;(x,t)(Tror_;(x,t)(α), Inns_;(x,t)(α,¬¬α) & ¬¬Tror_;(x,t)(¬¬α))
kan man slutte:
Tror_;(x,t)(Tror_;(x,t)(α)) ↔ ¬CTror_;(x,t)(CTror_;(x,t)(¬α))

Bevis: Det vil være tilstrekkelig å bevise følgende to påstander gitt at forutsetningene i satsen holder:

(1) Tror_;(x,t)(Tror_;(x,t)(α)) → Tror_;(x,t)(¬¬Tror_;(x,t)(¬¬α))
(2) Tror_;(x,t)(¬¬Tror_;(x,t)(¬¬α)) → Tror_;(x,t)(Tror_;(x,t)(α))

Man ser lett at konsekventen i satsen følger fra (1) og (2) ved hjelp av ren setningslogikk og definisjonen av CTror_ .

Vi viser først at (1) holder. Anta derfor (3) Tror_;(x,t)(Tror_;(x,t)(α)). Fra forutsetning (i) og aksiomskjemaet Inns_;(x,t)(α,β) → Vet_;(x,t)(Inns_;(x,t)(α,β)) følger

(4) Vet_;(x,t)(Inns_;(x,t)(¬¬α,α)). Fra dette kan vi så ved hjelp av aksiomskjemaet Vet_;(x,t)(α) → Tror;(x,t)(α) slutte (5) Tror_;(x,t)(Inns_;(x,t)(¬¬α,α)). Fra (3) og (5) kan man ved hjelp av aksiom E15bslutte at

(6) Tror_;(x,t)(Inns_;(x,t)(¬¬α,α) & Tror_;(x,t)(α)). Men fra dette, forutsetning (ii) og aksiom E8 slutte at Tror_;(x,t)(¬¬Tror_;(x,t)(¬¬α)). Dette viser at (1) holder.

Vi viser så at (2) holder. Anta derfor (7) Tror_;(x,t)(¬¬Tror_;(x,t)(¬¬α)) Fra forutsetning (i) og aksiomskjemaet Inns_;(x,t)(α,β) → Vet_;(x,t)(Inns_;(x,t)(α,β)) følger (8) Vet_;(x,t)(Inns_;(x,t)(α,¬¬α)). Fra dette kan vi så ved hjelp av aksiomskjemaet Vet_;(x,t)(α) → Tror;(x,t)(α) slutte (9) Tror_;(x,t)(Inns_;(x,t)(α,¬¬α)).Fra (8) og (9) kan man ved hjelp av aksiom E15b slutte at

(10) Tror_;(x,t)(Inns_;(x,t)(¬¬α,α) & ¬¬Tror_;(x,t)(¬¬α)) Men fra dette, forutsetning (iv) og aksiom E8 slutte at Tror_;(x,t)(Tror_;(x,t)(α)). Dette viser at (2) holder. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Vårt siste teorem viser, under viss forutsetninger, at operasjonen CTror_;(x,t) distribuerer over disjunksjon på samme måte som operatoren Pos, og på en analog måte Tror_;(x,t) distribuerer over konjunksjon:

Teorem 2.3.13
Fra
(i) Inns_;(x,t)(¬α ,¬(αvβ))
(ii) Inns_;(x,t)(¬β , ¬(αvβ))
(iii) Inns_;(x,t)(¬(αvβ), ¬α&¬β)
kan man slutte:
CTror_;(x,t)(αvβ) ↔ CTror_;(x,t)(α) v CTror_;(x,t)(β)

Bevis: Konsekventen i satsen er i lys av definisjonen av CTror_ ekvivalent med

¬ Tror_;(x,t)(¬(αvβ)) ↔ ¬Tror_;(x,t)(¬α) v ¬Tror_;(x,t)(¬β)

Dette er i sin tur setningslogisk ekvivalent med:

Tror_;(x,t)(¬(αvβ)) ↔ ¬(¬Tror_;(x,t)(¬α) v ¬Tror_;(x,t)(¬β))

og derfor ekvivalent med:

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(1) Tror_;(x,t)(¬(αvβ)) ↔ Tror_;(x,t)(¬α) & Tror_;(x,t)(¬β)

Det vil derfor være tilstrekkelig å vise at (1) holder under de forutsetninger som er nevnt i satsen. La oss først vise kondisjonalen mot høyre i (1). Anta Tror_;(x,t)(¬(αvβ)). Fra dette, forutsetning (i) og (ii) samt E8 følger umiddelbart
Tror_;(x,t)(¬α) & Tror_;(x,t)(¬β). Vi viser så kondisjonalen mot venstre i (1). Anta
(2) Tror_;(x,t)(¬α) & Tror_;(x,t)(¬β). Fra dette og aksiom E15b følger:
(3) Tror_;(x,t)(¬α &¬β). Fra dette, forutsetning (iii) og E8 kan man så slutte at Tror_;(x,t)(¬(αvβ)). Dette viser at (1) holder og gir oss dermed et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Teoremene som vi har gjennomgått ovenfor, ikke bare i denne paragrafen, men også i §2.2 og §2.1, skulle gi leseren et tydeligere og mer utførlig bilde av hva som kan utledes om viten og tro i den teorien vi har formulert og sammenfattet i Del II, §1, §1.1 - §1.5. Det har vært dette som har vært vårt primære mål.

Ser man på de teoremene vi har utledet ovenfor virker imidlertid den følgende påstand, som her bare fremsettes som en ren gjetning, ikke uten enhver plausibilitet:

Anta α er et teorem i det modallogiske systemet K for setningslogikk. (Se f.eks. Hughes & Cresswell for en opplysende fremstilling av dette systemet.) Anta B= <B',ξ> er en utvidet standard begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. La α være resultatet av å erstatte alle forekomster av "Nec" i α med "Tror_;(x,t)" og alle forekomster av "Pos" i α med "CTror_;(x,t)". Da finnes det en endelig mengde med formler γ;1, ... ,γ;n over B, der γ;i (i=1, ... ,n) enten er en formel av typen Innse_;(x,t)(δ) for en eller annen formel δ, eller er en formel av typen Inns_;(x,t)(φ:1, φ;2) for visse formler φ;1, φ;2, slik at γ;1 & ..... , γ;n → α* er gyldig i den utvidete begrepsrammen B.*

Det må innrømmes at denne påstanden på det nuværende tidspunkt bare er å anse som en ren og skjær gjetning, som det, såsant den er riktig, kunne vært interessant å sett et detaljert bevis for. Like interessant kunne det ha vært å se et bevis for at den er uriktig, om den faktisk er det. Vi lar spørsmålet være åpent.

§2.4 Om erkjennbarheten til setningene i den klassiske matematikk.

I kommentarene til Teorem 2.1.8 ovenfor kom vi med noen kommentarer til hypotetisk deduktiv metode. I forbindelse med disse kommentarene finner vi det passende å komme med ytterligere noen kommentarer til begrepsrammer og særlig det vi har kalt standard begrepsrammer.

Som man husker var en standard begrepsramme en begrepsramme som oppfylte kravene (i) - (iii) i Definisjon 1.3.7 i Del II, §1.3.

Det vi nå ønsker å bemerke er at om B=<D,X, In> er en slik begrepsramme er det ikke satt mange krav til D. Det eneste er at D, i tillegg til å være en ikke-tom mengde, skal inneholde mengden av tidspunkter T og mengden av personer P. Vi krever altså at T,P Inkl D. Utover dette kreved det ikke noe mer av D i en standard begrepsramme. Dette innebærer at man ikke fra det faktum at B=<D,X,In> er en standard begrepsramme kan slutte at det finnes formler i CFm(B) (eller Fm(B)) som uttrykker noe om matematiske forhold. Dette kan man

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

imidlertid gjøre om man krever at mengden av de reelle tall er med i D, med andre ord om man krever Reell Inkl D. På den annen side kan man heller ikke si noe om fysiske objekter i en standard begrepsramme. Vi kan si noe om tidspunkter i forbindelse med begrepsrammer siden vi har inkludert predikatene " x er et tidspunkt" ("Tp(x)") og "x er et tidspunkt som kommer før tidspunktet y" ("x <;f y") i språket til den teorien vi gar definert i Del II, §1.5. Likeledes har vi inkludert predikatet "x er en person" ("Pers(x)") slik at vi kan si noe om personer. Vi har også inkludert grunnsetningene P1 og T1 - T3 som inneholder disse predikatene.

La oss nå tenke ooss at vi utvider vokabularet til vår teori med predikatet "x er et fysisk objekt" som vi forkorter med "Fys(x)". Vi setter per definisjon F= Mg(x: Fys(x)) slik at "F" betegner mengden av fysiske objekter. Vi kan da i det minste uttrykke litt mer om denne arten av gjenstander. Det eneste vi i det følgende skal forutsette av mengdeteoretisk natur om fysiske objekter er at mengden av dem eksisterer, at denne mengden er ikke-tom, og at ethvert fysisk objekt er et urindivid. Mao. antar vi:

Fys1 $(Ey)(M(y) \& (Az)(z\hat{e}y \rightarrow Fys(z))$
Fys2 $Mg(x: Fys(x)) \neq ø$
Fys3 $(Ax)(Fys(x) \rightarrow \neg M(x))$

I det følgende skal vi også anta at tidspunkter og personer er urindivider og at mengdene av dem er ikke-tomme. Det følger derfor at vi antar:

$P\neq ø \& T\neq ø \& (Ax)(x\hat{e} P \cup T \rightarrow \neg M(x))$

Innenfor rammen av språket til vår erkjennelsesteori kan man definere mengden av de reelle tall.[48] Disse er selvfølgelig ikke ikke-mengder, dvs. urindivider i vår forstand. Vi skal også forutsette at disse fire mengdene : T, P, F og Reell er innbyrdes disjunkte, mao. at

$T\Omega P =ø \& T\Omega F=ø \& T\Omega Reell=ø \& P\Omega F =ø \& P\Omega Reell=ø \& F\Omega Reell =ø$

La oss nå se på unionen av disse fire mengdene. Vi setter:

$D(0) = F \cup T \cup P \cup Reell$

Vi kan da definere induktivt et hierarki $<V(n)>/n\hat{e}N/$ over D(0) ved å sette:

$V(0) = D(0)$

$V(n+1) = V(n) \cup Pt(V(n))$

Tilslutt setter vi $V(\omega) = Un/n\hat{e}N/(V(n))$. Vi skal nå se på begrepsrammen $B=<D,X,In>$ der vi krever to ting: (i) $D=V(\omega) = Un/n\hat{e}N/(V(n))$ og (ii) at B er en standard begrepsramme.

Vårt hovedsakelige siktemål i det følgende er å vise hvordan man kan formulere innenfor denne rammen et aksiomsett for de reelle tall som er inkludert i Fm(B) og som er sterkt nok til at man på grunnlag av disse aksiomene (og definisjoner) kan utlede de viktigste setningene innenfor den matematiske analyse.

Men før vi gjør dette kan det være verdt å gjøre rede for endel trekk ved hierarkiet $V(n)/n\hat{e}N/$. Man ser at V(0) utelukkende inneholder enkeltobjekter og selvfølgelig ikke noen

48 Se Rognes [1]

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

mengder. Mengdene dukker først opp på nivå 1 som er mengden V(0) pluss mengden av alle delmengder på nivå 0. Nivå 1 inkluderer derfor mengden av fysiske objekter, mengden av tidspunkter, mengden av personer og mengden av de reelle tall samt alle mulige delmengder av unionen av disse mengdene. Hvis man oppfatter mengden av alle rødmalte hus i Norge som fysiske objekter vil da mengden av dem alle høre med på nivå 1. Det samme vil gjelde mengden av alle de personer som eier rødmalte hus i Norge. Mengden av atomer i universet vil også høre med på dette nivå. Mengden av enhetsmengder og parmengder av entiteter på nivå 0 vil også høre med på nivå 1. Skrider vi nå opp på nivå 2 finner vi der alle delmengder av elementene på nivå 1. Hvis for eksempel x og y er reelle tall har vi at x,yêV(0). Vi har da at {x} og {x,y}, enhetsmengden som bare inneholder x og parmengden av x,y er med på nivå 1, dvs. er elementer i V(1). Derimot er mengden som inneholder {x} og {x,y} og bare dem, ie. {{x},{x,y}} med på nivå 2. Siden vi har at {{x},{x,y}} er paret som har x som første komponent og y som annen komponent har vi at dette også er med på nivå 2 såsant x og y er elementer på nivå 0, ie er med i V(0) = F U T U P U Reell. Det følger at alle par av reelle tall, fysiske objekter og mer generelt, objekter på nivå 0 hører med på nivå 2.

En relasjon er en mengde med ordnete par. En relasjon mellom for eksempel reelle tall er derfor, om vi konstruerer par på måten ovenfor, en mengde som hører med på nivå 3.

Det bør bemerkesat vi kan innføre to mengdeteoretiske begreper. Vi setter først:

Meng(x) ↔ (En)(n>=1 & xêV(n))

"Mng(x)" kan leses "x er en mengde i det kumulative hierarkiet over D(0)". Vi kan så innføre en medlemskapsrelasjon "x e* y", som kan leses "x er et element i mengden y", ved å sette:

x e* y ↔ (xê V(ω) & Meng(y) & xêy)

Vi kan nå innføre to viktige egenskapsnavn i forbindelse med begrepsrammen B. Først definerer vi egenskapen |Mng| ved å sette:

|Meng| = Ekst;-1(λ/wêI/(Mg(x: Mng(x))))

Dernest innfører vi navnet på denne egenskapen, Mng_, ved å sette per definisjon:

Meng_ = <3,1,0,|Mg|>

Vi krever selvfølgelig, siden B=< D(0),X,In> at |Meng| êX. Vi kan så innføre et binært egenskapsnavn e*_ ved først å definere den binære egenskapen |e*|. Dette skjer ved den følgende definisjon:

|e*| = Ekst;-1(λ/wêI/(Mg(<x,y>: x e* y))

Vi kan så definere selve navnet på denne egenskapen ved å sette:

e*_ = < 3,2,0,|e*|>

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

I og med at Meng_ og e*_ er med i språket assosiert med begrepsrammen B kan vi formulere alle de vanlige mengdeteoretiske aksiomene i dette språket. For eksempel kan det såkalte utsondringsaksiomet formuleres slik:

$$\text{Meng_}(x) \rightarrow (Ey)(\text{Meng_}(y) \,\&\, (Av)(v\ e^*_y \leftrightarrow v\ e^*_\ x \,\&\, \alpha)$$

der vi forutsetter at αêFm(B) og at y er et variabeltegn over B som ikke forekommer fritt i formelen α. Tilsvarende kan vi formulere versjoner av de følgende mengdeteoretiske grunnsatser og vise at de er gyldige i begrepsrammen B: mengdeaksiomet, nullmengde-aksiomet, ekstensjonalitetsaksiomet, parmengdeaksiomet, foreningsmengdeaksiomet, potensmengde aksiomet, regularitetsaksiomet og utvalgsaksiomet.[49]

Når det gjelder de fire objektklassene F,T,P og Reell, mao. de fysiske objektene, klassen av tidspunkter, klassen av personer og mengden av de reelle tall, kan vi også innføre egenskapsnavn i forbindelse med dem. Dette har vi gjort for T og P's vedkommende, men ikke for mengdene F og Reell. Vi setter derfor per definisjon:

$$|F| = Ekst;\text{-}1(\lambda/w\hat{e}I/(Mg(x: Fys(x))))$$
$$Fys_ = \langle 3,1,0,|F|\rangle$$

Fys_ er derfor navnet på den egenskapen som har som sin ekstensjonsfunksjon den funksjonen som tilordner enhver mulig verden mengden av fysiske objekter.

Når det gjelder mengden av de reelle tall, Reell, setter vi per definisjon:

$$|Reell| = Ekst;\text{-}1(\lambda/w\hat{e}I/(Reell))$$
$$Reell_ = \langle 3,1,0,|Reell|\rangle$$

Vi må forsikre oss om at man i språket assosiert med B kan formulere den grunnsetning at F U T U P U Reell faktisk er en mengde. Denne setningen kan formuleres slik:

$$(Ex)(\text{Meng_}(x) \,\&\, (Av)(v\ e^*_\ x \leftrightarrow (\text{Fys_}(v) \vee \text{Reell_}(v) \vee \text{P_}(v) \vee \text{T_}(v))))$$

Gitt det vi har skrevet ovenfor sulle det være klart at denne formelen i Fm(B) er gyldig i begrepsrammen B.

Vi kommer nå til de reelle tallene. Innenfor rammen av den mengdeteoretiske del av vår kunnskapsteori, som ble spesifisert og definert i Del II, §1.5, kan vi definere de følgende predikater:

"x er et reellt tall " - "Reell(x)"
"x er et positivt reellt tall" - "Pos(x)"
"z er summen av de reelle tallene x og y" - "Sum(z,x,y)"
"z er produktet av de reelle tallene x og y" - "Prod(z,x,y)"
"x er det reelle tallet null"- "Nu(x)"

49 Det eneste aksiomet av ZFC-aksiomet som ikke er gyldig i begrepsrammen B synes å være substitusjonsaksiomet.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

"x er det reelle tallet 1" - "En(x)"
"y er det negative tallet bestemt av x" - "Minus(y,x)"
"y er det inverse reelle talle til x " - "Inv(y,x)"

Ikke bare kan vi definere disse åtte predikatene innenfor den mengdeteoretiske delen av vår kunnskapsteori, vi kan også bevise en lang rekke satser som inneholder disse predikatene. La oss som eksempel se på "Sum"-predikatet. Vi kan da vise f.eks. at følgende to satser holder:

(1) Reell(x) & Reell(y) → (E!z)Sum(z,x,y)
(2) Sum(z,x,y) → Reell(z) & Reell(x) & Reell(y)

Dette innebærer at Sum-predikatet representerer en funksjon som avbilder kryssproduktet av de reelle tall inn i mengden av de reelle tall.

Tilsvarende satser kan bevises for de resterende fem predikatene på listen ovenfor:

(3) Reell(x) & Reell(y) → (E!z)Prod(z,x,y)
(4) Prod(z,x,y) → Reell(z) & Reell(x) & Reell(y)
(5) (E!x)En(x) & (Ax)(En(x) → Reell(x))
(6) (E!x)Nu(x) & (Ax)(Nu(x) → Reell(x))
(7) Reell(y) → (E!z)Minus(z,y)
(8) Minus(z,y) → Reell(z) & Reell(y)
(9) Reell(y) → (E!z)Inv(z,y)
(10) Inv(z,y) → Reell(z) & Reell(y)

La oss nå minne leseren om at vi i forbindelse med begrepsrammen B kan definere egenskapsnavn som svarer til predikatene Reell, Pos, Sum, Prod, Nu, En, Minus og Inv.
Vi har allerede definert egenskapsnavnet som svarer til predikatet "Reell(x)", nemlig Reell_.
De andre egenskapsnavnene kan defineres slik:

|Pos| = Ekst;-1(λ/wêI/(Mg(x:Pos(x))))
Pos_ = <3,1,0, |Pos|>
|Sum| = Ekst;-1(λ/wêI/(Mg(<z,x,y>:Sum(z,x,y))))
Sum_ = <3,3,0,|Sum|>
|Prod| = Ekst;-1(λ/wêI/(Mg(<z,x,y>:Prod(z,x,y))))
Prod_ = <3,3,0,|Prod|>
|En| = Ekst;-1(λ/wêI/(Mg(x:En(x)))
En_ = <3,1,0,|En|>
|Nu| = Ekst;-1(λ/wêI/(Mg(x:Nu(x)))
Nu_ = <3,1,0,|Nu|>
|Minus| = Ekst;-1(λ/wêI/(Mg(<y,x>:Minus(y,x))))
Minus_ = <3,3,0,|Minus|>
|Inv| = Ekst;-1(λ/wêI/(Mg(<y,x>:Inv(y,x))))
Inv_ = <3,3,0,|Inv|>

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Det kan være vel verdt å bemerke at alle egenskapene ovenfor, ie. |Pos|, |Sum|, |Prod|, |Nu|, |En|,| Minus| og |Inv| er konstante. I enhver mulig verden har de den samme ekstensjon.

La oss kalle, men bare i denne paragrafen, det første-ordensspråket som har følgende predikater som primitive predikater,nemlig: "Meng(x)", "x e*y", "Reell(x)", "Pos(x)", "Sum(z,x,y)", "Prod(z,x,y)", "Nu(x)", "En(x)", "Minus(y,x)", "Inv(y,x)" og "x=y" for L. La oss på den annen side kalle det første-ordensspråket som har "Meng_(x)", "x e*_ y", "Reell_(x)", "Pos_(x)", "Sum_(z,x,y)", "Prod_(z,x,y)", "Nu_(x)", "En_(x)", "Minus_(y,x)", "Inv_(y,x)" og "Id" for L'. Man ser da at enhver formel i L kan en-entydig avbildes på en formel i L' og man ser at formlene i L' er med i Fm(B), ie formelmengden assosiert med begrepsrammen B som vi definerte ovenfor.

Vi kan nå straks formulere vårt aksiom system for de reelle tall, men først innfører vi noen definisjoner for å kunne formulere aksiomene på en mer leselig og forståelig måte[50]:

Definisjon: Vi setter:

(i) $x+y = (iz)Sum(z,x,y)$
(ii) $x*y = (iz)\ Prod(z,x,y)$
(iii) $0 = (ix)Nu(x)$
(iv) $1 = (ix)En(x)$
(v) $-x = (iy)\ Minus(y,x)$
(vi) $1/x = (iy)\ Inv(y,x)$

Vi kan nå formulere de aksiomene vi trenger i det vi bruker "R" som forkortelse for "Mg(x: Reell(x))" og "R+" som forkortelse for "Mg(x:Pos(x))". Vi bemerker at vi også bruker de følgende definisjoner:

$x-y = x+(-x)$
$x>y = Pos(x-y)$
$x/y = x*(1/y)$
$x =<y = (x=y \vee x<y)$

Aksiomsett for de reelle tall:

(i) $x,y,z \hat{e} R \rightarrow x+(y+z)= (x+y)+z$
(ii) $x,y,z \hat{e} R \rightarrow x*(y*z) = (x*y)*z$
(iii) $x,y \hat{e} R \rightarrow .\ (x+y) = (y+x)\ \&\ x*y = y*x$
(iv) $x,y,z \hat{e} R \rightarrow z*(x+y) = z*x+z*y$
(v) $0 \hat{e} R$
(vi) $1 \hat{e} R$
(vii) $1 \neq 0$
(viii) $x \hat{e} R \rightarrow (-x) \hat{e} R$
(ix) $x \hat{e} R\ \&\ x \neq 0 \rightarrow (1/x) \hat{e} R$
(x) $x \hat{e} R \rightarrow .\ (x+0=x)\ \&\ (x*1=x)$

50 Aksiomsystemet er i alt vesentlig hentet fra Apostol [1].

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(xi) xêR → (x+ (-x))=0
(xii) xêR & x≠0 → x*(1/x) =1
(xiii) (R+ Inkl R) & (x,yêR+ → x+y, x*y êR+)
(xiv) xêR+ & x≠0 →. (xêR+ v (-x)êR+) & (~(xêR+ & (-x)êR+))
(xv) ~(0êR+)

Vi tar også med aksiomet for eksistensen av en minste øvre grense for mengder av reelle tall som er oventil begrenset:

(xvi) Meng(x) & x≠ø & x Inkl Reell & (Ey)(yêR & (Az)(zêx → z =<y)) →
(Ey)(yêR & (Az)(zêx → z=<y) & ~(Ev)(vêR & v<y &(Az)(zêx → z =<v)))

Vi definerte språket L ovenfor. Hvis man ekspanderer aksiomene (i) - (xvi) ovenfor til primitiv notasjon får vi sammen med formlene (1) - (10) som vi nevnte ovenfor ett sett av grunnsetninger for de reelle tall. (Man kan "barbere" dette settet litt for å kutte vekk overflødige formler.) Legger man så til dette aksiomsettet alle de mengdeteoretiske akssiomene vi har nevnt, dvs. aksiomet om at D(0) er en mengde, mengdeaksiomet, parmengdeaksiomet, ekstensjonalitetsaksiomet, utsondringsaksiomet[51] , foreningsmengde-aksiomet, potensmengdeaksiomet, null-mengde aksiomet, regularitetsaksiomet og utvalgs aksiomet får vi et mer omfattende system for de reelle tall hvor vi kan bevise de vanlige teoremene i analysen. Det bør bemerkes at vi ikke trenger uendelighetsaksiomet siden man i dette mer omfattende system kan vise at mengden av de reelle tallene er uendelig.

La oss bemerke følgende i denne forbindelse: For det *første* kan alle disse aksiomene formuleres i L', ved å erstatte ethvert predikat av typen "P" med et av typen "P_". Eksempelvis må alle forekomster av "Meng" erstattes med "Meng_", alle forekomster av "Sum" erstattes med "Sum_" osv. For det *andre* kan alle de vanlige setningene i den matematiske analyse utledes på grunnlag av disse aksiomene og passe definisjoner, men ikke bare det, også de vanlige og velkjente setningene innenfor geometrien kan også uledes via den analytiske geometri. For det *tredje* bemerker vi at lukningeneav alle aksiomene vi har nevnt i L' derfor er med blandt de lukkede formlene assosiert med begrepsrammen B, ie. CFm(B). Vi kan legge alle dissse aksiomene, både de rent mengdeteoretiske aksiomene og aksiomene om de reelle tall, til det aksiomsett for predikatlogikk med i identitet som vi presenterte i Del I, §2.6. Det følger da fra det vi har sagt ovenfor at hvis β er en sats i den klassiske matematikk vil det finnes et bevis α;1, ..., α;n der α;n=β i dette system, hvor hver formel α;i (i>=1) enten er et aksiom, (f.eks. ett av dem vi har presentert ovenfor om reelle tall eller av mengdeteoretisk natur eller et rent logisk aksiom), eller er slutte fra to tidligere setninger ved hjelp av modus ponens. Fra dette konkluderer vi, på samme måte so i kommentarene til Teorem 2.1.8 i Del II at enhver setning i den klassiske matematikk i prinsippet er erkjenbar. For det *fjerde* bemerker vi at dersom vi holder oss til begrepsrammen B vi har definert i dette avsnitt så er alle de mengdeteoretiske aksiomene og de aksiomene vi har nevnt om de reelle tall gyldige i begrepsrammen B.

51 Dette er et aksiomskjema

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Del III

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

DEL III

Innledning

I den forrige delen av vårt arbeid , Del II, så vi på, og forsøkte å gi et bilde av, hva som kan utledes i vår teori dersom vi tar for oss alle aksiomene i den kunnskapsteorien som ble formulert i Del II og sammenfattet i Del II, §1.5

I denne delen skal vi hovedsakelig se på hva som kan utledes om viten og tro samt de andre epistemiske begrepene vi har omtalt, som iaktagelse, hukommelse, innsikt og meddelelse, dersom vi begrenser oss til de grunnsetningene i vår teori som ikke involverer bruken av begrepsrammer, dvs. P1, T1 - T3, E1 -E13 og C1, C2. Blant aksiomene E1 -E13 vil de aksiomene som inneholder predikatet "Inns;(w,t)(x,y,z)" (ie. "x innser ved tidspunktet t i verdenen w at det finstrukturerte utsagnet y følger fra det finstrukturerte utsagnet z") ikke spille noen rolle her, dvs. at det ikke vil bli brukt i noen av de satsene vi utleder.

I forbindelse med de seks primitive predikatene "Vet;(w,t)(x,y)", "Ser;(w,t)(x,y)", "Husk;(w,t)(x,y)", "Tror;(w,t)(x,y)", "Innse;(w,t)(x,y)" og "Med;(w,t)(x,y,z)" definerer vi de følgende seks relasjoner:

(1) Vet = Mg(<w,t,x,y> : Vet;(w,t)(x,y))
(2) Tror = Mg(<w,t,x,y> : Tror;(w,t)(x,y))
(3) Ser = Mg(<w,t,x,y> : Ser;(w,t)(x,y))
(4) Husk = Mg(<w,t,x,y> : Husk;(w,t)(x,y))
(5) Innse = Mg(<w,t,x,y> : Innse;(w,t)(x,y))
(6) Med = Mg(<w,t,x,y,z> : Med;(w,t)(x,z,y))

I forbindelse med disse seks "epistemiske relasjonene", som vi vil kalle dem i denne delen, definerer vi for hver og en av dem to avledete operasjoner. La oss se på den epistemiske relasjonen Tror som eksempel. Den første avledete relasjonen er Tror°;(x,t) : U →U. Tror°;(x,t) er altså en funksjon som avbilder mengden av utsagn U inn i U. Er y et utsagn leses uttrykket "Tror°;(x,t)(y)" slik: "*Det utsagnet som sier at utsagnet y er en logisk konsekvens av alt det x tror er tilfelle ved tidspunktet t*". Med andre ord er Tror°;(x,t) en funksjon som tilordner ethvert utsagn y utsagnet Tror°;(x,t)(y).[52]

Den andre operasjonen er Tror*;(x,t) ; i det vi igjen bruker relasjonen Tror som eksempel. Tror*;(x,t) er igjen en funksjon som avbilder U inn i U. Er y et utsagn betegner "Tror*;(x,t)(y)" det *utsagnet som sier at utsagnet y er ekvivalent med et eller annet finstrukturert utsagn som beskriver et forhold x tror foreligger ved tidspunktet t*. Man ser altså at Tror*;(x,t) er en funksjon som til et utsagn y tilordner utsagnet Tror*;(x,t)(y). Vi kan definere tilsvarende operasjoner i forbindelse med de andre epistemiske relasjonene vi nevnte ovenfor, nemlig Vet, Ser, Husk, Innse og Med. De tilsvarende operasjonene blir da Vet*;(x,t),

52 For en presis definisjon av Tror°;(x,t)(y) kan man se på Definisjon 2.1 i §2

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Ser*;(x,t), Husk*;(x,t), Innse*;(x,t) og Med*;(x,y,t). Det bør noteres at "Tror*;(x,t)(y)" blir helt presist definert ved Definisjon 2.4 i §2 nedenfor.

Vi kommer nå til det siste begrepet som spiller en vesentlig rolle i denne delen av vårt arbeid. Fra definisjonene av de seks relasjonene vi har definert ovenfor ser man at de alle er inkludert i IxTxPxU;f. Vi har derfor f.eks. at Ser Inkl IxTxPxU;f. La nå R være en vilkårlig relasjon som er inkludert i IxTxPxU;f. Da kaller Mg(y: <w,t,x,y>êR) for *utsagnsfeltet til relasjonen R med hensyn på w,t og x*. Man ser at dette felt er en mengde med finstrukturerte utsagn. Er dette felt en rasjonelt organisert mengde med finstrukturerte utsagn, dvs. har vi Rasj;f(Mg(y: <w,t,x,y>êR)) sier vi at utsagnsfeltet til R med hensyn på w,t og y er rasjonelt organisert. Utsagnet som sier at R-feltet til x ved tidspunktet t er rasjonelt organisert betegner vi med η(R);(x,t). Dette er definert slik:

(7) η(R);(x,t) = μ-1(Mg(w: Rasj;f(Mg(y: <w,t,x,y>êR))))

Det følger fra dette, siden Tror Inkl IxTxPxU;f, at η(Tror);(x,t) er utsagnet som sier at Tror-feltet til x ved tidspunktet t er rasjonelt organisert. Tilsvarende vil f.eks. η(Ser);(x,t) være utsagnet som sier at Ser-feltet til x ved tidspunktet t er rasjonelt organisert.

Er R en vilkårlig relasjon i IxTxPxU;f er det følgelig tre begreper som er assosiert med R, nemlig de to utsagnsfunksjonene R°;(x,t) og R*;(x,t), samt utsagnet η(R);(x,t). For hver av relasjonene i rekken Vet, Tror, Ser, Husk, Innse og Med vil det altså være assosiert tre begreper av denne typen. For Innse vil vi f.eks. kunne nevne Innse°;(x,t), Innse*;(x,t) of η(Innse);(x,t). Tilsvarende kommentarer kan gis til de andre epistemiske relasjonene.

La oss nå gi et resyme av innholdet i denne tredje delen av vårt arbeid. I §1 gir vi en oversikt over de grunnleggende implikasjonsforholdene mellom de epistemiske relasjonene vi har nevnt ovenfor. Man ser for eksempel på grunnlag av aksiomene i vår teori at relasjonen Vet er inkludert i relasjonen Tror, med andre ord vet man at noe er tilfelle så tror man at dette er tilfelle. Videre ser man lett fra de aksiomene vi har formulert angående våre epistemiske grunnbegreper i Del II, §1.2 at relasjonene Ser, Husk og Innse er inkludert i Vet og at dersom personen x meddeler personen y om at α er tilfelle må denne personen x også vite at α er tilfelle.

I §2 gir vi presise definisjoner av funksjonene Tror°;(x,t) og Tror*:(x,t), samt en presis definisjon av uttrykket "η(Tror);(x,t)". Tilsvarende definisjoner gis i forbindelse med de andre relasjonene vi har nevnt, ie. Vet, Ser, Husk, Innse og Med. I §2.1 beviser vi endel satser om hva slags egenskaper funksjonen Tror°;(x,t) har om trosfeltet til x ved tidspunktet t er tomt, og også hva som skjer om trosfeltet til x er kontradiktorisk.

I §2.2 definerer vi begrepet K-funksjon (Se Definisjon 2.2.1), og viser at dersom R Inkl IxTxPxU:f så er R°;(x,t) en K-funksjon. Dette innebærer selvfølgelig at Vet°;(x,t), Ser°;(x,t) osv. er K-funksjoner. Vi gir i dette avsnittet bevis for tre teoremer som angir de viktigste egenskapene til K-funksjoner. Det dreier seg om teoremene Teorem 2.2.1 - Teorem 2.2.3 (Elementærteorem I - III). I §2.3 viser vi at dersom F og G er K-funksjoner så er også sammensetningen av dem, FoG en K-funksjon. Dette innebærer at om man f.eks. itererer operasjonen Vet°;(x,t) n ganger så vil også den n'te iterasjonen av Vet°;(x,t) være en K-funksjon. I forbindelse med iterasjonen av K-funksjoner av typen R°;(x,t) der R Inkl IxTxPxU;f betrakter og beviser vi tre satser som vi kaller Iterasjonsteorem I - III. Disse satsene kan oppfattes som generaliseringer av elementærteoremene som ble omtalt i §2.2.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

I §3 tar vi for oss operasjonen Tror*;(x,t) og studerer de grunnleggende egenskapene til denne. På tilsvarende vis kommenterer vi operasjonene Vet*;(x,t), Ser*;(x,t) osv.

I §4 og dens underparagrafer innfører vi begrepet *betinget modalstruktur*[53]. Dette er et ordnet par <η,T> der η er et utsagn og T en funksjon som avbilder mengden av utsagn inn i mengden av utsagn og hvor komponentene η og T oppfyller kravene (i) - (iv) i Definisjon 4.2.1. Vi viser at dersom R Inkl IxTxPxU;f så er paret <η(R);(x,t), R*;(x,t)> en betinget modalstruktur. Dette innebærer at også paret <η(Tror);(x,t), Tror*;(x,t> er en slik struktur. Erstatter vi her Tror med Vet eller noen av de andre epistemiske relasjonene blir også resultatet betingede modalstrukturer.

I forbindelse med betingede modalstrukturer viser vi en rekke teoremer som er analoge med Elementærteorem I - III om K-funksjoner i §2.2. Det dreier seg her om teoremene Teorem 4.3.1 - Teorem 4.3.3 i §4.3. Vi kaller disse satsene for Elementærteoremene I - III for betingede modalstrukturer.

Er <η;i, T;i> der i=1, ... ,n en sekvens av betingede modalstrukturer definerer vi presist hva som menes med iterasjonen av de n-første modalstrukturene i denne sekvensen. Denne betegner vi med <φ(n), Q;n>. Man kan nå vise at <φ(n), Q;n> selv er en betinget modalstruktur. Fra dette forhold Elementærteoremene I - III kan vi utlede som korollar tre teoremer itererte modalstrukturer. Disse satsene kaller vi for Iterasjonsteorem I - III for betingede modalstrukturer. (Se §4.2.1 nedenfor)

I §5 utvider begrepet standard begrepsramme som vi innførte i Del II, §1.5.Vi definerer, om R er en av de seks epistemiske relasjonene Vet, Ser, Husk, Innse, Tror eller Med to nye intensjonale relasjoner |R°| og |R*|. Med andre ord innfører vi de intensjonale relasjonene |Ser*|, |Vet*|, etc. på den ene side og |Ser°|, |Vet°| etc. på den annen side. Vi innfører også, dvs. definerer rigorøst, de binære egenskapene |η(Ser)|, |η(Vet)|, |Tror|, osv. Er B=<D,X,In> en utvidet begrepsramme i denne nye betydningen vil alle disse tolv nye intensjonale relasjonene være med i In, og de seks nye binære predikatene |η(Ser)|, |η(Vet)|, |Tror|, osv. være med i X. Dette gjør at vi i forbindelse med begrepsrammer i denne nye utvidete forstand kan bevise teoremer som er helt analoge med de elementærteoremene og iterasjonsteoremene som vi har bevist i forbindelse med K-funksjoner og betingede modalfunksjoner innenfor rammen av en slik utvidet standard begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn.

§6 inneholder en oppsummering av det vi har gjort i denne tredje delen av vårt arbeid.

§1 De grunnleggende implikasjoner mellom de epistemiske grunnbegrepene

I den første delen av dette arbeid innførte vi, ved siden av de rent logiske og mengdeteoretiske begrepene, syv nye primitive predikater: Dette var " x er et utsagn", "x er et finstrukturert utsagn", " w er en logisk mulig verden hvor utsagnet x er sant", "w er en logisk mulig verden hvor det finstrukturerte utsagnet x er sant" og endelig predikatet "w er en logisk mulig verden". Det må også nevnes at vi innførte de egenskapsteoretiske predikatene " x er en egenskap av grad n" og "z har egenskapen y i verdenen w". Man kan

53 Vi studerer også to relaterte begreper, nemlig det vi kaller en *betinget modalfunksjon* og det vi kaller for en *svak betinget modalfunksjon*

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

derfor med en viss rett si at vi i denne første delen av dette arbeidet har presentert en generell teori om utsagn, finstrukturerte utsagn, egenskaper og mengder og dermed gitt en fremstilling av hva man kunne kalle vår generelle kategorilære.

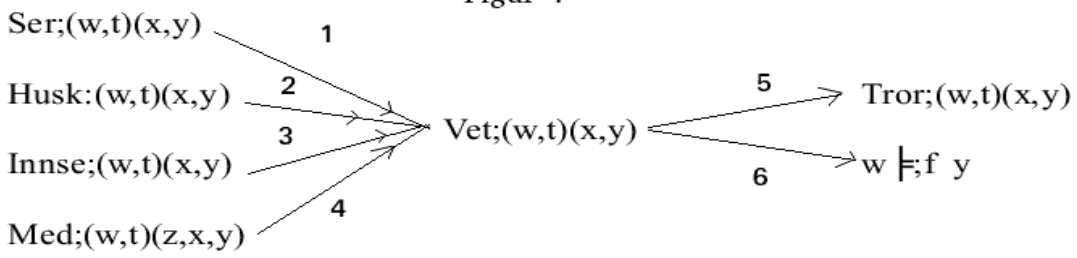
I den andre delen av vårt arbeid innførte vi ytterligere ti predikater i tillegg til dem som ble nevnt ovenfor, nemlig predikatene (i) - (x) som ble nevnt i avsnittet i Del II med tittel "Avgrensning av språket til den kunnskapsteorien vi vil undersøke". Disse utgjør naturlig nok det grunnleggende vokabularet i språket til den kunnskapsteorien vi formulerte presist i Del II. Vi skal imidlertid i denne delen av vårt arbeid ta utgangspunkt i et mer begrenset utvalg av disse predikatene.

Vi skal kun betrakte de følgende: For det første tar vi med de to tids-teoretiske predikatene "x er et tidspunkt", "Tp(x)" og " x er et tidspunkt som kommer før tids-punktet y", "x <;f y". Dessuten begrenser vi oss i denne delen til de følgende predikater: "y er et finstrukturert utsagn som x ved tidspunktet t i verdenen w vet er tilfelle", "Vet;(w,t)(x,y)", videre predikatet "y er et finstrukturert utsagn som beskriver et forhold som x ved tidspunktet t tror at foreligger i verdenen w", forkortet med "Tror;(w,t)(x,y)". Vi tar også med de følgende predikater: "y er et finstrukturert utsagn som beskriver et forhold x ved tidspunktet t ser at foreligger i verdenen w", dette forkortes, som man husker, med "Ser;(w,t)(x,y)", predikatet "y er et finstrukturert utsagn som beskriver et forhold x ved tidspunktet t innser at foreligger i verdenen w", "Innse;(w,t)(x,y)", predikatet "y er et finstrukturert utsagn som beskriver et forhold x ved tidspunktet t husker at foreligger i verdenen w", "Husk(w,t)(x,y)" og predikatet "y er et finstrukturert utsagn som beskriver et forhold z ved tidspunktet t meddeler x at foreligger i verdenen w", "Med(w,t)(z,x,y)". Vi tar også med predikatet "x er en person" som forkortes med "Pers(x)".

Hvis man studerer denne listen med predikater og sammenligner den med listen (i) - (x) som ble presentert i begynnelsen av Del II ser man at alle predikatene er med bortsett fra predikatet "x innser ved tidspunktet t i verdenen w at det finstrukturerte utsagnet z følger fra det finstruktuerte utsagnet y"

Implikasjonsforholdene mellom de predikatene vi har nevnt kan sammenfattes i det følgende diagram:

Figur 1



Ser man på implikasjonene 1- 4 på venstre side i dette diagrammet er disse rettferdigjort, eller representerer, rett og slett aksiomene E3, E10, E4 og C1 som ble nevnt i Del II.
Implikasjonene 5 - 6 på høyre side i diagrammet følger henholdsvis fra E5 og E2 som vi også nevnte i Del II.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

La oss nå se litt nærmere på predikatet "Tror;(w,t)(x,y)". Dette er naturligvis et språkelig uttrykk. Til dette uttrykket svarer en bestemt relasjon, nemlig den som er betegnet ved "Mg(<w,t,x,y>: Tror;(w,t)(x,y))". Det siste uttrykket betegner altså en mengde med kvadrupler, mens det første egentlig ikke betegner noe, men snarere om variabeltegnene tilordnes referanser, uttrykker en påstand. Vi skal i det følgende tillate oss å betegne denne siste relasjonen med "Tror" og setter per definisjon Tror = Mg(<w,t,x,y>: Tror;(w,t)(x,y)). Det bør da være klart at de to forekomstene av uttrykket "Tror" i denne definisjonen har forskjellig betydning.

Helt tilsvarende definisjoner kan gis i forbindelse med de andre predikatene i figuren ovenfor. "Husk" betegner derfor relasjonen Mg(<w,t,x,y>: Husk;(w,t)(x,y)), dvs. vi setter: Husk = Mg(<w,t,x,y>: Husk;(w,t)(x,y)). Gitt dette vil vi i det følgende arbeide med de seks relasjonene Ser, Innse, Husk, Med, Vet og Tror.

Før vi går videre er det av en viss viktighet å notere at alle disse relasjonene er inkludert i IxTxPxU;f. (P er som man husker mengden av personer. U;f er mengden av alle finstrukturerte utsagn.) Dette følger fra de definisjonene vi ga ovenfor og aksiomet E1. Siden I, T, P og U;f er mengder og derfor eksisterer i det kumulative hierarki over mengden av urindivider følger det at også mengden IxTxPxU;f eksisterer. Vi har følgelig at
Ser, Innse, Husk, Vet, Tror Inkl IxTxPxU;f og at Med Inkl IxTxP^2xU;f.

§2 Tre viktige begreper: Tror°;(x,t)(y), Tror*;(x,t)(y) og η(Tror);(x,t)

La oss nå se på relasjonen Tror. Vi bruker denne som eksempel, men alt det vi ahr å si kan mutatis mutandis anvendes på relasjonene Ser, Innse, Husk, Med og Vet. Som vi så var Tror Inkl IxTxPxU;f. Med *utsagnsfeltet til relasjonen Tror med hensyn på w,t og x* forstår vi her mengden av alle de finstrukturerte utsagn y der vi har at <w,t,x,y>ê Tror. Utsagnsfeltet til relasjonen Tror er derfor som man ser en mengde med finstrukturerte utsagn.

Nå kan man ikke om Δ er en mengde med finstrukturerte utsagn uten videre snakke om konjunksjonen av to (eller flere) elementer i Δ eller om konjunksjonen av alle elementene i Δ. Det man derimot kan snakke om er snittet av de diverse sannhetsmengdene til de finstrukturerte utsagnene i Δ. Dette vil være en mengde med mulige verdener så sant Δ er ikke-tom. Er Δ tom vil imidlertid snittet av Δ være den universelle mengden og derfor ikke en mengde som er inkludert i mengden av mulige verdener I. Vi kan derfor, om Δ er en vilkårlig mengde med finstrukturerte utsagn, konkludere med at I∩ SN(Mg(μ;f(y): yêΔ)) alltid vil være en mengde med mulige verdener. Er nå Δ utsagnsfeltet til relasjonen Tror med hensyn på w,t,x vil derfor I∩ SN(Mg(μ;f(y): yêΔ)) representere snittet av alt det x tror er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w.

Anta nå at w er en mulig verden, y et utsagn og at sannhetsmengden til utsagnet y inkluderer I∩ SN(Mg(μ;f(y): yêΔ)) der Δ er utsagnsfeltet til relasjonen Tror med hensyn på w,t og x. Vi kan da si at utsagnet y er en logisk konsekvens av alle utsagnene i utsagnsfeltet til Tror med hensyn på w, t og x. Betrakter vi nå mengden av alle de mulige verdenene w der vi har at utsagnet y er en logisk konsekvens av alle utsagnene i utsagnsfeltet til Tror med hensyn på w, t og x vil denne mengden være sannhetsmengden til et utsagn. Dette vil være *utsagnet som sier at utsagnet y er en konsekvens av utsagnene i utsagnsfeltet til Tror med hensyn på x*

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

og t. Vi skal betegne dette utsagnet med "Tror°;(x,t)(y)". I lys av kommentarene ovenfor skulle det være klart at dette utsagnet kan defineres slik:

Definisjon 2.1 Tror°;(x,t)(y) = μ;-1(Mg(w: wêI & yêU &
I∩ SN(Mg(μ;f(y): <w,t,x,y>ê Tror)) Inkl μ(y)))

Man ser fra våre betraktninger ovenfor at man kan gi helt analoge definisjoner for de andre relasjonene vi har nevnt: Vet, Ser, Innse, Husk og Med. For eksempel får man en definisjon av Ser°;(x,t)(y) ved å erstatte uttrykket "Tror" overalt hvor det forekommer i Definisjon 2.1 med uttrykket "Ser". Definisjonen av Ser°;(x,t)(y) vil derfor se slik ut:

Definisjon 2.2 Ser°;(x,t)(y) = μ;-1(Mg(w: wêI & yêU &
I∩ SN(Mg(μ;f(y): <w,t,x,y>ê Ser)) Inkl μ(y)))

Det generelle mønsteret for en vilkårlig relasjon R Inkl IxTxPxU;f skulle også være klart, et vil si lett å iakta. Er R en slik relasjon vil Mg(y: <w,t,x,y>êR) være utsagnsfeltet til R med hensyn på w, t og x. Ser man så på mengden av muligeverdener w der

wê I∩ SN(Mg(μ;f(y): <w,t,x,y>ê R))

vil denne mengden representere et utsagn som kan karakteriseres som konjunksjonen av alle de finstrukturerte utsagn som inngår i utsagnsfeltet til R med hensyn på w, t og x. Videre har vi at

(1) wêI & yêU & I∩ SN(Mg(μ;f(y): <w,t,x,y>ê R)) Inkl μ(y)

innebærer at konjunksjonen av alle de finstrukturerte utsagnene i utsagnsfeltet til R med hensyn på w, x og t impliserer utsagnet y. Videre har vi at mengden av alle de w som oppfyller (1) representerer et utsagn som sier at utsagnet y er en logisk konsekvens av alle de finstrukturerte utsagn som inngår i utsagnsfeltet til R med hensyn på x,t. På samme måte som ovenfor betegner vi dette utsagnet med "R°;(x,t)(y)" og gir den følgende definisjon:

Definisjon 2.3 R°;(x,t)(y) = μ;-1(Mg(w: wêI & yêU &
I∩ SN(Mg(μ;f(y): <w,t,x,y>ê R)) Inkl μ(y)))

Man kan spørre seg selv om hvorfor vi har innført disse operasjonen Tror°, Vet °, osv. Grunnen er at disse begrepsdannelsene nærmest gir seg av seg selv om man er seriøst interessert i å analysere de grunnbegrepene vi har innført i den kunnskapsteorien vi har presentert. Det ville nærmest være et utslag av kriminell intellektuell dovenskap om man da ikke nærmere studerte egenskapene til disse operasjonene både individuelt og i sammenheng med hverandre. En tredje grunn til å studere dem er at egenskapene til f.eks. Vet°;(x,t) er helt analoge med dem til modaloperatoren i det modallogiske systemet T og når det gjelder Tror°;(x,t) er egenskapene analoge med modaloperatoren i systemet K. Dette gjør det interessant å drøfte hvorvidt vi har at ⊨ Vet°;(x,t)(y) => Vet°;(x,t)(Vet°;(x,t)(y)) og tilsvarende om man kan utlede på et rimelig grunnlag at ⊨ Tror°;(x,t)(y) => Tror°;(x,t)(Tror°;(x,t)(y)). Kan man dette - men vi finner det tvilsomt - vil i såfall Vet°;(x,t) være en S4-operator og Tror°;(x,t) være en KD4 operator om man antar at trosfeltet til en person er konsistent. Noe som åpenbart er en ganske tvilsom antagelse. I alle fall vil systemet som da resulterer ha ganske store likhetstrekk med det system for epistemisk og doxastisk logikk som Hintikka

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

legger frem i sin bok "Knowledge and Belief". Vi skal imidlertid kommentere disse forhold mer utførlig senere.

Tror°;(x,t) kan oppfattes som en funksjon som tilordner ethvert utsagn y utsagnet Tror°;(x,t)(y), med andre ord det utsagnet som sier at utsagnet y er en logisk konsekvens av alt det x tror ved tidspunktet t.

Vi kan imidlertid, og nå kommer vi til en ny begrepsdannelse, innføre en operasjon Tror*;(x,t). Denne operasjonen tilordner et utsagn y det *utsagnet som sier at utsagnet y er ekvivalent med et eller annet finstrukturert utsagn som x ved tidspunktet t tror beskriver noe som er tilfelle*.

La oss klargjøre: Anta w er en mulig verden og at y er et utsagn. Påstanden at utsagnet y er ekvivalent med et finstrukturert utsagn z som x ved tidspunktet t tror beskriver et foreliggende forhold kan da formaliseres slik:

(2) wêI & yêU & (Ez)(zêU;f & μ(y) = μ;f(z) & Tror;(w,t)(x,z))

Merk at når vi sier at et utsagn y og et finstrukturert utsagn z er ekvivalente mener vi at sannhetsmengden til y , ie μ(y), er identisk med sannhetsmengden til z som er μ;f(z).

Betrakter vi nå mengden av alle de verdener w som oppfyller kravet (2) har vi at denne mengden, om vi akkurat her kaller den a, representerer et utsagn, nemlig utsagnet μ;-1(a). Det er dette utsagnet vi betegner med "Tror*;(x,t)(y)". Dette innebærer at vi kan definere dette uttrykket slik:

Definisjon 2.4 Tror*;(x,t)(y) = μ;-1(Mg(w: wêI & yêU &
(Ez)(zêU;f & μ(y)=μ;f(z) & <w,t,x,z>ê Tror)))

Man ser her, på samme måte som i forbindelsee med Tror°;(x,t)(y), at man kan erstatte de to forekomstene av "Tror" i Definisjon 2.4 med henholdsvis "Ser", "Vet", Innse", "Husk" og også "Med" (med visse opplagte modifikasjoner). Setter man for eksempel inn "Innse" for de to forekomstene av "Tror" i definsjonen ovenfor får man:

Definisjon 2.5 Innse*;(x,t)(y) = μ;-1(Mg(w: wêI & yêU &
(Ez)(zêU;f & μ(y)=μ;f(z) & <w,t,x,z>ê Innse)))

Innse*;(x,t)(y) er derfor *det utsagnet som sier at utsagnet y er ekvivalent med et eller annet finstrukturert utsagn som beskriver et forhold som x ved tidspunktet t innser at foreligger*.

I analogi med det vi gjorde i forbindelse med Tror°;(x,t) kan vi nå også gi en mer generell definisjon av R*;(x,t)(y) om R Inkl IxTxPxU;f. Som man umiddelbart ser fra Definisjon 4 og Definisjon 5 vil den generelle definisjonen av operasjonen R*;(x,t) være denne:

Definisjon 2.6 R*;(x,t)(y) = μ;-1(Mg(w: wêI & yêU &
(Ez)(zêU;f & μ(y)=μ;f(z) & <w,t,x,z>ê R)))

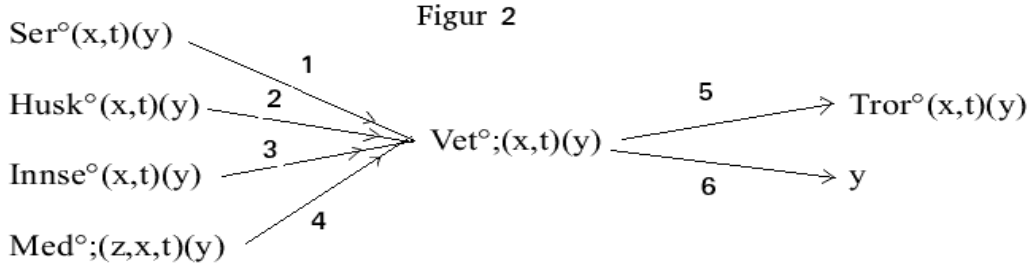
Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

såsant relasjonen R Inkl IxTxPxU;f. Uttrykket "R*;(x,t)(y)" kan leses slik: "Utsagnet som sier at utsagnet y er ekvivalent med et finstrukturert utsagn i utsagnsfeltet til relasjonen R med hensyn på x og t"

Når det gjelder disse operasjonene Tror*, Vet*, Innse*, R* osv. som vi nå har innført kan vi si det samme som i forbindelse med Tror°, Vet°, Innse°, R° osv. : Disse operasjonene gir seg nærmest av seg selv om man tar den rammen vi har satt opp, mer nøyaktig den kunnskapsteorien vi har eksplisitt formulert, alvorlig. Og ønsker man å utvikle denne teorien i dybden er det umulig at man ikke klargjør hva som følger fra denne teoriens grunnsetninger sammen med disse definisjonene vi nå har gitt. Dette behøver selvfølgelig ikke resultere i noen epokegjørende nye innsikter, men allminnelig intellektuell redelighet tilsier at man gjør det.

Det kan på dette punkt være nyttig å sammenfatte det vi har skrevet i to diagrammer. Det første er dette:

Figur 2

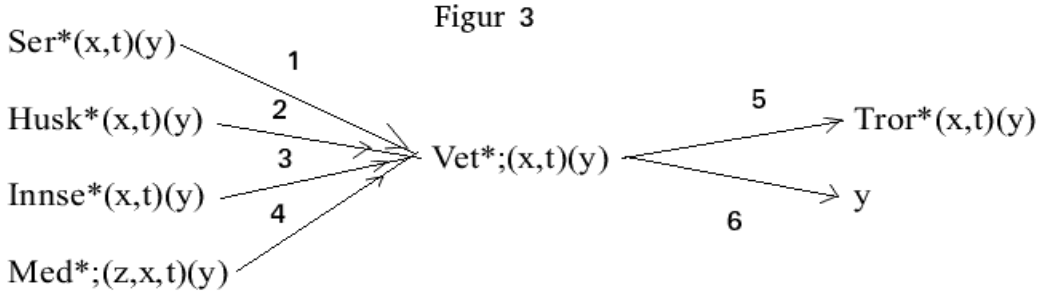


Det må bemerkes at pilene i figuren må tolkes som implikasjoner, dvs. at for eksempel pilen merket med "1" betyr at utsagnet Ser°;(x,t)(y) impliserer utsagnet Vet°;(x,t)(y), med andre ord at vi har ⊨ Ser°;(x,t)(y) => Vet°;(x,t)(y). Tilsvarende betyr pilen merket med "5" at utsagnet Vet°;(x,t)(y) impliserer utsagnet Tror°;(x,t)(y), med andre ord at følgende gjelder:

⊨ Vet°;(x,t)(y) => Tror°;(x,t)(y).

Dette gjelder også den følgende figur som sammenfatter hovedrelasjonene mellom de diverse operasjonene av typen Tror*;(x,t)(y):

Figur 3



Vi altså at implikasjonspilen merket "5" reflekterer at ⊨ Vet*;(x,t)(y) => Tror*;(x,t)(y). Med andre ord at utsagnet Vet*;(x,t)(y) impliserer utsagnet Tror*;(x,t)(y). Tilsvarende for de andre pilene. For eksempel innebærer pilen merket "3" at utsagnet Innse*;(x,t)(y) impliserer utsagnet Vet*;(x,t)(y), dvs. at ⊨ Innse*;(x,t)(y) => Vet*;(x,t)(y).

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

La oss bemerke følgende: Operatorene av typen R*;(x,t)(y) er i en viss forstand mindre "logisk produktive" en operatorene vi nevnte av typen R°;(x,t)(y). Det man i hovedsak kan vise er teoremer av typen ⊨ R*;(x,t)(y) <=> R*;(x,t)(z) dersom ⊨ y <=> z. De diverse operatorene i familien R*;(x,t) der R Inkl IxTxPxU;f har derfor en strukturell likhet med modaloperatoren i det meget svake modalsystemet som av og til går under navnet E.[54]

Det bør understrekes at de implikasjonsforholdene som er anskueliggjort i Figur 2 og 3 ikke er direkte opplagte, men de representerer påstander som kan bevises ved hjelp av aksiomene i den kunnskapsteorien vi har satt opp og ved hjelp av de definisjonene vi har gitt ovenfor. Vi vil gi bevis, i den utstrekning det er nødvendig, for disse påstandene senere.

La oss nå gå over til det siste begrepet som vi vil introdusere i denne innledningen.

Som man husker fra tidligere kalte vi en mengde med finstrukturerte utsagn Δ for *rasjonelt organisert* dersom og bare dersom den (a) var strengt deduktivt lukket, dvs. er Γ en vilkårlig ikke-tom delmengde av Δ og z et finstrukturert utsagn og har man at I∩Mg(μ;f(x): xêΓ) Inkl μ;f(z) så er også zêΔ, (b) den var lukket under endelig konjunksjon, (c) den var konsistent og (d) den inneholdt ethvert finstrukturert utsagn som er sant i alle mulige verdener.

La oss nå, som et eksempel, se på relasjonen Tror Inkl IxTxPxU;f. Utsagnsfeltet til denne relasjonen med hensyn på x,t i verdenen w er naturligvis, slik vi definerte det tidligere, Mg(y: yêU;f & <w,t,x,y>êTror). Denne mengden er naturligvis, i lys av definisjonen av relasjonen Tror identisk med mengden Mg(y: yêU;f & Tror;(w,t)(x,y)). La oss nå se på den påstand at utsagnsfeltet til relasjonen Tror med hensyn på x,t i verdenen w er rasjonelt organisert. Denne påstanden kan formaliseres slik:

(3) Rasj;f(Mg(y: yêU;f & <w,t,x,y>êTror))

Merk at "Rasj;f(Δ)" betyr at Δ er en mengde med finstrukturerte utsagn som er rasjonelt organisert. Selve utsagnet som sier at utsagnsfeltet til relasjonen Tror med hensyn på x,t er rasjonelt organisert, vi skal betegne det med "η(Tror);(x,t)", vil da være definert slik:

Definisjon 2.7 η(Tror);(x,t) = μ;-1(Mg(w: wêI & Rasj;f(Mg(y: yêU;f & <w,t,x,y>êTror))))

På nøyaktig samme måte kan man definere η(X);(x,t) om X er en av relasjonene vi har betraktet tidligere: Ser, Innse, Husk, Vet og Med. (Den siste relasjonen krever visse opplagte modifikasjoner i definisjonen ovenfor.) For å ta et eksempel er den påstanden at utsagnsfeltet til relasjonen Ser med hensyn på x,t er rasjonelt organisert, ie η(Ser);(x,t) , definert slik:

Definisjon 2.8 η(Ser);(x,t) = μ;-1(Mg(w: wêI & Rasj;f(Mg(y: yêU;f & <w,t,x,y>êSer))))

54 Dette er det modallogiske systemet der språket er språket for setningslogikk utvidet med modaloperatoren Nec. Aksiomene er et vanlig sett av aksiomer for setningslogikk og slutningsreglene er modus ponens samt slutningsregelen: |- α ↔ β → |- Nec(α) ↔ Nec(β).

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

La oss nå se på det generelle tilfelle hvor R er en vilkårlig relasjon inkludert i IxTxPxU;f. Da har man at Mg(y:yêU;f & <w,t,x,y>êR) er utsagnsfeltet til R med hensyn på x,t relativt til verdenen w. Videre har man at

Rasj;f(Mg(y:yêU;f & <w,t,x,y>êR))

innebærer at utsagnsfeltet til R med hensyn på x,t relativt til w er en rasjonalet organisert mengde av finstrukturerte utsagn. Utsagnet som sier at utsagnsfeltet til R med hensyn på x,t er rasjonelt organisert, ie η(R);(x,t) kan derfor defineres slik:

Definisjon 2.9 Anta R Inkl IxTxPxU;f. Da setter vi:

η(R);(x,t) = μ;-1(Mg(w: wêI &
Rasj;f(Mg(y: yêU;f & <w,t,x,y>êR))))

Selvfølgelig får man definisjonene ovenfor, Definisjon 2.7 og Definisjon 2.8 om man i denne definisjonen setter inn "Tror" og "Ser" for alle forekomster av "R".

Det å anta at en persons trosfelt ved et gitt tidspunkt er rasjonelt organisert, dvs. utgjør en konsistent, deduktivt lukket mengde av utsagn er naturligvis en temmelig urealistisk antagelse. Enda mer urealistisk er det å anta at en person ved alle tidspunkter i sitt livsløp har et trosfelt som er rasjonelt organisert. Man kan trygt påstå at slike personer ikke finnes. Egenskapen, eller begrepet, om å være en person med et rasjonelt organisert trosfelt kan man derfor karakterisere som en idéell egenskap, og de ikke-eksisterende, tenkte, personer som har denne egenskap kan med rette kalles fiksjoner. På samme måte som en matematisk kule i en viss forstand er en ideell størrelse fordi man med fysiske midler bare kan realisere noe som i større eller mindre grad approksimerer den, på samme måte kunne man si at det forholder seg med idealbilde av en person med rasjonelt organisert trosfelt i vår forstand.

I den virkelige og høyest ufullkomne verden vi lever har ingen person fullkommen oversikt over alle de utsagn som følger fra dem han tror på. Men man kan likevel tenke seg personer som i meget større grad enn andre meget raskt ser dyptliggende konsekvenser av de påstander de tror og derfor kommer nærmere idealet av en person med et fullkomment rasjonelt organisert trosfelt. Fra det at ingen levende person har noe fullkomment rasjonelt trosfelt kan man ikke slutte at antagelsen om rasjonelt organiserte trosfelt ikke har meget interessante konsekvenser fra en logisk synsvinkel. Man kan like lite slutte dette som man fra det at en matematisk kule ikke kan fysisk realiseres kan slutte at man ikke kan vise at slike kuler har meget interessante matematiske og geometriske egenskaper.

Nøyaktig de samme overveielsene kan gjøres i forbindelse med en persons kunnskapsfelt og forøvrig de andre relasjonene vi har studert og definert i denne paragrafen, for eksempel, Ser, Husk, Innse og Med.

På dette punkt finner vi det hensiktsmessig å innskyte noen bemerkninger. Det følger deter viktig å gjøre oppmerksom på følgende: Er Δ en mengde med finstrukturerte utsagn innebærer det at Rasj;f(Δ) at utsagnsmengden Δ er rasjonelt organisert *i den betydning vi gjorde rede for i avsnittet om deduktivt lukkede utsagnsmengder og relaterte begreper i Del I.* Er nå imidlertid Δ en utsagnsmengde, og ikke en mengde med finstrukturerte utsagn, har vi også i det nevnte

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

avsnitt i Del I definert hva som vi mener med at en slik mengde er rasjonelt organisert. Rasj(Δ) impliserer at Δ er en en mengde med utsagn og at den er rasjonelt organisert. Det skulle derfor være åpenbart at når det gjelder Rasj og Rasj;f dreier det seg om to forskjellige begreper og som det fremgår av det som er skrevet i Del I at de er definert på forskjellig måte. De to begrepene må derfor holdes klart fra hverandre og selvfølgelig ikke blandes sammen.

Vi har overfor definert η(Tror);(x,t). (Tilsvarende for de andre relasjonene Ser, Vet osv.) Vi skal nå introdusere en relatert begrepsdannelse, nemlig η(Tror*);(x,t) som må holdes adskilt fra η(Tror);(x,t). La oss først minne om hvordan Tror* ble definert ovenfor:

$$\text{Tror*};(x,t)(y) = \mu;\text{-}1(\text{Mg}(w: w \hat{e} I \;\&\; y \hat{e} U \;\&\; (Ez)(z \hat{e} U;f \;\&\; \mu(y)=\mu;f(z) \;\&\; \langle w,t,x,z\rangle \hat{e}\ \text{Tror})))$$

Man ser, dersom man betrakter λ/yêU/(Tror*;(x,t)(y), at dette er en funksjon som avbilder U inn i U. (Den behøver selvfølgelig ikke å være *på* U). Nåvel. Anta wêI. Da vil mengden Mg(y: yêU & w ⊨ Tror*;(x,t)(y)) være mengden av alle de utsagn som er ekvivalente med et eller annet finstrukturert utsagn som x ved tidspunktet t tror i verdenen w. Dette er, som man ser, en utsagnsmengde. Man kan nå tenke seg en verden w der vi har at denne utsagnsmengden Mg(y: yêU & w ⊨ Tror*;(x,t)(y)) er rasjonelt organisert, mao. at

(4) Rasj(Mg(y: yêU & w ⊨ Tror*;(x,t)(y)))

Selve utsagnet som er sant i nøyaktig de og bare de verdenene w som oppfyller (4) betegner vi med η(Tror*);(x,t). Vi kan definere dette slik:

Definisjon 2.10 $\eta(\text{Tror*});(x,t) = \mu;\text{-}1(\text{Mg}(w: w \hat{e} I \;\&\; \text{Rasj}(\text{Mg}(y: y \hat{e} U \;\&\; w \models \text{Tror*};(x,t)(y))))$

Man ser at denne definisjonen er vidt forskjellig fra Definisjon 2.7 og derfor at disse to begrepene η(Tror);(x,t) og η(Tror*);(x,t) ikke bør blandes sammen. η(Tror);(x,t) sier at trosfeltet til x ved tidspunktet t er en rasjonelt organisert mengde av finstrukturerte utsagn. η(Tror*);(x,t) sier derimot at mengden av alle de utsagn som er ekvivalente med et eller annet finstrukturert utsagn som x ved tidspunktet t tror er en rasjonelt organisert utsagnsmengde.

Når det gjelder alle de andre relasjonene vi har nevnt, som Ser, Innse, Husk etc. kan definisjoner som er helt analoge med Definisjon 10 også gis for dem.

Selvom ingen persons trosfelt er rasjonelt organisert i den betydningen vi har definert ved Definisjon 2.7 kan det likevel være av interesse å undersøke mer systematisk hva som følger fra en slik antagelse, på samme måte som det er ev den største interesse å studere en kules rent matematiske egenskaper til tross for at den matematiske kule ikke eksisterer i materialisert form i den virkelige verden.

Vi skal senere (i §4) gjøre utførlig rede for de lover som gjelder for operasjonen η(Tror);(x,t) og de relaterte operasjonen man får når man erstatter Tror med noen av relasjonene Vet, Ser, Husk etc. Her skal vi bare nevne to prinsipper. Det første sier at dersom α er et logisk nødvendig utsagn og trosfeltet til x ved t er rasjonelt organisert så vil utsagnet α være ekvivalent med et finstrukturert utsagn som x tror ved tidspunktet t. I symboler kan dette uttrykkes slik:

(5) $\models \alpha \rightarrow \models \eta(\text{Tror});(x,t) \Rightarrow \text{Tror*};(x,t)(\alpha)$

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Det andre prinsippet sier sier at dersom trosfeltet til x ved tidspunktet t er rasjonelt organisert og utsagnene α og α=>β er ekvivalente med finstrukturerte utsagn som x tror ved t så er også β et utsagn som er ekvivalent med et finstrukturert utsagn som x tror ved t. Igjen kan dette uttrykkes presist i symboler på følgende vis:

(6) $\models \eta(\text{Tror});(x,t) =>. \text{Tror}^*;(x,t)(\alpha=>\beta) => (\text{Tror}^*;(x,t)(\alpha)=>\text{Tror}^*;(x,t)(\beta))$

Det bør bemerkes at vi i forbindelse med (5) og (6) forutsetter at α,β er utsagn, det vil si at α,βêU. Det skulle være mulig å se fra setningene (5) og (6) at Tror*;(x,t) oppfører seg som en slags K-operator[55] om man forutsetter at η(Tror);(x,t), ie. at trosfeltet til x ved tidspunktet t er det vi kaller rasjonelt organisert

Det er nødvendig å nevne en tredje sats her. Man har dersom η(Tror);(x,t) at trosfeltet til x ved tidspunktet t er en rasjonelt organisert. Men dette innebærer at dette trosfelt er konsistent. Med andre ord kan man ikke da ha at x ved tidspunktet t både tror på en påstand og samtidig ikke tror på den. Dette er reflektert i den følgende sats:

(7) $\models \eta(\text{Tror});(x,t) => \neg\, \text{Tror}^*;(x,t)(\alpha\Omega\, \neg\alpha)$

Vi skal på et senere stadium, i §4 gi detaljerte bevis for disse tre setningene.

I det følgende skal vi i §2.1 - 2.3 ta for oss operasjonen Tror°;(x,t) og belyse i første omgang de helt grunnleggende egenskapene som denne operasjonen har, dernest vil vi i §2.2 se på en rekke elementære satser som gjelder for denne operasjonen. Vi skal kalle disse for elementærteoremene for Tror°;(x,t). Dernest vil vi i §2.3 studere en rekke satser som kan vises når man itererer operasjoner som Tror°;(x,t), Vet°;(x,t) osv. , med andre ord vil vi bevise satser som gjelder for slike itererte operasjoner som f.eks. λ/yêU/(Tror°;(x,t)(Vet°;(x,t)(y))).

I §3 studerer vi de grunnleggende egenskapene til operasjonen Tror*;(x,t) og endelig studerer vi i §4 og i denne paragrafens underparagrafer egenskapene til η(Tror);(x,t) og de beslektete utsagn η(Vet);(x,t) etc. Her starter vi i §4.1 med å studere noen viktige satser om forholdet mellom η(Tror);(x,t) og η(Tror*);(x,t). I §4.2 innfører vi begrepet ' betinget modalfunksjon' og viser noen grunnleggende satser om denne typen strukturer. Vi viser også at <η(Tror*);(x,t), Tror*;(x,t)> er en betinget modalfunksjon. I §4.3 viser vi en rekke generelle elementære satser som gjelder for betingede modalfunksjoner og viser hvordan disse satsene kan anvendes på operasjoner som Vet*;(x,t), Tror*;(x,t) osv. I denne paragrafen innfører vi også begrepet ' svakt betinget modalfunksjon' og viser hva slags type satser som gjelder for denne type strukturer og hvordan de kan anvendes på operasjonenene Vet*;(x,t), Tror*;(x,t) osv. I §4.4 beviser vi en rekke generelle teoremer om iterasjon av de epistemiske operasjonene vi har innført. I §5 beskriver vi en utvidelse av det begrepet om en standard begrepsramme som vi innført i Del II. Vi viser så hvordan man innenfor en utvidet standard begrepsramme kan vise teoremer som er helt analoge med dem vi har bevist i §2,§3 og §4 og

55 Modalsystemet K er det modalsystem der språket er språket for setningslogikk utvidet med den unære operasjonen Nec. Aksiomene i systemet er et vanlig sett av aksiomer for setningslogikken pluss aksiomet (+) Nec(α→β) → Nec(α) → Nec(β). Slutningsregler i systemet er modus ponens og såkalt "modal generalisering", dvs. regelen (++) |- α → |- Nec(α). Man ser at (++) i en viss forstand svarer til (5) ovenfor og at (+) svarer til (6).

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

disse paragrafenes underparagrafer. §6 inneholder en oppsummering, konklusjon og vurdering av det vi har gjort i denne tredje delen av vårt arbeid.

§ 2.1 Relasjonen mellom Tror og Tror°. Det tomme og det kontradiktoriske trosfelt.

Vi skal i dette avsnittet først bevise en sats som viser hvordan relasjonen Tror er relatert til operasjonen Tror°;(x,t). Dernest skal vi se på hva man kan slutte når trodfeltet til en person er tomt og hva som er tilfelle når det er kontradiktorisk og hvilken betydning dette har for utsagn av typen Tror°;(x,t).

Vi skal først vise den følgende sats som relaterer Tror til Tror°;(x,t). Vi har:

Teorem 2.1.1. Anta <w,t>ê IxT, xêP og at yêU;f. Da har man:
Tror;(w,t)(x,y) → w ⊨ Tror°;(x,t)(μ;-1(μ;f(y)))

Bevis: Anta forutsetningene holder. Anta (1) Tror;(w,t)(x,y). I lys av definisjonen av Tror° og definisjonen av relasjonen Tror vil det være tilstrekkelig å vise:

(2) I∩ SN(Mg(μ;f(y): Tror;(w,t)(x,y))) Inkl μ;f(y)

Anta derfor for vilkårlig w' at (3) w'ê I∩ SN(Mg(μ;f(y): Tror;(w,t)(x,y))). Det følger at at

(4.1) w'êI og

(4.2) w'ê SN(Mg(μ;f(y): Tror;(w,t)(x,y))

Fra det siste følger: (5) (Ay)(Tror;(w,t)(x,y) → w'êμ;f(y)). Men fra dette og (1) følger åpenbart w' êμ;f(y). Siden w' var vilkårlig objekt slik at (3) følger det at (2) holder. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Satsen ovenfor sier strengt tatt ikke noe annet enn at dersom y er et finstrukturert utsagn som x tror (ved tidspunktet t i verdenen w) så er utsagnet hvis sannhetsmengde er μ;f(y) en konsekvens av alt det y tror. Satsen viser naturligvis at det er en sammenheng mellom Tror og Tror°. Det bør imidlertid bemerkes at den omvende sats ikke holder. Fra det at w ⊨ Tror°;(x,t)(μ;-1(μ;f(y))) kan man ikke slutte: Tror;(w,t)(x,y).

Det er to muligheter når det gjelder trosfeltet til en person. (a) Det kan være tomt, dvs. det finnes ikke noen finstrukturerte utsagn som personen tror. (b) Det kan være ikke-tomt. I det siste tilfelle er det igjen to muligheter. Mengden av alle de finstrukturerte person tror kan utgjøre en konsistent mengde med finstrukturerte utsagn, eller så kan denne mengden være inkonsistent.

Vi skal først se på det tilfelle at trosfeltet til x er tomt. I denne forbindelse kan det noteres at den følgende sats holder:

Teorem 2.1.2 Anta <w,t>êIxT og xêP. Da har vi:

(a) ¬(Ey)Tror;(w,t)(x,y) . → w ⊨ Tror°;(x,t)(μ;-1(I))

(b) ¬(Ey)Tror;(w,t)(x,y) . → Mg(y: w ⊨Tror°;(x,t)(y)) = {μ;-1(I)}

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Man ser at punkt (a) i denne satsen sier at dersom trosfeltet til x er tomt så er det slik at det tautologiske utsagn er en konsekvens av alt det x tror. Punkt (b) sier at om trosfeltet til x er tomt så finnes det ett og bare ett utsagn som er en logisk konsekvens av alt det x tror og dette er det tautologiske utsagn, dvs. utsagnet μ;-1(I).

La oss gi et bevis for denne påstanden:

Bevis: *Ad (a)*: Anta forutsetningene holder og at (1) ¬Tror;(w,t)(x,y). Da følger:

(2) Mg(y: Tror;(w,t)(x,y)) = ø. Da har vi at

(3) ∩Mg(y: Tror;(w,t)(x,y)) = V = Mg(x:x=x)

Men fra dette følger (4) I∩Mg(y: Tror;(w,t)(x,y)) =I. Fra dette i sin tur kan vi ved hjelp av definisjonen av Tror° slutte at w ⊨ Tror°;(x,t)(μ;-1(I)). Dette viser at punkt (a) holder.

Ad (b): Anta fremdeles at (1) ovenfor holder. Anta for vilkårlig z at w ⊨Tror°;(x,t)(z). Da har vi i lys av definisjonen av Tror° at

I∩Mg(y: Tror;(w,t)(x,y)) inkl μ(z). Men da må vi i lys av (4) ha I Inkl μ(z) og derfor at μ(z) =I . Herav følger zê{μ;-1(I)}. Dette viser at inklusjonen mot høyre i konsekventen i punkt (b) holder. Anta på den annen side at zê{μ;-1(I)} Da følger z=μ;-1(I) og derfor μ(z)=I. Fra dette og (4) kan man slutte I∩Mg(y: Tror;(w,t)(x,y)) Inkl μ(z) og herav ved hjelp av Definisjon 2.1 at w ⊨ Tror°;(x,t)(z), med andre ord at zêMg(y: w ⊨Tror°;(x,t)(y)). Dette viser at også inklusjonen den andre veien holder. Vi har dermed vist at (b) holder og følgelig gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Man kan spørre om kondisjonalen den andre veien i punkt (b) i teoremet ovenfor holder. Det er mulig å vise at dette ikke er tilfelle. Derimot holder den følgende sats:

Teorem 2.1.3 Anta <w,t,x>êIxTxP. Da har man:

Mg(y: w ⊨Tror°;(x,t)(y)) = {μ;-1(I)} & ¬(Ez)(Tror;(w,t)(x,z) &μ;f(z)=I).
→ ¬(Ey)(Tror;(w,t)(x,y))

Bevis: Anta:

(1) Mg(y: w ⊨Tror°;(x,t)(y)) = {μ;-1(I)} og

(2) ¬(Ez)(Tror;(w,t)(x,z) &μ;f(z)=I)

Anta nå for reduktio ad absurdum at (3) (Ey)(Tror;(w,t)(x,y)). Fra (3) følger at det må finnes noe y;0 êU;f der vi har : (4) Tror;(w,t)(x,y;0). Fra dette og (2) følger μ;f(y;0)≠ I. Siden μ;f(y0) Inkl I følger (5) μ;f(y;0) SInkl I.

Nå kan man imidlertid fra (4) ved hjelp av Teorem 2.1.1 slutte :

(6) w ⊨ Tror°;(x,t)(μ;-1(μ;f(y;0)))

Men da har man ved hjelp av (1) at μ;-1(μ;f(y;0)) =μ;-1(I). Herav følger så (siden μ er en-entydig) at μ;f(y;0)=I. Men dette strider åpenbart mot (5) andre ord. Vi har derfor at (3) ikke holder, med andre ord at ¬(Ey)(Tror;(w,t)(x,y)). **QED**.

Siden det er åpenbart at ¬ (Ey)(Tror;(w,t)(x,y)) impliserer ¬(Ez)(Tror;(w,t)(x,z) &μ;f(z)=I) har vi at det følgende teorem følger fra Teorem 2.1.2 og Teorem 2.1.3:

Teorem 2.1.4 Anta <w,t,x>êIxTxP. Da gjelder:

[Mg(y: w ⊨Tror°;(x,t)(y)) = {μ;-1(I)} & ¬(Ez)(Tror;(w,t)(x,z) &μ;f(z)=I)]
↔ ¬(Ey)(Tror;(w,t)(x,y))

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Dette er av en viss interesse siden det gir en en nødvendig og tilstrekkelig betingelse for at trosfeltet til en person ved et gitt tidspunkt t i verdenen w er tomt.

Vi har nå sett på hva som følger om trosfeltet til en person er tomt og hvilke konsekvenser dette har for operasjonen Tror°. La oss nå forutsette at trosfeltet til x ved t i verdenen w er ikke-tomt men at det er inkonsistent. Dette innebærer at vi må definere nærmere hva som menes med at en mengde av finstrukturerte utsagn er konsistent. Det gir seg nærmest av seg selv: Er Δ en mengde med finstrukturerte utsagn er Δ konsistent hvis og bare hvis det finnes en mulig verden der alle de finstrukturerte utsagnene i Δ er sanne. Bruker vi "Cons;f(Δ)" som forkortelse for "Δ er en konsistent mengde med finstrukturerte utsagn" kan definisjonen formaliseres på følgende vis:

Definisjon 2.1.1 Anta Δ Inkl U;f. Da setter vi:
Cons;f(Δ) ↔ (Ew)(wêI & (Ax)(xêΔ → wêμ;f(x)))

Man kan nå vise den følgende sats som sier at dersom en person tror noe så er trosfeltet til denne personen inkonsistent hvis og bare hvis ethvert utsagn er en logisk konsekvens av alt det denne personen tror. Satsen kan mer formelt formuleres slik:

Teorem 2.1.5 Anta <w,t,x>êIxTxP og at (Ey)Tror;(w,t)(x,y). Da gjelder:
¬Cons;f(Mg(y: Tror;(w,t)(x,y))). ↔ Mg(y: w ⊨Tror°;(x,t)(y)) = U

Bevis: Vi beviser først kondisjonalen mot høyre. Anta (1) (Ey)Tror;(w,t)(x,y) og anta (2) ¬Cons;f(Mg(y: Tror;(w,t)(x,y))). Fra (2) og Definisjon 2.1.1 følger at
(3) ¬(Ew)(wêI & (Ay)(Tror;(w,t)(x,y) → wêμ;f(y)))
Dette innebærer: (4) ∩Mg(μ;f(y): Tror;(w,t)(x,y)) =ø og derfor at
(5) I∩Mg(μ;f(y): Tror;(w,t)(x,y)) =ø
La nå yêU være et vilkårlig utsagn. Anta w ⊨ Tror°;(w,t)(x,y). Da følger ved hjelp av Definisjon 2.1 at (6) wêI & yêU & I∩ SN(Mg(μ;f(y): Tror;(w,t)(x,y))) Inkl μ(y)
Fra dette følger umiddelbart yêU. Anta på den annen side at yêU. Da følger det fra (5) at (6) holder og derfor ved hjelp av Definisjon 2.1 at w ⊨ Tror°;(w,t)(x,y). Det følger at Mg(y: w ⊨Tror°;(x,t)(y)) = U. Dette at kondisjonalen mot høyre i teoremet holder.

La oss så vise at kondisjonalen mot venstre holder. Anta
(7) Cons;f(Mg(y: Tror;(w,t)(x,y))). Vi ønsker å vise:
(+) Mg(y: w ⊨Tror°;(x,t)(y)) ≠ U Fra (7) og definisjonen av Cons;f følger:
(8) I∩Mg(μ;f(y): Tror;(w,t)(x,y)) ≠ø
Nå har vi μ;-1(ø)êU. Men i lys (8) er det åpenbart at
(9) ¬[I∩Mg(μ;f(y): Tror;(w,t)(x,y) Inkl μ(μ;-1(ø))] Fra dette og Definisjon 2.1 følger ¬[μ;-1(ø)êMg(y: w ⊨Tror°;(x,t)(y))] Siden μ;-1(ø)êU følger at (+) holder. Med dette har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

La oss bemerke før vi går videre at i alle teoremene 2.1.1 -2.1.5 kan man substituere relasjonen Tror med en hvilken som helst av de andre relasjonene vi har nevnt, nemlig Ser, Innse, Husk,Vet og, med visse modifikasjoner Med. Teoremene vedblir å være gyldige. Av

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

de relasjonene vi har nevnt er det imidlertid bare ved relasjonen tror at utsagnsfeltet kan være inkonsistent. Det er derfor bare i dette tilfellet at Teorem 2.1.5 egentlig har noen interesse.[56]

Vi kommer nå til beviset for de implikasjonene vi anskueliggjorde i Figur 2 i §2. Fra figuren ser man at man må bevise at det fRasj(Mg(y: yêU & w ╞ Tror*;(x,t)(y))ølgende teorem holder:

Teorem 2.1.6 Anta yêU og <x,t>êPxT & zêP. Da har man

(a) ╞ Ser°;(x,t)(y) => Vet°;(x,t)(y)
(b) ╞ Innse°;(x,t)(y) => Vet°;(x,t)(y)
(c) ╞ Husk°;(x,t)(y) => Vet°;(x,t)(y)
(d) ╞ Med°;(z,x,t)(y) => Vet°;(x,t)(y)
(e) ╞ Vet°;(x,t)(y) => Tror°;(x,t)(y)
(f) ╞ Vet°;(x,t)(y) => y
(g) ╞ Ser°;(x,t)(y) => Innse°;(x,t)(y)
(h) ╞ Husk°;(x,t)(y) => Innse°;(x,t)(y)

Bevis: Beviset er egentlig temmelig enkelt. Vi gir imidlertid bare bevis for punkt (a) og overlater de resterende punktene til den energiske leser.

Ad (a): Anta (1) w ╞ Ser°;(x,t)(y) for vilkårlig wêI. Det vil være tilstrekkelig å vise (+) w ╞ Vet°;(x,t)(y). Fra (1) og definisjonen av Ser° følger:

(2) wêI & yêU & I∩ SN(Mg(μ;f(y): Ser;(w,t)(x,y))) Inkl μ(y)

Nå har vi ifølge aksiom E3 (Se Del II) at

(3) Ser;(w,t)(x,y) → Vet;(w,t)(x,y)

Det følger fra dette at (4) Mg(μ;f(y): Ser;(w,t)(x,y)) Inkl Mg(μ;f(y): Vet;(w,t)(x,y))

Fra dette følger i sin tur:

(5) SN(Mg(μ;f(y): Vet;(w,t)(x,y))) Inkl SN(Mg(μ;f(y): Ser;(w,t)(x,y)))

Herav: (6) I∩SN(Mg(μ;f(y): Vet;(w,t)(x,y))) Inkl I∩SN(Mg(μ;f(y): Ser;(w,t)(x,y)))

Men fra (2) og (6) følger:

(7) wêI & yêU & I∩SN(Mg(μ;f(y): Vet;(w,t)(x,y))) Inkl μ(y)

Men dette innebærer ved hjelp av definisjonen av Vet° at w ╞ Vet°;(x,t)(y).

Når det gjelder punkt (b) - (h) bevises disse på nøyaktig samme måte. Men man må henvise til andre aksiomer. For eksempel når det gjelder (c) må man benytte aksiomet Husk;(w,t)(x,y) → Vet;(w,t)(x,y). **QED**.

Vi skal nå innføre en alternativ-relasjon i forbindelse med relasjonen Tror og, som det etterhvert vil fremgå, i forbindelse med de andre relasjonene vi hat nevnt, ie Vet, Ser etc. Før

56 Spørsmålet om inkonsistente trosfelt, ie. personer hvor personens samlede trosfelt, virkelighetsbilde, rommer utsagn som motsier hverandre er naturligvis ytterst interessant. Forklaringen kan i noen sammenhenger sikkert være ganske prosaisk. Personen kan operere med en teori som inneholder så mange påstander at det er vanskelig å holde helt styr på dem og kan ved en feiltagelse ha glemt en av påstandene og plutselig erstattet den med en som ligner men som faktisk er komplett uforenelig. Vedkommende kan så fortsette med å arbeide med systemet som om ingenting var galt. Dette kan pågå lenge såsant de deler av systemet han arbeider med ikke involverer de påstandene som motsier hverandre. Men på et visst punkt, kanskje etter lengere tid, kan så vedkommende oppdage at noe ikke stemmer og kan ha sitt fulle hyre med å finne ut hvorfor det ikke stemmer, før han tilslutt ser hvor feilen ligger. Det er mindre sannsynlig at man motsier seg selv om den teorien man arbeider med er temmelig oversiktlig. Dog kan man lure på hvorfor Frege ikke greide å se motsigelsen i sitt eget system før Russel pekte på den.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

vi gjør dette finner vi det først hensiktsmessig å forklare hva vi mener med at *en verden w' er logisk sett kompatibel med alt individet x tror er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w*. Vi sier at dette er tilfelle dersom og bare dersom ethvert finstrukturert utsagn y som x ved tidspunktet t tror i verdenen w er sant i verdenen w'. Med andre ord er w' en verden som er man har:
med alt det x tror ved tidspunktet t i verdenen w hvis og hvis man har:

(1) $w'\hat{e}I \;\&\; (Ay)(Tror;(w,t)(x,y) \rightarrow w'\hat{e}\mu;f(y))$

Man ser at betingelsen (1) er ekvivalent med:

(2) $w'\hat{e}\; I\cap SN(Mg(\mu;f(y) : Tror;(w,t)(x,y)))$

Den alternativrelasjonen vi derfor vil betrakte i forbindelse med Tror er derfor:

$Mg(<w,w'> : w'\hat{e}\; I\cap SN(Mg(\mu;f(y) : Tror;(w,t)(x,y))))$

Vi betegner denne med "r(Tror);(x,t)", siden den er bestemt av parameterene Tror, x og t. Vi gir den følgende definisjon:

Definisjon 2.1.2

$r(Tror);(x,t) = Mg(<w,w'> : w'\hat{e}\; I\cap SN(Mg(\mu;f(y) : Tror;(w,t)(x,y))))$

Fra denne definisjonen ser man at $<w,w'>\hat{e}\; r(Tror);(x,t)$ hvis og bare hvis w' er en verden som er kompatibel med alt det x tror er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w. Vi bemerker at man kan erstatte begge forekomstene av uttrykket "Tror" i Definisjon 2.1.2 med de andre relasjonene vi har nevnt: "Vet", "Ser", "Husk", "Med", "Innse" etc. og få helt analoge definisjoner. Erstatter man f.eks. "Tror" med "Med" får man

$r(Med);(z,x,t) = Mg(<w,w'> : w'\hat{e}\; I\cap SN(Mg(\mu;f(y) : Med;(w,t)(z,x,y))))$

Man kan også gi den følgende generelle definisjon for alle R Inkl IxTxPxU;f:

Definisjon 2.1.3

$r(R);(x,t) = Mg(<w,w'> : w'\hat{e}\; I\cap SN(Mg(\mu;f(y) : <w,t,x,y>\hat{e}R)))$

Vi noterer det følgende korollar til Definisjon 2.1.2:

Teorem 2.1.7 Anta $<x,t>\hat{e}PxT \;\&\; w\hat{e}I$. Da har man:

$Mg(w': <w,w'>\hat{e}r(Tror);(x,t)) = I\cap SN(Mg(\mu;f(y) : Tror;(w,t)(x,y)))$

Bevis: Umiddelbar konsekvens av Definisjon2.1.2. **QED**.

Vi noterer også det følgende teorem som gir en alternativ karakteristikk av $SN(Mg(\mu;f(y) : Tror;(w,t)(x,y)))$. Satsen er den følgende:

Teorem 2.1.8 Anta $<x,t>\hat{e}PxT \;\&\; w\hat{e}I$. Da har man:

$I\cap SN(Mg(\mu;f(y) : Tror;(w,t)(x,y))) = \mu[SNu(Mg(y: y\hat{e}U \;\&\; (Ez)(z\hat{e}U;f \;\&\mu(y)=\mu;f(z) \;\&\; Tror;(w,t)(x,z))))]$

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Bevis: Vi minner om at SNu(Δ), der Δ er en mengde med utsagn, leses "Konjunksjonen av alle utsagnene i mengden Δ". Her kan Δ godt være en overtellbar mengde med utsagn. "SNu(Δ)" er definert på følgende måte:

(+) SNu(Δ) = μ;-1(Mg(w: wêI & (Ay)(yêΔ → wêμ(y))))

(Man ser at SNu(ø) = μ;-1(I), ie SNu(ø), er det tautlogiske utsagn, det utsagnet som er sant i alle mulige verdenener.)

Så over til beviset: Anta w' er et vilkårlig element i I. Da har vi at w'êI∩SN(Mg(μ;f(y) : Tror;(w,t)(x,y))) hvis og bare hvis

(1) w'êI & (Ay)(Tror;(w,t)(x,y) → w'êμ;f(y))

Dessuten har vi at w'ê μ[SNu(Mg(y: yêU & (Ez)(zêU;f &μ(y)=μ;f(z) & Tror;(w,t)(x,z))))] hvis og bare hvis

(2) w'êI & (Ay)(yêU & (Ez)(zêU;f &μ(y)=μ;f(z) & Tror;(w,t)(x,z)). → w'êμ(y)))

Det vil åpenbart være tilstrekkelig å vise at (1) impliserer (2) og omvent.

(a) Anta (1) holder. Vi skal vise at (2) holder. Anta derfor for vilkårlig y at

(3) yêU & (Ez)(zêU;f &μ(y)=μ;f(z) & Tror;(w,t)(x,z)). Da finnes z slik at

(4) zêU;f &μ(y)=μ;f(z) & Tror;(w,t)(x,z). Fra (1) og (4) følger w'êμ;f(y). Men fra dette og den andre komponenten i (4) kan man slutte 'wêμ(y). Dette viser at (2) holder.

(b) Anta (2) holder. Vi skal vise at (1) holder. Man har umiddelbart fra (2) at w'êI. Anta for vilkårlig y at Tror;(w,t)(x,y). Da har vi at yêU;f & μ;f(y) Inkl I. Da finnes z slik at zêU & μ(z)=μ;f(y). Vi har altså : zêU & μ;f(y)=μ(z) &Tror;(w,t)(x,y) & yêU;f. Fra dette og (2) kan man slutte w'êμ(z). Men fra dette og det at μ;f(y)=μ(z) følger så det vi ønsker, nemlig w'êμ;f(y). Dette viser at (1) holder.

Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

På samme måte som "Der er logisk mulig at -" er en dual operator til operatoren "Det er logisk nødvendig at -" kan man innføre en dual operator CTror°;(x,t)(y) til operatoren Tror°;(x,t)(y). Vi gjør dette ved hjelp av den følgende definisjon:

Definisjon 2.1.4 Er <x,t>êPxT & yêU setter vi:

CTror°;(x,t)(y) = ¬ Tror°;(x,t)(¬y)

Endel bemerkninger kan gjøres i forbindelse med denne definisjonen.

For det første bemerker vi at negasjonen av utsagnet y, ¬y, er definert ved ¬y = μ;-1(Mg(w: wêI & ~(wêμ(y))). Man kan i denne forbindelse se på de definisjoner vi tidligere har gitt i Del I.

For det andre kan det bemerkes at uttrykket "CTror°;(x,t)(y)" kan leses "Utsagnet som sier at utsagnet y er logisk forenelig med alt det x tror er tilfelle ved tidspunktet t".

For det tredje er det rimelig å påpeke at Tror°;(x,t) er en funksjon som tilordner ethvert utsagn y utsagnet Tror°;(x,t)(y) og at C derfor kan oppfattes som en funksjon som virker på denne typen funksjoner, dvs. funksjoner i mengden U^U. Med andre ord kan vi i prinsippet definere C ved

C = Mg(<f,g>: fê U^U & g =λ/uêU/(¬(f(¬y))))

Gitt denne definisjonen ser man at C(f) = λ/yêU/(¬(f(¬y))). Setter man her inn "Tror°;(x,t)" for "f" får man C(Tror°;(x,t)) = λ/yêU/(¬Tror°;(x,t)(¬y)) =. Fra dette følger så

C(Tror°;(x,t))(y) = ¬ Tror°;(x,t)(¬y) om yêU, med andre ord den definisjonen som vi har gitt ovenfor. For å slippe noen paranteser skriver vi "CTror°;(x,t)(y)" istedet for

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

"C(Tror°;(x,t))(y)". Det er nå lett å vise at den følgende enkle sats holder:

Teorem 2.1.9 Anta <x,t>êPxT & yêU. Da gjelder:
CTror°;(x,t)(y) = μ;-1(Mg(w: wêI & μ(y)∩I ∩Mg(μ(z): Tror;(w,t)(x,z)) ≠ø)

Nå er det slik at μ(y)∩I ∩Mg(μ(z): Tror;(w,t)(x,z)) ≠ø sier at sannhetsmengden til utsagnet y, μ(y) er konsistent med sinttet av sannhetsmengdene til alle de finstrukturerte utsagnene x tror ved tidspunktet t. Med andre ord innebærer dette at utsagnet y er logisk sett kompatibelt med alt det x tror ved tidspunktet t. Teoremet ovenfor rettferdiggjør derfor den lesemåten av uttrykket "CTror°;(x,t)(y)" som vi nevnte ovenfor.

Bevis: Vi har, om wêI, at:
w ⊨ CTror°;(x,t)(y) ↔ ~ (w ⊨ Tror°;(x,t)(¬y))
↔ ~(I∩ Mg(μ(z): Tror;(w,t)(x,z)) Inkl μ(¬y))
↔ (Ew')(w' ê I∩ Mg(μ(z): Tror;(w,t)(x,z)) & w'êμ(y))
↔ wêI & μ(y)∩I∩ Mg(μ(z): Tror;(w,t)(x,z))≠ø
Dette viser at påstanden holder. **QED**.

På samme måte som vi ovenfor definerte CTror°;(x,t)(y) kan man selvfølgelig også definere CHusk°;(x,t)(y), CInnse°;(x,t)(y), CMed°;(z,x,t)(y), CVet°;(x,t)(y) etc. Hvis det er noe behov for det kan leseren selv skrive ut disse definisjonene.

La oss notere det følgende enkle teorem:

Teorem 2.1.10 Anta <x,t>êPxT, wêI og yêU. Da gjelder:
(a) w ⊨ Tror°;(x,t)(y) ↔ (Aw')(w'êI & <w,w'>ê r(Tror);(x,t) → w' ⊨ y)
(b) w ⊨ CTror°;(x,t)(y) ↔ (Ew')(w'êI & <w,w'>ê r(Tror);(x,t) & w' ⊨ y)

Beviset er meget enkelt i lys av den definisjonen vi har gitt ovenfor av r(Tror);(x,t):

Bevis: *Ad (a)*: Vi har:
w ⊨ Tror°;(x,t)(y) ↔ I∩ Mg(μ (z): Tror;(w,t)(x,z)) Inkl μ(y)
↔ (Aw')(w' ê I∩ Mg(μ(z): Tror;(w,t)(x,z)) → w' ⊨ y)
↔ (Aw')(w' êI & <w,w'>ê r(Tror);(x,t) → w' ⊨ y)
Den siste ekvivalensen kan rettferdiggjøres ved hjelp av Definisjon 2.1.2
Ad (b) Vi har:
w ⊨ CTror°;(x,t)(y) ↔ ~(w ⊨ Tror°;(x,t)(¬y))
↔ ~(I∩ Mg(μ (z): Tror;(w,t)(x,z)) Inkl μ(¬y))
↔ ~(Aw')(w'êI & w'eI∩ Mg(μ (z): Tror;(w,t)(x,z)) → w' ⊨¬y)
↔ (Ew')(w'êI & <w,w'>ê r(Tror);(x,t) & ~(w' ⊨ y)) (Definisjon 2.1.2)
↔ (Ew')(w'êI & <w,w'>ê r(Tror);(x,t) & w' ⊨ y)
Dette viser at satsen holder. **QED**.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Teoremet ovenfor har en usøkt likhet med valuasjonsreglene for modaloperatorene nødvendighet og mulighet i vanlige Kripkemodeller for modallogiske språk. Det er utenlukkende av denne grunn at vi nevner det.

Vi kommer nå til de mest grunnleggende lovene for operatoren Tror°;(x,t)(y). De kan sammenfattes i det følgende teorem. Vi nevner at alle de satsene vi skal vise i de neste paragrafene om Tror°;(x,t) kan utledes fra disse to lovene på velkjent måte. Teoremet er dette:

Teorem 2.1.11 Anta <x,t>êPxT & α,βêU. Da gjelder:
(a) ⊨α → ⊨ Tror°;(x,t)(α)
(b) ⊨ Tror°;(x,t)(α=>β) =>. Tror°;(x,t)(α) => Tror°;(x,t)(β)

Bevis: *Ad (a)*: Anta (1) ⊨α. Fra dette og definisjonen av ⊨ følger (2) (Aw)(wêI → w ⊨α). Herav kan vi så slutte at (3) α = μ;-1(I). Vi må vise at ⊨ Tror°;(x,t)(α). Det vil være tilstrekkelig å vise: (4) (Aw)(wêI → w ⊨ Tror°;(x,t)(α)) Anta wêI for vilkårlig w. I lys av (3) er det åpenbart at I∩ Mg(μ (z): Tror;(w,t)(x,z)) Inkl μ(α). Fra dette og definisjonen av Tror° følger så w ⊨ Tror°;(x,t)(α). Dette viser at punkt (a) holder.

Ad (b): wêI for vilkårlig w og at

(1) ⊨ Tror°;(x,t)(α=>β) & ⊨ Tror°;(x,t)(α)

Det vil da være tilstrekkelig å vise at ⊨ Tror°;(x,t)(β). Fra (1) og definisjonen av Tror° kan man slutte:

(2.1) I∩ Mg(μ (z): Tror;(w,t)(x,z)) Inkl μ(α=>β)
(2.2) I∩ Mg(μ (z): Tror;(w,t)(x,z)) Inkl μ(α)

Fra disse to forhold følger så:

(3) I∩ Mg(μ (z): Tror;(w,t)(x,z)) Inkl μ(α=>β)∩μ(α)

Anta for vilkårlig w' at w'ê μ(α=>β)∩μ(α). Da w' ⊨α & w' ⊨ μ(α=>β). Herav følger w' ⊨α & w' ⊨ α →w' ⊨ β. Herav w' ⊨ β. Siden w' var vilkårlig kan vi konkludere med at μ(α=>β)∩μ(α) Inkl μ(β). Fra dette og (3) følger:

I∩ Mg(μ (z): Tror;(w,t)(x,z)) Inkl μ(β)

Men fra dette og definisjonen av Tror° kan man slutte w ⊨ Tror°;(x,t)(β). Vi konkluderer med at punkt (b) holder. **QED**.

Vi bemerker at de påstandene som er nevnt i Teorem 2.1.11 selvfølgelig også holder om vi erstatter Tror med Vet, Ser, Innse, Husk og Med. Det er imidlertid slik at det er en lov som gjelder for Vet, men som ikke gjelder for Tror. Vi har i tankene det forhold at ⊨ Vet°;(x,t)(α) =>α. La oss oppføre dette som et eget teorem:

Teorem 2.1.12 Anta <x,t>êPxT & αêU. Da gjelder: ⊨ Vet°;(x,t)(α) =>α

Bevis: Gitt forutsetningene vil det være nok å vise: (+) w ⊨ Vet°;(x,t)(α) → w ⊨ α for alle wêIAnta derfor for vilkårlig w at (1) wêI & w ⊨ Vet°;(x,t)(α). Da har vi ved hjelp av definisjonen av Vet° at (2) I∩ Mg(μ (z): Vet;(w,t)(x,z)) Inkl μ(α). Nå følger fra (2):

(3) (Aw')(w'êI & (Az)(Vet;(w,t)(x,z) →w'êμ;f(z)) → w'êμ(α)). Herav:
(4) wêI & (Az)(Vet;(w,t)(x,z) →wêμ;f(z)) → wêμ(α)

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Nå har vi som et aksiom (Az)(Vet;(w,t)(x,z) →wêμ;f(z)). Fra dette, (1) og (4) følger da åpenbart at wêμ(α) og derfor at w ⊨ α. Dette viser at (+) holder. Vi konkluderer med at satsen holder. **QED**.

Vi har forsåvidt nevnt Teorem 2.1.11 tidligere, som en del av Teorem 2.1.6. Men strengt tatt beviste vi ikke denne satsen i forbindelse med vår omtale av Teorem 2.1.6. Nå har vi imidlertid tilveiebrakt et bevis uansett hvor enkelt det er. I lys av Teorem 2.1.6 følger det naturlig nok at Teorem 2.1.11 også holder om vi for Vet setter inn Ser, Innse, Husk og Med.

§ 2.2 Satser som gjelder for operasjonen Tror° og de beslektede operasjonene vi har innført.

I det følgende skal vi introdusere noe vi skal kalle en K-funksjon over mengden av utsagn. Vi kaller dette for K-funksjoner fordi en slik funksjon har egenskaper som er helt analoge med dem til nødvendighetsoperatoren i det velkjente modalsystemet K. Hensikten med denne innledningen er å motivere introduksjonen av dette begrepet.

La oss starte med definisjonen som vi tidligere ga av Tror°;(x,t)(α) nemlig Definisjon2.1 i §2. Denne var:

(1) Tror°;(x,t)(y) = μ;-1(Mg(w: wêI & yêU &
I∩ SN(Mg(μ;f(y): <w,t,x,y>ê Tror)) Inkl μ(y)))

Er x og t fixerte elementer i henholdsvis P og T ser man at Tror°;(x,t) kan defineres eksplisitt slik:

(2) Tror°;(x,t) = Mg(<y,μ;-1(Mg(w: wêI & yêU &
I∩ SN(Mg(μ;f(y): <w,t,x,y>ê Tror)) Inkl μ(y)))>: yêU)

Tilsvarende kan vi definere Tror° eksplisitt ved:

(3) Tror° = λ/<x,t>êPxT/(Tror°;(x,t))

La oss se på noen viktige egenskaper ved Tror°;(x,t). For det første er dette, noe som man lett kan utlede fra (2), en funksjon som avbilder mengden utsagn inn i mengden av utsagn. Vi har med andre ord, dersom vi setter F= Tror°;(x,t) , at

(4) F : U → U

For det andre har vi at ⊨ Tror°;(x,t)(α) dersom ⊨ α for alle αêU. Setter vi igjen F = Tror°;(x,t) har vi altså i kraft av Teorem 2.1.11

(5) (Aα)(αêU → ⊨α → ⊨ F(α))

For det tredje har vi at dersom α og β er utsagn så gjelder:

⊨ Tror°;(x,t)(α=>β) =>. Tror°;(x,t)(α) => Tror°;(x,t)(β)

Setter vi igjen F= Tror;(x,t) har vi derfor, igjen ved hjelp av Teorem 2.1.11, at

(6) (Aα)(Aβ)(α,βêU → ⊨ F(α=>β) =>((F(α) =>F(β))

En funksjon som oppfyller kravene (4), (5) og (6) skal vi kalle en K-funksjon. Man ser derfor at alle de epistemiske operasjonene vi har innført tidligere av typen R°(x,t) der R Inkl IxTxPxU;f er K-funksjoner. Vi definerer derfor uttrykket "K-funksjon" slik:

Definisjon 2.2.1: En K-funksjon er en funksjon F som oppfyller følgende krav:

(a) F: U → U

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(b) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} U \rightarrow \models \alpha \rightarrow \models F(\alpha))$
(c) $(A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} U \rightarrow \models F(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow ((F(\alpha) \Rightarrow F(\beta)))$

I forbindelse med K-funksjoner skal vi kalle (b) i definisjonen for *generaliseringsregelen* og (c) for *distribusjonsregelen.*

Hvis F er en K-funksjon definerer vi den duale funksjonen til F ved å sette: $CF(\alpha) = \neg F(\neg\alpha)$ om $\alpha \hat{e} U$. Hvis klassen av K-funksjoner betegnes med **K** kan C opfattes som en funksjon som til enhver $F \hat{e} \mathbf{K}$ tilordner F en bestemt funksjon i mengden $Mg(f: f: U \rightarrow U)$ og der $C(F) = \lambda/\alpha \hat{e} U/(\neg F(\neg\alpha))$. Man ser da at $C(F)(\alpha) = \neg F(\neg\alpha)$. I stedet for å skrive "C(F)" skriver vi "CF" for å slippe å belaste teksten med alt for mange paranteser. Vi gir den følgende formelle definisjon:

Definisjon 2.2.2: Anta $\alpha \hat{e} U$ og at F er en K-funksjon. Da setter vi:
$CF(\alpha) = \neg F(\neg\alpha)$.

Vi skal nå utlede en rekke satser som gjelder for K-funksjoner generelt. Dette er enklere enn å utlede dem for en spesiell K-funksjon, for eksempel Ser°;(x,t). Det bør bemerkes at disse satsene angir de mest elementære egenskapene ved slike funksjoner. Vi har derfor valgt å gi dem navnene Elementærteorem I - III.

Her kommer det første:

Teorem 2.2.1 (Elementærteorem I). Anta $\alpha;i \hat{e} U$ $(i \hat{e} N)$ og at $\beta \hat{e} U$. Anta F er en K-funksjon. Da har vi:

(a) $\models F(\alpha \Omega \beta) \Leftrightarrow F(\alpha) \Omega F(\beta)$
(b) $\models F(SNu/i,1,n/(\alpha;i)) \Leftrightarrow SNu/i,1,n/(F(\alpha;i))$
(c) $\models \alpha \Rightarrow \beta \rightarrow \models CF(\alpha) \Rightarrow CF(\beta)$
(d) $\models \alpha \Rightarrow \beta \rightarrow \models F(\alpha) \Rightarrow F(\beta)$
(e) $\models SNu/i,1,n/(\alpha;i) \Rightarrow \beta \rightarrow \models SNu/i,1,n/(F(\alpha;i)) \Rightarrow F(\beta)$
(f) $\models \alpha \Leftrightarrow \beta \rightarrow \models F(\alpha) \Leftrightarrow F(\beta)$
(g) $\models \alpha \Leftrightarrow \beta \rightarrow \models CF(\alpha) \Leftrightarrow CF(\beta)$

Bevis: *Ad (a)*: Vi har vet ren utsagnslogikk at (1) $\models \alpha \Omega \beta \Rightarrow \beta$ og $\models \alpha \Omega \beta \Rightarrow \beta$. Ved hjelp av generaliseringsregelen har vi da

(2) $\models F(\alpha \Omega \beta \Rightarrow \alpha)$ & $\models F(\alpha \Omega \beta \Rightarrow \beta)$ Fra dette følger ved hjelp av distribusjonsregelen og utsagnslogikk at $\models F(\alpha \Omega \beta) \Rightarrow F(\alpha)$ og $\models F(\alpha \Omega \beta) \Rightarrow F(\beta)$. Men fra dise to påstandene kan vi ved hjelp av utsagnslogikk slutte $\models F(\alpha \Omega \beta) \Rightarrow F(\alpha) \Omega F(\beta)$. Dette viser halvdelen mot høyre i (a). Nå har vi ved hjelp av utsagnslogikk (3) $\models \alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow (\alpha \Omega \beta))$. Fra dette og generaliseringsregelen følger:

(4) $\models F(\alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow (\alpha \Omega \beta)))$. Fra dette, distribusjonsregelen og setningslogikk kan man så slutte (5) $\models F(\alpha) \Rightarrow F(\beta \Rightarrow \alpha \Omega \beta)$. Nå har vi kraft av distribusjonsregelen at (6) $\models F(\beta \Rightarrow \alpha \Omega \beta) \Rightarrow . F(\beta) \Rightarrow F(\alpha \Omega \beta)$. Fra (5) og (6) følger så ved hjelp av utsagnslogikk det vi ønsker, nemlig $\models F(\alpha) \Omega F(\beta) \Rightarrow F(\alpha \Omega \beta)$. Vi har dermed bevist implikasjonene begge veier i (a).

Ad (b): Satsen holder åpenbart for n=1. Anta den holder for n>1, ie anta:

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(1) ⊨ F(SNu/i,1,n/(α;i)) <=> SNu/i,1,n/(F(α;i))

Vi skal da vise at den holder for n+1. Nå har vi ikraft av definisjonen av SNu/i,1,n/ at (2) SNu/i,1,n+1/(α;i) = SNu/i,1,n/(α;i)Ω α;(n+1) . Fra dette følger:

(2) ⊨ F(SNu/i,1,n+1/(α;i)) <=> F(SNu/i,1,n/(α;i)Ω α;(n+1))

Nå har vi ved hjelp av punkt (a) at:

(3) ⊨ F(SNu/i,1,n/(α;i)Ω α;(n+1)) <=> F(SNu/i,1,n/(α;i))ΩF(α;(n+1))

Men fra dette, (1) og utsagnslogikk kan man slutte:

(4) ⊨ F(SNu/i,1,n/(α;i))Ω F(α;(n+1)) <=> SNu/i,1,n/(F(α;i))ΩF(α;(n+1))

Men ⊨ SNu/i,1,n/(F(α;i))ΩF(α;(n+1)) <=> SNu/i,1,n+1/(F(α;i)). Det følger fra dette,(2),(3), (4) og utsagnslogikk at ⊨ F(SNu/i,1,n+1/(α;i)) <=> SNu/i,1,n+1/(F(α;i)). Satsen holder altså for n+1 om den holder for n. Det følger ved induksjon at den holder allment. Dette viser at (b) holder.

Ad (c): Anta (1) ⊨ α=> β. Da følger ved hjelp av utsagnslogikk at (2) ⊨ ¬β => ¬α. Fra dette og generaliseringsregelen kan man så slutte ⊨ F(¬β => ¬α). Fra dette kan man så ved hjelp av distribusjonsregelen og utsagnslogikk slutte: ⊨ F(¬β) => F(¬α). Herav følger ved hjelp av utsagnslogikk: ⊨ ¬F(¬α) => ¬F(¬β). Men fra dette og definisjonen ac C følger: ⊨ CF(α) => CF(β). Dette viser at punkt (c) holder.

Ad (d): Anta ⊨ α=>β Da følger ved hjelp av generaliseringsregelen ⊨ F(α=> β). Men fra dette, distribusjonsregelen og utsagnslogikk (ie. modus ponens) følger ⊨ F(α) => F(β). Dette viser at punkt (d) holder.

Ad (e): Anta (1) ⊨ SNu/i,1,n/(α;i) =>β. Da følger ved hjelp av generaliseringsregelen at (2) ⊨ F(SNu/i,1,n/(α;i) =>β). Fra dette, distribusjonsregelen og modus ponens kan man slutte: (3) ⊨ F(SNu/i,1,n/(α;i)) =>F(β). Men fra dette, punkt (b) og utsagnslogikk følger ⊨ SNu/i,1,n/(F(α;i)) => F(β). Dette viser at punkt (e) holder.

Ad (f): Anta ⊨ α<=>β. Da har vi ved hjelp av utsagnslogikk at (1) ⊨ α => β og (2) ⊨ β =>α. Fra det første og punkt (d) kan man slutte (3) ⊨ F(α) => F(β). Fra (2) og punkt (d) kan man likeledes slutte (4) ⊨ F(β) => F(α). Men fra (3) og (4) følger ved hjelp av utsagnslogikk: ⊨ F(α) <=> F(β). Dette viser at (f) holder.

Ad (g): Anta ⊨ α<=>β. Da har vi ved hjelp av utsagnslogikk at (1) ⊨ α => β og (2) ⊨ β =>α. Fra (1) og punkt (c) kan man slutte: (3) ⊨ CF(α) => CF(β). Fra (2) og punkt (c) kan man slutte (4) ⊨ CF(β) =>CF(α). Men fra (3) og (4) følger ved hjelp av utsagnslogikk: ⊨ CF(α) <=> CF(β). Dette viser at (g) holder.

Dermed har det blitt gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

I den følgende sats er symbolet "o" plassholder for ett av symbolene "=>", "<=>", "Ω", "**U**".

Teorem 2.2.2 (Elementærteorem II) Anta α;i êU (iêN) og at α,β,γ êU. Anta F er en K-funksjon. Da har vi:

(i) ⊨ F(α) Ω F(α=>β) => F(β)
(ii) ⊨ F(SNu/i,1,n/(α;i))=>β. =>. SNu/i,1,n/(F(α;i)) =>β
(iii) ⊨ F(α<=>β) =>. (F(α) <=>F(β))
(iv) ⊨ F(α <=> β) =>. F(αoγ) <=> F(βoγ)
(v) ⊨ F(α <=> β) =>. F(γoα) <=> F(γoβ)
(vi) ⊨ F(α <=> β) =>. F(¬α) <=> F(¬β)
(vii) ⊨ F(α <=> β) =>. CF(α) <=> CF(β)
(viii) ⊨ F(α <=> β) =>. CF(αoγ) <=> CF(βoγ)

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(ix) ⊨ F(α <=> β) =>. CF(γoα) <=> CF(γoβ)
(x) ⊨ CF(UNu/i,1,n/(α;i)) <=> UNu/i,1,n/(CF(α;i))
(xi) ⊨ F(SNu/i,1,n/(α;i)) <=> ¬CF(UNu/i,1,n/(¬α;i))
(xii) ⊨ F(UNu/i,1,n/(α;i)) <=> ¬CF(SNu/i,1,n/(¬α;i))
(xiii) ⊨ CF(SNu/i,1,n/(α;i)) <=> ¬F(UNu/i,1,n/(¬α;i))
(xiv) ⊨ CF(UNu/i,1,n/(α;i)) <=> ¬F(SNu/1,1,n/(¬α;i))
(xv) ⊨ F(SNu/i,1,n/(α;i) => βΩ¬β) => F(UNu/i,1,n/(¬α;i))

Bevis: *Ad (i)*: Denne påstanden følger umiddelbart fra distribusjonsregelen ved hjelp av utsagnslogikk. Vi har ⊨ F(α => β) => F(α) =>F(β). Men fra dette har man direkte: ⊨ F(α) Ω F(α=>β) => F(β). Dette viser at (i) holder.

Ad (ii): Ved ren utsagnslogikk ser man at man har:

⊨ F(SNu/i,1,n/(α;i))=>β. =>. F(SNu/i,1,n/(α;i)) =>β. Men ifølge punkt (b) i forrige teorem har vi: ⊨ F(SNu/i,1,n/(α;i)) <=> SNu/i,1,n/(F(α;i)). Fra disse to forhold følger (ii) ved hjelp av utsagnslogikk.

Ad (iii): Man har åpenbart (1) ⊨ α <=> β. => (α =>β) og
(2) ⊨ α <=> β. => (β =>α). Fra det første følger ved generaliseringsregelen, distribusjonsregelen og setnings logikk: ⊨ F(α <=>β) => F(α=>β). Fra dette og distribusjonsregelen kan man så rent utsagnslogisk slutte (3) ⊨ F(α <=>β) => F(α) => F(β)
Med utgangspunkt i (2) kan på nøyaktig samme måte vise:
(4) ⊨ F(α <=>β) => F(β) => F(α)
Men fra (3) og (4) følger (iii) ved ren setningslogikk.

Ad (iv): Vi har:
(1) ⊨ α <=> β. => (αoγ =>βoγ)
(2) ⊨ α <=> β. => (βoγ =>αoγ)
Dette kan man vise ved ren utsagnslogikk. Fra det første følger ved generaliseringsregelen, distribusjonsregelen og setnings logikk: ⊨ F(α <=>β) => F(αoγ=>βoγ). Fra dette og distribusjonsregelen kan man så rent utsagnslogisk slutte:
(3) ⊨ F(α <=>β) => F(αoγ) => F(βoγ) Med utgangspunkt i (2) kan på nøyaktig samme måte vise: (4) ⊨ F(α <=>β) => F(βoγ) => F(αoγ) Men fra (3) og (4) følger ⊨ F(α <=>β) => F(αoγ) <=> F(βoγ) ved ren setningslogikk. Dette viser at punkt (iv) holder.

Ad (v): Man får et bevis for dette punkt ved å bytte ut "αoγ" og "βoγ" overalt i beviset for det foregående punkt med henholdvis "γoα" og "γoβ".

Ad (vi): Man får et bevis for dette punkt ved å bytte ut "αoγ" og "βoγ" overalt i beviset for punkt (iv) med henholdvis "¬α" og "¬β".

Ad (vii): Man har åpenbart (1) ⊨ α <=> β. => (¬α =>¬β) og
(2) ⊨ α <=> β. => (¬β =>¬α). Fra det første følger ved generaliseringsregelen, distribusjonsregelen og setnings logikk: ⊨ F(α <=>β) => F(¬α=>¬β). Fra dette og distribusjonsregelen kan man så rent utsagnslogisk slutte (3) ⊨ F(α <=>β) => F(¬α) => F¬(β)
Med utgangspunkt i (2) kan på nøyaktig samme måte vise:
(4) ⊨ F(α <=>β) => F(¬β) => F(¬α)
Men fra (3) og (4) følger ved hjelp av ren setningslogikk
(5) ⊨ F(α <=>β) => ¬F(¬α) <=> ¬F(¬β)
Fra dette og definisjonen av CF følger så ⊨ F(α <=>β) =>. CF(α) <=> CF(β)
Dette viser at punkt (vii) holder.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Ad (viii): Vi har:

(1) ⊨ α <=> β. => (¬(αογ) =>¬(βογ))

(2) ⊨ α <=> β. => (¬(βογ) => ¬(αογ))

Dette kan man vise ved ren utsagnslogikk. Fra det første følger ved generaliseringsregelen, distribusjonsregelen og setnings logikk: ⊨ F(α <=>β) => F(¬(αογ)=>¬(βογ)). Fra dette og distribusjonsregelen kan man så rent utsagnslogisk slutte:

(3) ⊨ F(α <=>β) => F(¬(αογ)) => F(¬(βογ)) Med utgangspunkt i (2) kan på nøyaktig samme måte vise: (4) ⊨ F(α <=>β) => F(¬(βογ)) => F(¬(αογ)) Men fra (3) og (4) følger ⊨ F(α <=>β) => ¬F(¬(αογ)) <=> ¬F(¬(βογ)) ved ren setningslogikk. Fra dette og definisjonen av CF følger ⊨ F(α <=> β) =>. CF(αογ) <=> CF(βογ). Dette viser at punkt (viii) holder.

Ad (ix): Man får et bevis for dette punkt ved å bytte ut "αογ" og "βογ" overalt i beviset for punkt (viii) med henholdvis "γοα" og "γοβ".

Ad (x): Man har ved ren utsagnslogikk at

(1) ⊨ ¬UNu/i,1,n/(α;i) <=> SNu/i,1,n/(¬α;i). Fra dette og punkt (f) i Teorem 2.2.1 kan man slutte ; (2) ⊨ F(¬UNu/i,1,n/(α;i)) <=> F(SNu/i,1,n/(¬α;i)). Herav følger ved ren utsagnslogikk: (3) ⊨ ¬F(¬UNu/i,1,n/(α;i)) <=> ¬F(SNu/i,1,n/(¬α;i)). Ved hjelp av punkt (b) i Teorem 2.2.1 har vi: ⊨ F(SNu/i,1,n/(¬α;i)) <=> SNu/i,1,n/(F(¬α;i)) og derfor

(4) ⊨ ¬F(SNu/i,1,n/(¬α;i)) <=> ¬SNu/i,1,n/(F(¬α;i)) ved hjelp av utsagnslogikk. Videre har vi ved hjelp av ren utsagnslogikk at

(5) ⊨ ¬SNu/i,1,n/(F(¬α;i)) <=> UNu/i,1,n/ (¬(F(¬α;i))

Fra (3), (4) og (5) kan man ved ren utsagnslogikk slutte:

⊨ ¬F(¬UNu/i,1,n/(α;i)) <=> UNu/i,1,n/ (¬(F(¬α;i))

Men fra dette og definisjonen av C følger ⊨ CF(UNu/i,1,n/(α;i)) <=> UNu/i,1,n/ (CF(α;i)) Dette viser at punkt (x) holder.

Ad (xi): Man har ved utsagnslogikk: ⊨ SNu/i,1,n/(α;i) <=> ¬UNu/i,1,n/(¬α;i). Fra dette kan man ved hjelp av Teorem 2.2.1, punkt (f) slutte:

⊨ F(SNu/i,1,n/(α;i)) <=> F(¬UNu/i,1,n/(¬α;i))

Fra dette følger i sin tur, igjen ved hjelp av ren setningslogikk:

⊨ F(SNu/i,1,n/(α;i)) <=> ¬ ¬ F(¬UNu/i,1,n/(¬α;i))

Fra dette kan man så ved hjelp av definisjonen av CF konkludere med at

⊨ F(SNu/i,1,n/(α;i)) <=> ¬CF(UNu/i,1,n/(¬α;i)) Dette viser at punkt (xi) holder.

Ad (xii): Ved hjelp av ren utsagnslogikk har man:

⊨ UNu/i,1,n/(α;i) <=> ¬ SNu/i,1,n/(¬α;i)

Fra dette kan man ved hjelp av Teorem 2.2.1, punkt (f) slutte:

⊨ F(UNu/i,1,n/(α;i)) <=> F(¬ SNu/i,1,n/(¬α;i))

Herav har man så ved hjelp av ren utsagnslogikk:

⊨ F(UNu/i,1,n/(α;i)) <=> ¬ ¬ F(¬ SNu/i,1,n/(¬α;i))

Fra dette og definisjonen av CF følger så det vi ønsker, nemlig:

⊨ F(UNu/i,1,n/(α;i)) <=> ¬CF(SNu/i,1,n/(¬α;i))

Ad (xiii): Det følger direkte fra punkt (xii) ved hjelp av ren utsagnslogikk.

Ad (xiv): Man har ved ren utsagnslogikk: ⊨ ¬UNu/i,1,n/(α;i) <=> SNu/1,1,n/(¬α;i). Fra dette følger ved hjelp av Teorem 2.2.1, punkt (f) at

⊨ F(¬UNu/i,1,n/(α;i) <=> F(SNu/1,1,n/(¬α;i)). Men herav har vi ved hjelp av utsagnslogikk: ⊨ ¬F(¬UNu/i,1,n/(α;i) <=> ¬F(SNu/1,1,n/(¬α;i)). Fra dette kan man så ved

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

hjelp av definisjonen av CF slutte at: ⊨ CF(UNu/i,1,n/(α;i)) <=> ¬F(SNu/1,1,n/(¬α;i)). Dette viser at punkt (xiv) holder.

Ad (xv): Man har ved hjelp av ren setningslogikk:
⊨ (SNu/i,1,n/(α;i) => βΩ¬β) => UNu/i,1,n/(¬α;i). Ved hjelp av dette og Teorem 2.2.1, punkt (d), kan man så konkludere med at

⊨ F(SNu/i,1,n/(α;i) => βΩ¬β) => F(UNu/i,1,n/(¬α;i))

Dette viser at punkt (xv) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for teoremet. **QED**.

Teorem 2.2.3 (Elementærteorem III) Anta α,β êU. Anta F er en K-funksjon. Da har vi:

(i) ⊨ F(α=>β) => CF(α) => CF(β)
(ii) ⊨ F(αUβ) Ω F(¬α). => F(β)
(iii) ⊨ F(αUβ) Ω CF(¬β) => CF(α)
(iv) ⊨ F(α => β) =>.F(¬β) => F(¬α)
(v) ⊨ F(α => β) => ¬CF(β) => ¬CF(α)
(vi) ⊨ CF(αΩβ) => CF(α) & CF(β)
(vii) ⊨ F(αUβ) => F(β)UCF(α)
(viii) ⊨ CF(¬β) Ω F(¬α) => CF(¬αΩ¬β)
(ix) ⊨ CF(β) Ω F(α) =>CF(αΩβ)
(x) ⊨ F(α) => CF(β) => CF(αΩβ)
(xi) ⊨ CF(¬β) => ¬F(αΩβ)

Bevis: *Ad (i)*: Man kan utlede ved ren utsagnslogikk at ⊨ (α=> β) => (¬β => ¬α). Fra dette har man ved hjelp av generaliseringsregelen: ⊨ F((α=> β) => (¬β => ¬α)). Fra dette kan man ved hjelp av distribusjonsregelen og utsagnslogikk utlede:
⊨ F(α => β) => F(¬β) =>F(¬α). Men herav følger: ⊨ F(α => β) => ¬F(¬α) =>¬F(¬β)
Fra dette og definisjonen av CF har man så det vi ønsker: ⊨ F(α => β) => CF(α) =>CF(β)
Dette viser at punkt (i) holder.

Ad (ii): Ved hjelp av ren utsagnslogikk er det lett å vise ⊨ (αUβ) =>(¬α => β). Fra dette og generaliseringsregelen kan det sluttes at ⊨ F(αUβ) => F(¬α =>β). Nå har vi i kraft av distribusjonsregelen: ⊨ F(¬α =>β) => F(¬α) =>F(β). Fra de to siste forhold kan man så ved ren utsagnslogikk utlede det vi ønsker: ⊨ F(αUβ)Ω F(¬α) => F(β). Dette viser at punkt (ii) holder.

Ad (iii): Ved hjelp av ren utsagnslogikk er det lett å vise ⊨ (αUβ) =>(¬α => ¬¬β). Fra dette og generaliseringsregelen kan det sluttes at ⊨ F(αUβ) => F(¬α =>¬¬β). Nå har vi i kraft av distribusjonsregelen: ⊨ F(¬β =>α) => F(¬α) =>F(¬¬β). Fra de to siste påstandene følger så ved hjelp av setningslogikk at ⊨ F(αUβ)Ω ¬F(¬¬β) => ¬F(¬α). Men fra dette følger ⊨ F(αUβ) Ω CF(¬β) => CF(α). Dette viser at punkt (iii) holder.

Ad (iv): Man har ved hjelp av utsagnslogikk ⊨ (α=> β) =>. (¬β) => (¬α). Fra dette kan man utlede ved hjelp av generaliseringsregelen: ⊨ F((α=> β) =>. (¬β) => (¬α)). Fra dette kan man ved hjelp av distribusjonsregelen og utsagnslogikk utlede:
⊨ F(α => β) =>. F(¬β) => F(¬α) som er det vi ønsker.

Ad (v): Fra punkt (iv) kan man utlede ved utsagnslogikk at
⊨ F(α => β) =>. ¬¬F(¬β) => ¬¬F(¬α). Men fra dette følger ved hjelp av definisjonen av CF at ⊨ F(α => β) =>. CF(¬β) => CF(¬α). Dette viser at punkt (v) holder.

Ad (vi): Man har at ⊨ αΩβ =>α. Fra dette følger ved hjelp av utsagnslogikk

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

$\models \neg\alpha \Rightarrow \neg(\alpha\Omega\beta)$. Fra dette kan man ved hjelp av generaliseringsregelen slutte: $\models F(\neg\alpha \Rightarrow \neg(\alpha\Omega\beta))$. Ved hjelp av distribusjonsregelenog utsagnslogikk følger da: $\models F(\neg\alpha) \Rightarrow F(\neg(\alpha\Omega\beta))$. Herav ved utsagnslogikk: $\models \neg F(\neg(\alpha\Omega\beta)) \Rightarrow \neg F(\neg\alpha)$. Fra dette og definisjonen av CF følger: (1) $\models CF(\alpha\Omega\beta) \Rightarrow CF(\alpha)$. På nøyaktig samme måte kan man med utgangspunkt i $\models \alpha\Omega\beta \Rightarrow \beta$ utlede (2) $\models CF(\alpha\Omega\beta) \Rightarrow CF(\beta)$. Fra (1) og (2) følger: $\models CF(\alpha\Omega\beta) \Rightarrow CF(\alpha)\ \Omega\ CF(\beta)$. Dette viser at punkt (vi) holder.

A*d (vii)*: Man har $\models (\alpha U\beta) \Rightarrow (\neg\alpha \Rightarrow \beta)$. Fra dette og generaliseringsregelen kan man utlede: $\models F((\alpha U\beta) \Rightarrow (\neg\alpha \Rightarrow \beta))$. Fra dette følger ved hjelp av distribusjonsregelen og setningslogikk: $\models F(\alpha U\beta) \Rightarrow F(\neg\alpha \Rightarrow \beta)$. Siden vi har $\models F(\neg\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow F(\neg\alpha) \Rightarrow F(\beta)$. følger det at $\models F(\alpha U\beta) \Rightarrow F(\neg\alpha) \Rightarrow F(\beta)$. Fra dette følger ved hjelp av ren utsagnslogikk: $\models F(\alpha U\beta) \Rightarrow F(\beta)\ U\ \neg F(\neg\alpha)$. Herav har vi v definisjonen av så $\models F(\alpha U\beta) \Rightarrow F(\beta)\ U\ CF(\alpha)$ ved hjelp av CF. Dette viser at punkt (vii) holder.

Ad (viii): Man har ved ren utsagnslogikk: $\models \neg(\neg\alpha\Omega\neg\beta) \Rightarrow \neg\alpha \Rightarrow \neg\neg\beta$. På samme måte i beviset for forrige punkt følger fra dette at $\models F(\neg(\neg\alpha\Omega\neg\beta) \Rightarrow F(\neg\alpha) \Rightarrow F(\neg\neg\beta)$. Fra dette kan man slutte ved hjelp av utsagnslogikk: $\models \neg F(\neg\neg\beta)\ \Omega\ F(\neg\alpha) \Rightarrow \neg F(\neg(\neg\alpha\Omega\neg\beta))$
Herav følger så ved hjelp av definisjonen av CF det vi ønsker:

$CF(\neg\beta)\ \Omega\ F(\neg\alpha) \Rightarrow CF(\neg\alpha\Omega\neg\beta)$. Dette viser at punkt (viii) holder.

Ad (ix): Man har ved ren utsagnslogikk: $\models \neg(\alpha\Omega\beta) \Rightarrow \alpha \Rightarrow \neg\beta$. På samme måte i beviset for forrige punkt følger fra dette at $\models F(\neg(\alpha\Omega\beta) \Rightarrow F(\alpha) \Rightarrow F(\neg\beta)$. Fra dette kan man slutte ved hjelp av utsagnslogikk: $\models \neg F(\neg\beta)\ \Omega\ F(\alpha) \Rightarrow \neg F(\neg(\alpha\Omega\beta))$
Herav følger så ved hjelp av definisjonen av CF det vi ønsker:

$CF(\beta)\ \Omega\ F(\alpha) \Rightarrow CF(\alpha\Omega\beta)$. Dette viser at punkt (ix) holder.

Ad (x): Dette følger ved ren utsagnslogikk fra det foregående punkt.

Ad (xi): Man har ved hjelp av utsagnslogikk: $\models \alpha\Omega\beta \Rightarrow \neg\neg\beta$. Fra dette følger ved generaliseringsregelen: $\models F(\alpha\Omega\beta \Rightarrow \neg\neg\beta)$. Fra dette kan vi ved hjelp av utsagnslogikk og distribusjonsregelen lett utlede: $\models F(\alpha\Omega\beta) \Rightarrow F(\neg\neg\beta)$. Herav følger så ved hjelp av utsagnslogikk: $\models \neg F(\neg\neg\beta) \Rightarrow \neg F(\alpha\Omega\beta)$. Ved hjelp av definisjonen av CF følger så fra dette det vi ønsker, nemlig $\models CF(\neg\beta) \Rightarrow \neg F(\alpha\Omega\beta)$. Dette viser at punkt (xi) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Vi har nå presentert de viktigste teoremene vi vil ta i betraktning når det gjelder de mer elementære egenskapene til K-funksjoner. Som man ser dreier det seg om tre ganske enkle satser, men samlet gir de en et forholdsvis fyldig bilde av egenskapene til denne type funksjoner.

Ovenfor har vi også notert oss at de seks "epistemiske operasjonene" : Ser°;(x,t), Husk°;(x,t), Innse°;(x,t), Med°;(z,x,t), Vet°;(x,t) og Tror°;(x,t) , hvis logiske relasjoner til hverandre vi forsøkte å anskueliggjøre i Figur 2 i §1, alle oppfyller kravene til en K-funksjon i den betydning vi har definert ovenfor. Dette innebærer at vi for hver og en av disse epistemiske operatorene kan formulere teoremer som er helt analoge med de tre elementærteoremene, Teorem 2.2.1 - 2.2.3 vi har bevist. Hvis man faktisk gjør dette kan man formulere i alt atten satser som alle er korollarer til de tre satsene om K-funksjoner. Vi skal naturligvis ikke gjøre dette her. (Leseren kan gjøre det hvis han virkelig ønsker.) I stedet skal vi bare illustrere med et enkelt teorem, nemlig det vi får når vi overalt i Teorem 2.2.2 erstatter F med operasjonen Tror°;(x,t) . Vi får da den følgende sats:

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Teorem 2.2.4 (Korollar til Elementærteorem II) Anta α;i êU (iêN) og at α,β,γ êU. Da har vi:

(i) ⊨ Tror°;(x,t)(α) Ω Tror°;(x,t)(α=>β) => Tror°;(x,t)(β)
(ii) ⊨ Tror°;(x,t)(SNu/i,1,n/(α;i))=>β. =>. SNu/i,1,n/(Tror°;(x,t)(α;i)) =>β
(iii) ⊨ Tror°;(x,t)(α<=>β) =>. (Tror°;(x,t)(α) <=>Tror°;(x,t)(β))
(iv) ⊨ Tror°;(x,t)(α <=> β) =>. Tror°;(x,t)(αoγ) <=> Tror°;(x,t)(βoγ)
(v) ⊨ Tror°;(x,t)(α <=> β) =>. Tror°;(x,t)(γoα) <=> Tror°;(x,t)(γoβ)
(vi) ⊨ Tror°;(x,t)(α <=> β) =>. Tror°;(x,t)(¬α) <=> Tror°;(x,t)(¬β)
(vii) ⊨ Tror°;(x,t)(α <=> β) =>. CTror°;(x,t)(α) <=> CTror°;(x,t)(β)
(viii) ⊨ Tror°;(x,t)(α <=> β) =>. CTror°;(x,t)(αoγ) <=> CTror°;(x,t)(βoγ)
(ix) ⊨ Tror°;(x,t)(α <=> β) =>. CTror°;(x,t)(γoα) <=> CTror°;(x,t)(γoβ)
(x) ⊨ CTror°;(x,t)(UNu/i,1,n/(α;i)) <=> UNu/i,1,n/(CTror°;(x,t)(α;i))
(xi) ⊨ Tror°;(x,t)(SNu/i,1,n/(α;i)) <=> ¬CTror°;(x,t)(UNu/i,1,n/(¬α;i))
(xii) ⊨ Tror°;(x,t)(UNu/i,1,n/(α;i)) <=> ¬CTror°;(x,t)(SNu/i,1,n/(¬α;i))
(xiii) ⊨ CTror°;(x,t)(SNu/i,1,n/(α;i)) <=> ¬Tror°;(x,t)(UNu/i,1,n/(¬α;i))
(xiv) ⊨ CTror°;(x,t)(UNu/i,1,n/(α;i)) <=> ¬Tror°;(x,t)(SNu/1,1,n/(¬α;i))
(xv) ⊨ Tror°;(x,t)(SNu/i,1,n/(α;i) => βΩ¬β) => Tror°;(x,t)(UNu/i,1,n/(¬α;i))

Bevis: Siden Teorem 2.2.2 gjelder for enhver K-funksjon F, kan vi instansiere med hensyn på Ser°;(x,t) som også er en K-funksjon. Resultatet blir da satsen ovenfor. **QED**.

Som vi allerede har nevnt kan vi generere atten satser om vi i Teorem 2.2.1 - 2.2.3 erstatter F etter tur med henholdsvis operasjonene Ser°;(x,t), Husk°;(x,t), Innse°;(x,t), Med°;(z,x,t), Vet°;(x,t) og Tror°;(x,t). Dette innebærer at vi nå har presentert en betraktelig mengde av satser som gjelder for f.ks. Tror°;(x,t) og dermed gitt et ganske fyldig bilde av egenskapene til denne spesielle K-funksjonen. Det samme gjelder Vet°;(x,t).

Det er imidlertid en lov som åpenbart gjelder for Vet°;(x,t), men som ikke holder for Tror°;(x,t). Den loven vi har i tankene er ⊨ Vet°;(x,t)(α) => α . At dette er en lov som gjelder for Vet°;(x,t) fremgår fra Teorem 2.1.6. Som man også ser fra dette teoremet har vi at den samme lov gjelder for Ser°;(x,t), Husk°;(x,t), Innse°;(x,t), Med°;(z,x,t). Man har med andre ord:

⊨ Ser°;(x,t)(α) => α
⊨ Husk°;(x,t)(α) => α
⊨ Innse°;(x,t)(α) => α
⊨ Med°;(x,t)(α) => α

Ingen tilsvarende lov gjelder for Tror;(x,t). Men det er ytterligere enlov som ikke gjelder for Tror°;(x,t), men som gjelder for de sannhetsimpliserende operasjonene ovenfor. Vi har ikke:

(+) ⊨ Tror°;(x,t)(α) => CTror°;(x,t)(α).

Grunnen til at denne loven ikke holder for Tror°;(x,t) er at dersom trosfeltet til x ved tidspunktet t finnes det ikke noen utsagn som er konsistente med dette trosfelt, siden det vil inneholde absolutt alle utsagn. Man kan i denne forbindelse konsultere Teorem 2.1.5.
Men siden utsagnsfeltet til de sannhetsimpliserende operasjonene vi nevnt *ikke* kan være inkonsistente holder loven (+) for dem. Vi har derfor at følgende teorem gjelder for dem:

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Teorem 2.2.5 Anta <x,t>ê PxT og at αêU. Da gjelder

(i) Vet°;(x,t)(α) => CVet°;(x,t)(α)

(ii) Ser°;(x,t)(α) => CSer°;(x,t)(α)

(iii) Innse°;(x,t)(α) => CInnse°;(x,t)(α)

(iv) Husk°;(x,t)(α) => CHusk°;(x,t)(α)

(v) Med°;(z,x,t)(α) => CMed°;(z,x,t)(α)

Bevis: Beviset for denne satsen er meget enkelt. Vi ser bare på det første tilfelle. De andre behandles likedan. Vi har (1) ⊨ Vet°;(x,t)(α) => α for alle utsagn αêU. Det følger da at vi også har ⊨ Vet°;(x,t)(¬α) => ¬α. Fra det siste kan man slutte ved ren utsagnslogikk at ⊨ α => ¬Vet°;(x,t)(¬α). Men fra dette og (1) følger , igjen ved hjelp av ren utsagnslogikk: ⊨ Vet°;(x,t)(α) => ¬Vet°;(x,t)(¬α). Fra dette følger så ⊨ Vet°;(x,t)(α) => CVet°;(x,t)(α) ved hjelp av definisjonen av C. **QED**.

Det er to ting som vi tilslutt vil bemerke i denne paragrafen.

Det første er at Tror°;(x,t) , som vi allerede har nevnt er en K-operator, men den er altså ikke som de andre vi har nevnt sannhetsimpliserende. Vi har altså ikke at Tror°;(x,t)(α) implisere α. Siden trosfeltet til x ved tidspunktet t kan være inkonsistent kan man heller ikke fra Tror°;(x,t)(α) slutte at utsagnet CTror°;(x,t) er sant. For de operatorene vi har nevnt i Teorem 2.2.5 gjelder derimot at de er sannhetsimpliserende, med andre ord at vi for eksempel har: ⊨ Vet°;(x,t)(α) => α. Dette innebærer at disse operatorene ikke bare er K-operatorer. Definerer vi en T-operator som en funksjon F som oppfyller de følgende krav:

(i) F:U →U

(ii) (Aα)(αêU →. ⊨α → ⊨ F(α))

(iii) (Aα)(Aβ)(α,βêU →. ⊨ F(α=>β) => F(α) => F(β))

(iv) (Aα)(αêU → ⊨ F(α)=>α)

ser man altså at operatorene Ser°;(x,t), Husk°;(x,t), Innse°;(x,t) og Med°;(z,x,t) også hører med i mengden av T-operatorer.

Det andre som bør nevnes er at vi nå i prinsippet kan utlede talløse setninger som kombinerer de ulike epistemiske operatorene som vi har nevnt. For eksempel er det lett å vise sats:

⊨ Tror°;(x,t)(Ser°;(x',t')(α)) => Tror°;(x,t)(Ser°;(x',t')(¬¬ α))

for bare å trekke frem et vilkårlig eksempel. Det bør også nevnes at dersom x;1, x;2, x;3 .... er distinkte personer og t;1, t;2, t;3 .... er distinkte tidspunkter så er også oeprasjonene Vet°;(x;1,t;1), Vet°;(x;2,t;2), Vet°;(x;2,t;2), ... normalt distinkte. Det er kanskje mulig at to forskjellige personer ved to forskjellige tidspunkter kan vite nøyaktig det samme, ie. ha identiske kunnskapsfelt, men vi skal ikke drøfte dette ytterst spesielle filosofiske spørsmål her.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

§ 2.3 Satser som gjelder iterasjoner av operasjoner av typen R°;(x,t)

Vi gir først noen definisjoner som vi har bruk for.

Anta <K;n>/nêN-{0}/ er en sekvens av K-funksjoner. Da defineres L;n (nêN-{0}) induktivt ved:

Definisjon 2.3.1: Anta <K;n>/iêN-{0}/ er en sekvens av K-funksjoner. Da setter vi:
(a) L;1 = K;1
(b) L;(n+1) = K;(n+1)oL;n

Merk at dersom F og G er to funksjoner i U^U, så er FoG definert ved
FoG = Mg(<x,y>: (Ez)(<x,z>êG & <z,y>êF))
Det skulle være lett å utlede at at (FoG)(α) = F(G(α)). Vi behøver ikke gi noe detaljert bevis for dette her.

Tilsvarende defineres en sekvens M;n (nêN-{0}) slik:

Definisjon 2.3.2: Anta <K;n>/iêN-{0}/ er en sekvens av K-funksjoner. Da setter vi:
(a) M;1= CK;1
(b) M;(n+1) = CK;(n+1)o M;n

La oss gi noen eksempler i forbindelse med disse definisjonene. Vi har at de epistemiske operasjonene vi har nevnt så langt i dette avsnittet er K-funskjoner. Tenker man seg derfor en sekvens <K;n>/nêN-{0}/ der K;1= Ser°;(x,t), K;2 = Tror°;(x,t) ,K;3= Vet°;(x,t) og K;n = Innse°;(x,t) for alle n>3, vil dette være et eksempel på en sekvens av K-funksjoner som er så godt som et hvilket som helst annet.

Som man ser vil vi da ha, om man holder seg til Definisjon2.3.1, at L;3(α) = Vet°;(x,t)(Tror°;(x,t)(Ser°;(x,t)(α))). Ser man på L;5, ser man at man har at L;5(α) = Innse°;(x,t)(Innse°;(x,t)(Vet°;(x,t)(Tror°;(x,t)(Ser°;(x,t)(α))))).

Ser vi på den duale funksjonen M;n og baserer oss på den samme sekvens av K-funksjoner, er det ikke vanskelig å se at

M;3(α) = CVet°;(x,t)(CTror°;(x,t)(CSer°;(x,t)(α))) og at

M;5(α) = CInnse°;(x,t)(CInnse°;(x,t)(CVet°;(x,t)(CTror°;(x,t)(CSer°;(x,t)(α))))) Fra Teorem 2.3.3 som vi vil formulere og bevise nedenfor følger det da at utsagnet CVet°;(x,t)(CTror°;(x,t)(CSer°;(x,t)(α))) faktisk er ekvivalent med utsagnet

¬Vet°;(x,t)(Tror°;(x,t)(Ser°;(x,t)(¬α)))

Vårt første teorem sier at sammensetningen av to K-funksjoner selv er en K-funksjon:

Teorem 2.3.1: Anta F og G er K-funksjoner. Da er FoG også en K-funksjon.

Bevis: Fra forutsetningene i satsen og definisjonen av K-funksjon følger det at vi har:teore
(1) F: U → U
(2) (Aα)(αêU →. ⊨α → ⊨ F(α))

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(3) $(A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} U \rightarrow \models F(\alpha => \beta) => ((F(\alpha) => F(\beta)))$

og dessuten at

(4) $G: U \rightarrow U$

(5) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} U \rightarrow . \models \alpha \rightarrow \models G(\alpha))$

(6) $(A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} U \rightarrow \models G(\alpha => \beta) => (G(\alpha) => G(\beta)))$

Det vil være tilstrekkelig å vise følgende:

(7) $FoG : U \rightarrow U$

(8) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} U \rightarrow . \models \alpha \rightarrow \models F(G(\alpha)))$

(9) $(A\alpha)(A\beta)(\alpha,\beta \hat{e} U \rightarrow . \models F(G(\alpha => \beta)) => (F(G(\alpha)) => F(G(\beta))))$

Når det gjelder (7) er det temmelig opplagt at dette holder. Vi gir derfor intet detaljert bevis for denne påstanden. La oss bevise (8). Anta for vilkårlig α at (10) $\alpha \hat{e} U$ & $\models \alpha$. Fra dette og (5) følger $\models G(\alpha)$. Men $G(\alpha) \hat{e} U$. Vi har derfor i lys av (2) at $\models F(G(\alpha))$. Dette viser at (8) holder.

La oss så vise at (9) holder. Anta for vilkårlige α,β at $\alpha,\beta \hat{e} U$. Da har vi ved hjelp av (6) at (11) $\models G(\alpha => \beta) => (G(\alpha) => G(\beta))$. Fra dette følger ved hjelp av (2) at

(12) $\models F(G(\alpha => \beta) => (G(\alpha) => G(\beta)))$

Nå har vi ved hjelp av (3) at

(13) $\models F(G(\alpha => \beta) => (G(\alpha) => G(\beta))) => . F(G(\alpha => \beta)) => F(G(\alpha) => G(\beta))$

Fra (12) og (13) følger ved hjelp av ren utsagnslogikk, modus ponens, at

(14) $\models F(G(\alpha => \beta)) => F(G(\alpha) => G(\beta))$

Igjen har vi ved hjelp av (3) at

(15) $\models F(G(\alpha) => G(\beta)) => . F(G(\alpha)) => F(G(\beta))$

Men fra (14) og (15) følger ved hjelp av ren setningslogikk:

$\models F(G(\alpha => \beta)) => (F(G(\alpha)) => F(G(\beta)))$

som er et vi ønsker. Siden α,β var vilkårlige utsagn følger det at (9) holder. **QED**.

Det følgende teorem kan bevises ved hjelp av det foregående, og kan oppfattes som en generalisering av Teorem 2.3.1:

Teorem 2.3.2: Anta $<K;n>/n \hat{e} N-\{0\}/$ er en sekvens av K-funksjoner. Da er L;n en K-funksjon for alle $n \hat{e} N$ der $n>=1$.

Bevis: Satsen bevises ved induksjon på n. *Basistrinn*: Det er åpenbart at den holder for n=1 siden K;1 er en K-funksjon og L;1= K;1 per definisjon. *Induksjonstrinn*: Anta satsen holder for n>=1. Da har vi (1) L;n er en K-funksjon. Vi skal da vise at den holder for L;(n+1). Men L;(n+1) = K;(n+1)oL;n der K;(n+1) per forutsetning er en K-funksjon. Det følger da ved hjelp av foregående teorem at L;(n+1) er en K-funksjon. **QED**.

Det følgende teorem viser at L;n og M;n er duale operatorer for alle n>=1, og derfor står i samme forhold til hverandre som logisk nødvendig og logisk mulig forholder seg til hverandre i vanlige modallogiske systemer:

Teorem 2.3.3: Anta $<K;i>/i \hat{e} N-\{0\}/$ er en sekvens av K-funksjoner og at $\alpha \hat{e} U$. Da har vi for alle n>=1:

(a) $L;n(\neg\alpha) = \neg M;n(\alpha)$

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(b) $CL;n = M;n$

Bevis: *Ad (a)*: Satsen bevis ved induksjon. Basistrinn: n=1. Da har vi at

(1) $L;n(\neg\alpha) = L;1(\neg\alpha) = K;1(\neg\alpha)$ og dessuten i lys av definisjonen av M;n at (2) $\neg M;n(\alpha) = \neg CK;1(\alpha) = \neg\neg K;1(\neg\alpha) = K;1(\neg\alpha)$. Fra (1) og (2) fremgår det at satsen holder for n=1.

Induksjonstrinn: Vi anta at satsen holder for n og skal vise at den da holder for n+1. Anta derfor at (3) $L;n(\neg\alpha) = \neg M;n(\alpha)$ for vilkårlig $\alpha\hat{e}U$. Nå har vi i kraft av definisjonen av L;n at $L;(n+1)(\neg\alpha) = K;(n+1)(L;n(\neg\alpha))$ og der for ved hjelp av (3) at

$L;(n+1)(\neg\alpha) = K;(n+1)(L;n(\neg\alpha)) = K;(n+1)(\neg M:n(\alpha)) =$

$\neg\neg K;(n+1)(\neg M;n(\alpha)) = \neg CK;(n+1)(M;n(\alpha)) = \neg M;(n+1)(\alpha)$.

Den siste identiteten følger ved hjelp av definisjonen av M;n. Vi ser at satsen holder for n+1 om den holder for n>=1. Det følger at denholder for alle n. Dette viser at punkt (a) holder.

Ad (b): Fra punkt (a) følger $\neg L;n(\neg\alpha) = M;n(\alpha)$. Men fra dette har vi ved hjelp av definisjonen av operasjonen C at $CL;n(\alpha) = M;n(\alpha)$. Siden α var et vilkårlig utsagn følger at $CL;n = M;n$. **QED**.

Det følgende teorem kan oppfattes som et korollar til Teorem 2.2.1 i §2.2. Det kan også oppfattes som en generalisering av dette teorem. Man kan se på Teorem 2.2.1 som det spesialtilfelle man får når man i dette teoremet setter n=1.

Teorem 2.3.4 (Iterasjonsteorem I). Anta $\alpha;i\ \hat{e}U$ ($i\hat{e}N-\{0\}$) og at $\alpha,\beta\hat{e}U$. Anta $<K;n>/n\hat{e}N-\{0\}/$ er en sekvens av K-funksjoner. Da har vi om n>=1 & m>=1:

(a) $\models L;n(\alpha\Omega\beta) <=> L;n(\alpha)\Omega L;n(\beta)$

(b) $\models L;n(SNu/i,1,m/(\alpha;i)) <=> SNu/i,1,m/(L;n(\alpha;i))$

(c) $\models \alpha => \beta \rightarrow \models CL;n(\alpha) => CL;n(\beta)$

(d) $\models \alpha => \beta \rightarrow \models L;n(\alpha) => L;n(\beta)$

(e) $\models SNu/i,1,m/(\alpha;i) => \beta \rightarrow \models SNu/i,1,m/(L;n(\alpha;i)) => L;n(\beta)$

(f) $\models \alpha <=> \beta \rightarrow \models L;n(\alpha) <=> L;n(\beta)$

(g) $\models \alpha <=> \beta \rightarrow \models CL;n(\alpha) <=> CL;n(\beta)$

Bevis: Anta forutsetningene holder. Da har vi at L;n er en K-funksjon ifølge Teorem 2.3.2. Vi kan da i Teorem 2.2.1 som gjelder allment for K-funksjoner instansiere med hensyn på L;n, dvs. vi kan overalt hvor det i Teorem 2.2.1 står "F" sette inn "L;n". Da får vi satsen ovenfor som selvfølgelig må holde siden Teorem 2.2.1 holder. **QED**.

Det følgende teorem kan oppfattes som et korollar til Teorem 2.2.2 i §2.2. Også dette kan oppfattes som en generalisering av Teorem 2.2.2.

Teorem 2.3.5 (Iterasjonsteorem II) Anta $\alpha;i\ \hat{e}U$ ($i\hat{e}N-\{0\}$) og at $\alpha,\beta,\gamma\ \hat{e}U$. Anta $<K;n>/n\hat{e}N-\{0\}/$ er en sekvens av K-funksjoner. Da har vi om n>=1 & m>=1:

(i) $\models L;n(\alpha)\ \Omega\ L;n(\alpha=>\beta) => L;n(\beta)$

(ii) $\models L;n(SNu/i,1,m/(\alpha;i))=>\beta. =>. SNu/i,1,m/L;n(\alpha;i) =>\beta$

(iii) $\models L;n(\alpha<=>\beta) =>. (L;n(\alpha) <=>L;n(\beta))$

(iv) $\models L;n(\alpha <=> \beta) =>. L;n(\alpha o\gamma) <=> L;n(\beta o\gamma)$

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(v) ⊨ L;n(α <=> β) =>. L;n(γoα) <=> L;n(γoβ)
(vi) ⊨ L;n(α <=> β) =>. L;n(¬α) <=> L;n(¬β)
(vii) ⊨ L;n(α <=> β) =>. CL;n(α) <=> CL;n(β)
(viii) ⊨ L;n(α <=> β) =>. CL;n(αoγ) <=> CL;n(βoγ)
(ix) ⊨ L;n(α <=> β) =>. CL;n(γoα) <=> L;n(γoβ)
(x) ⊨ CL;n(UNu/i,1,m/(α;i)) <=> UNu/i,1,m/(CL;n(α;i))
(xi) ⊨ L;n(SNu/i,1,m/(α;i)) <=> ¬CL;n(UNu/i,1,m/(¬α;i))
(xii) ⊨ L;n(UNu/i,1,m/(α;i)) <=> ¬CL;n(SNu/i,1,m/(¬α;i))
(xiii) ⊨ CL;n(SNu/i,1,m/(α;i)) <=> ¬L;n(UNu/i,1,m/(¬α;i))
(xiv) ⊨ CL;n(UNu/i,1,m/(α;i) <=> ¬L;n(SNu/1,1,m/(¬α;i))
(xv) ⊨ L;n(SNu/i,1,m/(α;i) => βΩ¬β) => L;n(UNu/i,1,m/(¬α;i))

Bevis: Anta forutsetningene holder. Da har vi at L;n er en K-funksjon ifølge Teorem 2.3.2. Vi kan da i Teorem 2.2.2 som gjelder allment for K-funksjoner instansiere med hensyn på L;n, dvs. vi kan overalt hvor det i Teorem 2.2.2 står "F" sette inn "L;n". Da får vi satsen ovenfor som selvfølgelig må holde siden Teorem 2.2.2 holder. **QED**.

Det følgende teorem kan oppfattes som et korollar til Teorem 2.2.3 i §2.2.

Teorem 2.3.6 (Iterasjonsteorem III) Anta α,βêU. Anta <K;n>/nêN-{0}/ er en sekvens av K-funksjoner. Da har vi:
(i) ⊨ L;n(α=>β) => CL;n(α) => CL;n(β)
(ii) ⊨ L;n(αUβ) Ω L;n(¬α). => L;n(β)
(iii) ⊨ L;n(αUβ) Ω CL;n(¬β) => CL;n(α)
(iv) ⊨ L;n(α => β) =>.L;n(¬β) => L;n(¬α)
(v) ⊨ L;n(α => β) => ¬CL;n(β) => ¬CL;n(α)
(vi) ⊨ CL;n(αΩβ) => CL;n(α) & CL;n(β)
(vii) ⊨ L;n(αUβ) => L;n(β)UCL;n(α)
(viii) ⊨ CL;n(¬β) Ω L;n(¬α) => CL;n(¬αΩ¬β)
(ix) ⊨ CL;n(β) Ω L;n(α) =>CL;n(αΩβ)
(x) ⊨ L;n(α) => CL;n(β) => CL;n(αΩβ)
(xi) ⊨ CL;n(¬β) => ¬L;n(αΩβ)

Bevis: Anta forutsetningene holder. Da har vi at L;n er en K-funksjon ifølge Teorem 2.3.2. Vi kan da i Teorem 2.2.3 som gjelder allment for K-funksjoner instansiere med hensyn på L;n, dvs. vi kan overalt hvor det i Teorem 2.2.3 står "F" sette inn "L;n". Da får vi satsen ovenfor som selvfølgelig må holde siden Teorem 2.2.3 holder. **QED**.

Vi skal nå avslutte denne paragrafen ved å se på noen eksempler som er relatert til de konkrete epistemiske operatorene som vi har innført, ie. Ser°;(x,t), Husk°;(x,t), Innse°;(x,t), Med°;(z,x,t), Vet°;(x,t) og Tror°;(x,t). Her bruker vi Tror°;(x,t) som eksempel. Vi gir først den følgende definisjon:

Definisjon 2.3.3 Definer Tror°(n);(x,t) induktivt slik:
(i) Tror°(1);(x,t) = Tror°;(x,t)

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(ii) Tror°(n+1);(x,t) = Tror°;(x,t)(Tror°(n);(x,t))

På grunnlag av denne definisjonen og den tidligere definisjonen av L;n kan man vise:

Lemma 2.3.1 Definer K;n ved: K;n = Tror°;(x,t) for alle n>=1. (Mao. er K;n en konstant funksjon) Da har vi for alle n>=1:

L;n = Tror°(n);(x,t)

Bevis: Satsen bevises ved et ytterst enkelt induksjonsbevis. Detaljene overlates til leseren. **QED**.

Den følgende sats kan meget lett utledes fra Iterasjonsteorem II ovenfor. Vi nevner at man kan formulere helt tilsvarende følgesetninger i forbindelse med Iterasjonsteorem I og III. Siden poenget bare er å illustrere hvordan disse teoremene kan forbindes med de epistemiske operatorene som vi har definert, finner vi dette helt unødvendig.

Korollar 2.3.1 (Korollar til Iterasjonsteorem II) Anta α;i êU (iêN-{0}) og at α,β,γ êU. Definer K;n ved

K;n = Tror°;(x,t) for alle n>=1.

Da har vi om n>=1 & m>=1:

(i) ⊨ Tror°(n);(x,t)(α) Ω Tror°(n);(x,t)(α=>β) => Tror°(n);(x,t)(β)
(ii) ⊨ Tror°(n);(x,t)(SNu/i,1,m/(α;i))=>β. =>. SNu/i,1,m/Tror°(n);(x,t)(α;i) =>β
(iii) ⊨ Tror°(n);(x,t)(α<=>β) =>. (Tror°(n);(x,t)(α) <=>Tror°(n);(x,t)(β))
(iv) ⊨ Tror°(n);(x,t)(α <=> β) =>. Tror°(n);(x,t)(αoγ) <=> Tror°(n);(x,t)(βoγ)
(v) ⊨ Tror°(n);(x,t)(α <=> β) =>. Tror°(n);(x,t)(γoα) <=> Tror°(n);(x,t)(γoβ)
(vi) ⊨ Tror°(n);(x,t)(α <=> β) =>. Tror°(n);(x,t)(¬α) <=> Tror°(n);(x,t)(¬β)
(vii) ⊨ Tror°(n);(x,t)(α <=> β) =>. CTror°(n);(x,t)(α) <=> CTror°(n);(x,t)(β)
(viii) ⊨ Tror°(n);(x,t)(α <=> β) =>. CTror°(n);(x,t)(αoγ) <=> CTror°(n);(x,t)(βoγ)
(ix) ⊨ Tror°(n);(x,t)(α <=> β) =>. CTror°(n);(x,t)(γoα) <=> Tror°(n);(x,t)(γoβ)
(x) ⊨ CTror°(n);(x,t)(UNu/i,1,m/(α;i)) <=> UNu/i,1,m/(CTror°(n);(x,t)(α;i))
(xi) ⊨ Tror°(n);(x,t)(SNu/i,1,m/(α;i)) <=> ¬CTror°(n);(x,t)(UNu/i,1,m/(¬α;i))
(xii) ⊨ Tror°(n);(x,t)(UNu/i,1,m/(α;i)) <=> ¬CTror°(n);(x,t)(SNu/i,1,m/(¬α;i))
(xiii) ⊨ CTror°(n);(x,t)(SNu/i,1,m/(α;i)) <=> ¬Tror°(n);(x,t)(UNu/i,1,m/(¬α;i))
(xiv) ⊨ CTror°(n);(x,t)(UNu/i,1,m/(α;i) <=> ¬Tror°(n);(x,t)(SNu/1,1,m/(¬α;i))
(xv) ⊨ Tror°(n);(x,t)(SNu/i,1,m/(α;i) => βΩ¬β) => Tror°(n);(x,t)(UNu/i,1,m/(¬α;i))

Bevis: Fra forutsetningene i satsen og Lemma 2.3.1 følger det at L;n = Tror°(n);(x,t). Fra dette, forutsetningene i satsen, og Teorem2.3.5, (Iterasjonsteorem II) følger så satsen.

Helt tilslutt nevner vi at dette teoremet holder uavkortet om vi overalt i dette teoremet erstatter "Tror" med et av uttrykkene "Vet", "Innse", "Husk", "Ser" og med visse modifikasjoner "Med". Man må da tilsvarende endre Definisjon 2.3.3 og Lemma 2.3.1.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Dermed har vi fullført vår oppgave som var å gi leseren en fyldig og utførlig oversikt over hva slags satser som gjelder for den familien av epistemiske operatorer vi har studert i de siste tre paragrafene.

§3 De grunnleggende egenskapene til operasjonen Tror*;(x,t)

Vi har tidligere, i §2, definert operasjonen Tror*;(x,t). Som man husker var denne én blandt en familie av operasjoner, nemlig Ser*;(x,t), Innse*;(x,t), Husk*;(x,t), Med*(z,x,t) og Vet*;(x,t). Implikasjonsforholdene mellom disse operasjonene ble anskueliggjort i Figur 3 i §2. I det følgende tar vi for oss egenskapene til Tror*;(x,t), men man bør huske på at alt det vi skriver om denne operasjonen også kan anvendes på enhver av operasjonene i den familien vi har antydet. Kort sagt alt det som gjelder om Tror*;(x,t) gjelder for enhver operasjon R*:(x,t) der R Inkl IxTxPxU;f.

Før vi går videre minner vi om at uttrykket "Tror*;(x,t)(y)" leses "Utsagnet som sier at utsagnet y er ekvivalent med et finstrukturert utsagn som personen x tror beskriver et faktisk forhold ved tidspunktet t". "Tror*;(x,t)(y)" er altså en singulær term som betegner et bestemt utsagn, mens de entitetene som en person tror beskriver faktiske forhold ved tidspunktet t er det vi har valgt å kalle for *finstrukturerte* utsagn.

Den første satsen vi skal se på sier dette: Er y et finstrukturert utsagn som beskriver et forhold personen x ved tidspunktet t i verdenen w tror foreligger så er utsagnet Tror*;(x,t)(μ;-1(μ;f(y)) sant i verdenen w. Formalisert kan satsen formuleres slik:

Teorem 3.1 Anta <x,t>êPxT, wê I og yêU;f. Da gjelder:
Tror;(w,t)(x,y) → w ⊨ Tror*;(x,t)(μ;-1(μ;f(y))

Bevis: Anta (1) Tror;(w,t)(x,y). Da har vi yêU;f. Det følger at (2) μ;f(y)êPt(I) og at (3) μ;-1(μ;f(y)) êU. Fra (1) -(3) kan man slutte:
(4) μ;-1(μ;f(y)) êU & yêU;f & μ(μ;-1(μ;f(y))) = μ;f(y) & Tror;(w,t)(x,y)
Fra (4) og den definisjonen vi ga av Tror*;(x,t)(y) i §2, nemlig Definisjon 2.4, følger så:
w ⊨ Tror*;(x,t)(μ;-1(μ;f(y)). **QED**.

Satsen ovenfor er naturligvis ytterst triviell, men den viser i det minste en sammenheng mellom relasjonen Tror og operasjonen Tror*;(x,t).

Vår neste sats viser at utsagnet Tror*;(x,t)(y) impliserer Tror°;(x,t)(y), med andre ord viser det at dersom utsagnet y er ekvivalent med noe x tror ved tidspunktet t er det også en logisk konskevens av alt det x tror ved t. Satsen kan formuleres mer presist slik:

Teorem 3.2 Anta <x,t>êPxT & yêU. Da gjelder:
⊨ Tror*;(x,t)(y) => Tror°;(x,t)(y)

Bevis: Anta forutsetningene holder. Det vil da være tilstrekkelig å vise at
(+) w ⊨ Tror*;(x,t)(y) → w ⊨Tror°;(x,t)(y)

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

holder for alle wêI. Anta derfor for vilkårlig w at (1) w ⊨ Tror*;(x,t)(y). Fra definisjonen av Tror* kan man da slutte at det finnes noe z der vi har:

(2) wêI & yêU & zêU;f & μ(y) = μ;f(z) & Tror;(w,t)(x,z)

Fra den siste konjunkten i (2) følger

(3) μ;f(z)ê Mg(μ;f(q): Tror;(w,t)(x,q)).

og derfor at (4) I∩Mg(μ;f(q): Tror;(w,t)(x,q)) Inkl μ;f(z). Men fra dette følger ved hjelp av (2) at (4) wêI & yêU & I∩Mg(μ;f(q): Tror;(w,t)(x,q)) Inkl μ(y). Fra (4) og definisjonen av Tror°, Definisjon 2.1, kan man så slutte w ⊨ Tror°;(x,t)(y). Dette viser at satsen holder. **QED**.

Satsen viser at Tror*;(x,t)(y) impliserer Tror°;(x,t)(y). Det skulle imidlertid være klart at implikasjonen den andre veien ikke holder.

Det er selvfølgelig mulig å iterere operasjonen Tror*;(x,t) så mye man vil. Man kan gjenta operasjonen to ganger slik at man får utsagnet Tror*;(x,t)(Tror*;(x,t)(y)). Dette er det utsagnet som sier at utsagnet Tror*;(x,t)(y) er ekvivalent med et finstrukturert utsagn x tror ved t. Gjentar man operasjonen tre ganger får man Tror*;(x,t)(Tror*;(x,t)(Tror*;(x,t)(y))) som er utsagnet som sier at utsagnet Tror*;(x,t)(Tror*;(x,t)(y)) er ekvivalent med et finstrukturert utsagn x tror ved t. Vi skal nå definere Tror*(n);(x,t)(y) der n er et hvilket som helst naturlig tall >= 1. Dette skjer ved den følgende induktive definisjon:

Definisjon 3.1 Vi setter:

(i) Tror*(1);(x,t)(α) = Tror*;(x,t)(y)

(ii) Tror*(n+1);(x,t)(α) = Tror*;(x,t)(Tror*(n);(x,t)(α))

I lys av denne definisjonen har vi for eksempel:

Tror*(3);(x,t)(y) = Tror*;(x,t)(Tror*;(x,t)(Tror*;(x,t)(y)))

Vi kan nå formulere den følgende sats som angir noen grunnleggende, men ganske trivielle, egenskaper ved operasjonen Tror*;(x,t):

Teorem 3.3 Anta <x,t>êPxT og α,βêU. Da har man om n>=1:

(i) ⊨ α<=>β → ⊨ Tror*;(x,t)(α) <=> Tror*;(x,t)(β)

(ii) ⊨ α<=>β → ⊨ Tror*(n);(x,t)(α) <=> Tror*(n);(x,t)(β)

Bevis: *Ad (i)*: Anta (1) ⊨ α<=>β. Dette innebærer at (Aw)(wêI → . wêμ(α) ↔ wêμ(β)). Dette impliserer at (2) μ(α)=μ(β). For å vise at satsen holder vil det være tilstrekkelig å vise at følgende holder for alle wêI: w ⊨ Tror*;(x,t)(α) ↔ w ⊨ Tror*;(x,t)(β)
Når har vi ved hjelp av definisjonen av Tror*:

w ⊨ Tror*;(x,t)(α) ↔

wêI & αêU & (Ez)(zêU;f & μ(α) = μ;f(z) & Tror;(w,t)(x,z)) ↔ (i lys av (2))

wêI & βêU & (Ez)(zêU;f & μ(β) = μ;f(z) & Tror;(w,t)(x,z)) ↔

w ⊨ Tror*;(x,t)(β).

Dette viser at punkt (i) holder.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Ad (ii): Vi viser dette ved induksjon på n. (a) At satsen holder for n=1 er opplagt i lys av Definisjon 3.1 og punkt (i). (b). Anta satsen holder for n>=1, ie at

(1) $\models \alpha <=> \beta \rightarrow \models Tror^*(n);(x,t)(\alpha) <=> Tror^*(n);(x,t)(\beta)$

Dette er induksjonshypotesen. Anta nå $\models \alpha <=> \beta$. Da har vi ved hjelp av (1) at
(2) $\models Tror^*(n);(x,t)(\alpha) <=> Tror^*(n);(x,t)(\beta)$. Fra dette og punkt (i) følger:
(3) $\models Tror^*;(x,t)(Tror^*(n);(x,t)(\alpha)) <=> Tror^*;(x,t)(Tror^*(n);(x,t)(\beta))$. Men fra dette kan vi ved hjelp av Definisjon 3.1 slutte $\models Tror^*(n+1);(x,t)(\alpha) <=> Tror^*(n+1);(x,t)(\beta)$.
Dette viser (ii) holder. **QED**.[57]

I forbindelse med Teorem 3.3 kan det være av en viss interesse å studere den følgende sats som kan oppfattes som et meget enkelt korollar til dette teoremet.

Teorem 3.4 Anta $<x,t> \hat{e} PxT$ og $\alpha,\beta \hat{e} U$ Da gjelder:

(i) $\models \alpha => \beta \rightarrow \models Tror^*(1);(x,t)(\alpha) <= > Tror^*;(x,t)(\alpha \Omega \beta)$

(ii) $\models \alpha <=> \beta \rightarrow \models Tror^*(1);(x,t)(\neg\alpha) <= > Tror^*;(x,t)(\neg\beta)$

Bevis: *Ad (i)*: Anta $\models \alpha => \beta$: Da følger rent utsagnslogisk $\models \alpha <=> \alpha \Omega \beta$. Men fra dette og punkt (i) i Teorem 3.3 kan man slutte: $\models Tror^*(1);(x,t)(\alpha) <= > Tror^*;(x,t)(\alpha \Omega \beta)$.
Ad (ii): Anta $\models \alpha <=> \beta$. Da har man $\models \neg\alpha <=> \neg\beta$. Men fra dette og Teorem 3.3 følger umiddelbart $\models Tror^*(1);(x,t)(\neg\alpha) <= > Tror^*;(x,t)(\neg\beta)$. **QED**.

I forbindelse med operasjonen $Tror^\circ;(x,t)$ introduserte vi en dual operasjon $CTror^\circ;(x,t)$. Helt analogt innfører vi i forbindelse med $Tror^*;(x,t)$ den duale operasjonen $CTror^*;(x,t)$.
Dette gjøres ved den følgende definisjon:

Definisjon 3.2 $CTror^*;(x,t)(\alpha) = \neg\, Tror^*;(x,t)(\neg\alpha)$

Tilsvarende definisjonen av $Tror^*(n);(x,t)$ kan vi definere $CTror^*(n);(x,t)$:

Definisjon 3.3 Vi setter:

(i) $CTror^*(1);(x,t)(\alpha) = CTror^*;(x,t)(y)$

(ii) $CTror^*(n+1);(x,t)(\alpha) = CTror^*;(x,t)(CTror^*(n);(x,t)(\alpha))$

Vi kan nå bevise den følgende sats:

Teorem 3.5 Anta $<x,t> \hat{e} PxT$ og $\alpha,\beta \hat{e} U$. Da har man om n>=1:

(i) $\models \alpha <=> \beta \rightarrow \models CTror^*;(x,t)(\alpha) <=> CTror^*;(x,t)(\beta)$

(ii) $\models \alpha <=> \beta \rightarrow \models CTror^*(n);(x,t)(\alpha) <=> CTror^*(n);(x,t)(\beta)$

(iii) $\models Tror^*;(x,t)(\alpha) <=> \neg CTror^*;(x,t)(\neg\alpha)$

(iv) $\models Tror^*(n);(x,t)(\alpha) <=> \neg CTror^*(n);(x,t)(\neg\alpha)$

57 I dette beviset har vi gjort noen nesten komiske omveier. Fra $\models \alpha <=> \beta$ følger $\alpha=\beta$. Det skulle da umiddelbart være klart at $\models Tror^*(n);(x,t)(\alpha) <=> Tror^*(n);(x,t)(\beta)$ for alle n>=1.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Bevis: *Ad (i)*: Anta (1) ⊨ α<=>β. Fra dette kan vi slutte (2) α=β. Nå har man ved ren utsagnslogikk ⊨ CTror*;(x,t)(α) <=> CTror*;(x,t)(α). Fra dette og (2) følger: ⊨ CTror*;(x,t)(α) <=> CTror*;(x,t)(β). Dette viser at (i) holder:

Ad (ii): Dette bevise på nøyaktig samme måte som (i).

Ad (iii): Vi har (ved ren utsagnslogikk) at (1) ⊨ α <=> ¬¬α. Fra dette og Teorem 3.3, punkt (i) kan man slutte (2) ⊨ Tror*;(x,t)(α) <=> Tror*;(x,t)(¬¬α). Fra dette følger ved ren utsagnslogikk: (3) ⊨ Tror*;(x,t)(α) <=> ¬¬Tror*;(x,t)(¬¬α). Herav følger ved hjelp av Definisjon 3.2 at ⊨ Tror*;(x,t)(α) <=> ¬CTror*;(x,t)(¬α), som er det vi ønsker.

Ad (iv): Dette bevises ved induksjon på n. At satsen holder for n=1 fremgår av punkt (iii). Anta den holder for n, ie. anta

(1) ⊨ Tror*(n);(x,t)(α) <=> ¬CTror*(n);(x,t)(¬α)

Vi skal vise at den holder for n+1. Nå har vi ved hjelp av Definisjon 3.1:

(2) ⊨ Tror*(n+1);(x,t)(α) <=> Tror*;(x,t)(Tror*(n);(x,t)(α))

Fra (1) og Teorem 3.3, punkt (i) kan man slutte:

(3) ⊨ Tror*;(x,t)(Tror*(n);(x,t)(α)) <=>Tror*;(x,t)(¬CTror*(n);(x,t)(¬α))

Fra dette følger så ved hjelp av setningslogikk:

(4) ⊨ Tror*;(x,t)(Tror*(n);(x,t)(α)) <=> ¬¬Tror*;(x,t)(¬CTror*(n);(x,t)(¬α))

Fra dette og definisjonen av CTror* (ie. Definisjon 3.2) har man:

(5) ⊨ Tror*;(x,t)(Tror*(n);(x,t)(α)) <=> ¬CTror*;(x,t)(CTror*(n);(x,t)(¬α))

Fra dette, (2) og Definisjon 3.3, punkt (2), kan man konkludere med at:

(6) ⊨ Tror*(n+1);(x,t)(α) <=> ¬CTror*(n+1);(x,t)(¬α))

Dette viser at punkt (iv) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Vi har nå sett på endel grunnleggende egenskaper som operasjonen Tror*;(x,t) : U → U er i besittelse av. La oss bemerke at alle de teoremene vi har vist ovenfor fortsetter å holde om man overalt erstatter uttrykket "Tror" med "Vet", "Innse", "Ser", "Husk" eller "Med". (Når det gjelder det siste uttrykket må man foreta visse andre nokså opplagte modifikasjoner.)

Dette bringer oss naturlig over til beviset for de implikasjonene vi har illustrert i Figur 3 i §1. Disse implikasjonene kan sammenfattes i det følgende Teorem:

Teorem 3.6 Anta αêU og <x,t>êPxT & zêP. Da har man

(a) ⊨ Ser*;(x,t)(α) => Vet*;(x,t)(α)
(b) ⊨ Innse*;(x,t)(α) => Vet*;(x,t)(α)
(c) ⊨ Husk*;(x,t)(α) => Vet*;(x,t)(α)
(d) ⊨ Med*;(z,x,t)(α) => Vet*;(x,t)(α)
(e) ⊨ Vet*;(x,t)(α) => Tror*;(x,t)(α)
(f) ⊨ Vet*;(x,t)(α) => α
(g) ⊨ Ser*;(x,t)(α) => Innse*;(x,t)(α)
(h) ⊨ Husk*;(x,t)(α) => Innse*;(x,t)(α)

Strengt tatt er punktene (g) og (h) ikke representert på Figur 3 i §1.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Bevis: Vi skal ikke gi bevis for alle punktene fordi bevisene i nesten alle tilfellene er helt analoge. Vi illustrerer bare bevismetoden ved å bevise punkt (c) og punkt (f).

Ad (c): Det vil være nok å bevise at

(1) w ⊨ Husk*;(x,t)(α) → w ⊨ Vet*;(x,t)(α)

holder for alle wêI. Anta derfor for vilkårlig wêI at (2) w ⊨ Husk*;(x,t)(α). Da følger ved hjelp av definisjonen av Husk* at

(3) wêI & αêU & (Ez)(zêU;f & μ(α) = μ;f(z) & Husk;(w,t)(x,z)). Nå har vi imidlertid i kraft av aksiom E4 : Husk;(w,t)(x,z) → Vet;(w,t)(x,z). Det følger fra dette og (3) at

(4) wêI & αêU & (Ez)(zêU;f & μ(α) = μ;f(z) & Vet;(w,t)(x,z))

Men fra dette og definisjonen av Vet*;(x,t) følger w ⊨ Vet*;(x,t)(α). Dette viser at (c) holder. La oss se på punkt (f) som nesten er mer trivielt:

Ad (f): Det vil være nok å vise: w ⊨ Vet*;(x,t) → w êμ(α) for alle wêI

Anta (1) w ⊨ Vet*;(x,t)(α) for vilkårlig wêI. Da følger ved hjelp av definisjonen av Vet* at

(2) wêI & αêU & (Ez)(zêU;f & μ(α) = μ;f(z) & Vet;(w,t)(x,z))

I kraft av aksiom E2 har vi (3) (Ay)(Vet;(w,t)(xy) → wêμ;f(y)). Fra (2) følger:

(4) μ(α) = μ;f(z) & Vet;(w,t)(x,z) for noe zêU;f. Dette og (3) impliserer

wêμ;f(z)=μ(α) og derfor wêμ(α). Dette viser (f) holder. De andre punktene i beviset bevises på samme måte som illustrert i beviset for (c). **QED**.

La oss til slutt nevne et teorem som sier litt mer om forholdet mellom Tror* og Tror° enn Teorem 3.2 ovenfor. Man har:

Teorem 3.7 Anta <x,t>êPxT og α,βêU og α;i êU for i=1,2,3 ..... (n>=1) Da gjelder:

(a) ⊨ Tror*;(x,t)(α) Ω Tror*;(x,t)(β) => Tror°;(x,t)(αΩβ)

(b) ⊨ SNu/i,1,n/ (Tror*;(x,t)(α;i)) => Tror°;(x,t)(SNu/i,1,n/(α;i))

Bevis: *Ad (a)*: Anta for vilkårlig wêI at (1) w ⊨ Tror*;(x,t)(α) Ω Tror*;(x,t)(β)

Fra (1) og definisjonen av Tror* følger eksisten av z1,z2 der man har:

(2.1) wêI & αêU & z;1êU;f & μ(α) = μ;f(z;1) & Vet;(w,t)(x,z;1)

(2.2) wêI & αêU & z;2êU;f & μ(β) = μ;f(z;2) & Vet;(w,t)(x,z;2)

Fra dette følger: μ;f(z;1), μ;f(z;2)ê Mg(μ;f(r): Tror;(w,t)(x,r)). Det følger at

(3) I∩ Mg(μ;f(r): Tror;(w,t)(x,r)) Inkl μ;f(z;1)∩μ;f(z;2)

Fra dette, (2.1) og (2.2) kan man slutte:

(4) I∩ Mg(μ;f(r): Tror;(w,t)(x,r)) Inkl μ(αΩβ). Men siden wêI & αΩβêU følger w ⊨ Tror°;(x,t)(αΩβ) i lys av definisjonen av Tror°. Dette viser at punkt (a) holder.

Ad (b): Dette bevises ved induksjon på n. Er n=1 holder satsen i kraft av Teorem 3.2. Holder den for n er det lett å vise at den holder for n+1 ved hjelp av punkt (a). **QED**.

Dette avslutter vår gjennomgang av satser for operasjonen Tror*;(x,t).

§4 Innledning

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

§4.1 Noen innledende bemerkninger og satser om sammenhengen mellom η(Tror);(x,t) og η(Tror*);(x,t)

Når vi idet følgende hovedsakelig ser nærmere på egenskapene til utsagnene η(Tror);(x,t), som er utsagnet som sier at trosfeltet til individet x ved tidspunktet t er rasjonelt organisert, og η(Tror*);(x,t) som er utsagnet som sier at mengden av alle de utsagn som er ekvivalente med et finstrukturert som x tror ved tidspunktet t er rasjonelt organisert, så bør det iaktas at vi bruker disse som *eksempler*. Våre betraktninger er like gyldige for de andre "epistemiske" relasjonene vi har betraktet, ie. Ser, Husk, Innse, Vet og Med. Istedet for å kommentere utsagnet η(Tror*);(x,t) kunne vi like gjerne ha sett på utsagnet η(Innse*);(x,t) eller η(Med*);(z,x,t). For den saks skyld kunne vi ta vårt utganspunkt i en hvilken som helst relasjon R Inkl IxTxPxU;f og betraktet utsagnene η(R);(x,t) og η(R*);(x,t).

Det må understrekes at utsagnene η(Tror);(x,t) og η(Tror*);(x,t) har forskjellig innhold. Det første utsagnet sier at mengden av alle de *finstrukturerte* utsagnene som x tror ved tidspunktet t er en rasjonelt organisert mengde av *finstrukturerte* utsagn. Det andre utsagnet sier at mengden av alle de *utsagn* som er ekvivalente med et eller annet finstrukturert utsagn som x tror ved tidspunktet t er en rasjonelt organisert mengde med *utsagn*. La oss minne om definisjonene av disse to begrepene:

Definisjon 4.1.1 Anta <x,t>ê PxT . Da setter vi:

(a) η(Tror);(x,t) = μ;-1(Mg(w: wêI & Rasj;f(Mg(y: Tror;(w,t)(x,y)))))

(b) η(Tror*);(x,t) = μ;-1(Mg(w: wêI &
Rasj(Mg(y: yêU & (Ez)(zêU;f & μ(y)=μ;f(z) & Tror;(w,t)(x,z))))))

Man ser tydelig fra punktene (a) og (b) i denne definisjonen at det dreier seg om to vidt forskjellige begreper. Siden vi tidligere har definert Tror*;(x,t)(y) ved:

Tror*;(x,t)(y) = μ;-1(Mg(w : wêI & yêU & (Ez)(μ;f(z) = μ(y) & Tror;(w,t)(x,z))))

kan det siste punktet i Definisjon 4.1.1 reformuleres slik:

η(Tror*);(x,t) = μ;-1(Mg(w: wêI & Rasj(Mg(y: yêU & w ⊨ Tror*;(x,t)(y)))))

Vi skal i de neste paragrafer redegjøre utførlig for en lang rekke med teoremer som sier noe om hva utsagnene η(Tror);(x,t) og η(Tror*);(x,t) impliserer. Her skal vi imidlertid bare se på implikasjonsforholdene mellom η(Tror);(x,t) og η(Tror*);(x,t). Hovedsakelig skal vi vise at det første utsagnet impliserer det andre, men at implikasjonen den andre veien ikke holder.

Vi starter med den følgende generelle sats:

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Teorem 4.1.1 Anta Δ er en mengde med finstrukturerte utsagn. Sett per definisjon:
Δ* = Mg(y: yêU & (Ez)(μ;f(z) = μ(y) & zêΔ))
Da gjelder: Rasj;f(Δ) → Rasj(Δ*)

Vi gir ikke noe bevis for denne satsen akkurat her. Satsen er et enkelt korollar til et teorem som ble bevist mot slutten av Del I. Vi henviser derfor leseren til denne delen av vårt arbeid. Det er nå lett å vise den følgende sats som sier at η(Tror);(x,t) impliserer η(Tror*);(x,t) :

Korollar 4.1.1 Man har:
⊨ η(Tror);(x,t) => η(Tror*);(x,t)

Bevis: Anta for vilkårlige w,x og t at wêI og <x,t>êPxT. Sett per definisjon:
(1) Δ = Mg(y: Tror;(w,t)(x,y))
(2) Δ* = Mg(y: yêU & (Ez)(zêU;f & μ(y) = μ;f(z) & Tror;(w,t)(x,y)))
Da kan man ved hjelp av Teorem 4.1.1 at:
(3) Rasj;f(Mg(y: Tror;(w,t)(x,y))) →
Rasj(Mg(y: yêU & (Ez)(zêU;f & μ(y) = μ;f(z) & Tror;(w,t)(x,y))))
Men ved hjelp av Definisjon 4.1.1 følger fra (3):
(4) w ⊨ η(Tror);(x,t) → w ⊨ η(Tror*);(x,t)
Men siden w var vilkårlig følger:
(Aw)(wêI → . w ⊨ η(Tror);(x,t) → w ⊨ η(Tror*);(x,t))
Herav følger så : ⊨ η(Tror);(x,t) => η(Tror*);(x,t)). **QED**.

Det skulle være klart at tilsvarende resultater gjelder om man i korollaret erstatter uttrykket "Tror" over alt med ett av uttrykkene "Husk", "Ser", "Vet" etc.

Vi skal nå vise at ~(⊨ η(Tror*);(x,t) => η(Tror);(x,t)) , mao. at η(Tror*);(x,t) ikke impliserer η(Tror);(x,t) så sant visse forutsetninger er oppfylt. Dette følger fra det følgende teorem:

Teorem 4.1.2 Anta (i) φ er en funksjon der Dom(φ) = U og Rgn(φ) Inkl U;f og hvor man har : φ(x) ê Mg(z: zêU;f & μ;f(z) =μ(x)) for alle xêU.
Anta videre (ii) Δ* ê Pt(U) & Rasj(Δ*). Anta tilslutt at (iii) Δ = φ"Δ*
Under disse forutsetningene har man:
(a) Δ* = Mg(y: yêU & (Ez)(zêU;f & μ(y)=μ;f(z) & zêΔ))
(b) ~Rasj;f(Δ)

Er x et utsagn vil det ifølge de utsagnsteoretiske aksiomene vi legger til grunn finnes minst tellbart uendelig mange finstrukturerte utsagn z som er ekvivalente med x i den forstand at z og x har samme sannhetsmengde ie. der μ;f(z) = μ(x). Man kan kalle alle de finstrukturerte utsagnene som er ekvivalente i denne forstand med et utsagn x for ekvivalensklassen av finstrukturerte utsagn assosiert med x. Hvis φ er en funksjon som oppfyller kravet (i) i satsen ovenfor ser man følgelig at φ er en funksjon som til ethvert utsagn x plukker ut et finstrukturert utsagn som er med i ekvivalensklassen av finstrukturerte utsagn assosiert med x. Det teoremet ovenfor sier er at dersom φ er en funksjon som oppfyller dette kravet og Δ*

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

er en rasjonelt organisert utsagnsmengde, så vil bildet av Δ* over φ , med andre ord φ"Δ* , som da selvfølgelig er en mengde med finstrukturerte utsagn, ikke være en rasjonelt organisert mengde med finstrukturerte utsagn.

Anta nå at w ⊨ η(Tror*);(x,t). Da følger ved hjelp av Definisjon 4.1.1 at wêI & Rasj(Mg(y: yêU & (Ez)(zêU;f & μ(y)=μ;f(z) & Tror;(w,t)(x,y)))). Setter vi her Δ* = Mg(y: yêU & (Ez)(zêU;f & μ(y)=μ;f(z) & Tror;(w,t)(x,y))) følger det selvfølgelig at Rasj(Δ*). Men det er nå fullt ut mulig at det kan finnes en funksjon φ av typen ovenfor der vi har at Mg(z: Tror;(w,t)(x,z)) = φ"Δ*. Ifølge satsen ovenfor har vi da ~Rasj;f(Mg(z: Tror;(w,t)(x,z))) og derfor ~(w ⊨ η(Tror);(x,t)). Vi kan derfor ikke uten videre slutte at η(Tror*);(x,t) impliserer η(Tror);(x,t).

La oss nå gi et bevis for Teorem 4.1.2.

Bevis: *Ad (a)*: Anta forutsetningene i satsen holder og at (1) xêΔ* for vilkårlig x. Da følger ved hjelp av forutsetningene om funksjonen φ at

(2) φ(x)êU;f & μ;f(φ(x)) = μ(x).

Siden Δ = φ"Δ* og vi har φ(x) ê φ"Δ* siden xêΔ* følger det at (3) φ(x)êΔ. Fra dette og (2) kan man slutte (4) (Ez)(zêU;f & μ(x)=μ;f(z) & zêΔ). Siden x åpenbart er med i U har vi xê Mg(y: yêU & (Ez)(zêU;f & μ(y)=μ;f(z) & zêΔ)). Dette viser at inklusjonen mot høyre i (a) holder.

Vi viser dernest at inklusjonen mot venstre holder. Anta for vilkårlig y at (5) yêU & (Ez)(zêU;f & μ(y)=μ;f(z) & zêΔ). Det vil være tilstrekkelig å vise at yê Δ*. Fra (5) følger det at det finnes z0 der (6) yêU & z0 êU;f & μ(y)=μ;f(z0) & z0êΔ Fra den siste konjunkten i (6) og det at Δ = φ"Δ* følger at (7) z0êφ"Δ* og derfor at det finnes x slik at (8) xê Δ* & z0 =φ(x). Men da har vi fra forutsetningene i satsen at φ(x)êU;f & μ;f(φ(x)) = μ(x). Fra dette og (8) følger μ;f(z0)=μ(x). Men herav følger ved hjelp av (6) at μ(y) = μ(x) og derfor x=y. Fra dette og (8) har man så yêΔ*. Dette viser at inklusjonen mot venstre holder. Dermed har vi gitt et bevis for riktigheten av punkt (a).

Ad (b): Siden vi etter forutsetningene har Rasj(Δ*) følger det ved hjelp av definisjonen av Rasj at det tautologiske utsagn, μ-1(I) er med i Δ*. Vi har derfor (9) μ;-1(I)ê Δ*. Anta nå for vilkårlige x,y at x,yêΔ* & x≠y. Da har man μ(x) ≠ μ(y). Fra forutsetningene om φ har man μ;f(φ(x)) =μ(x) & μ;f(φ(y)) = μ(y). Det følger at μ;f(φ(x)) ≠ μ;f(φ(y)) og derfor at φ(x) ≠ φ(y). Dette viser at φ ikke bare er en funksjon, men også en en-entydig funksjon. Fra dette og forutsetningene følger:

(10) φ : Δ* -(1-1,på)→ φ"Δ* =Δ

Fra (9) og (10) kan man slutte at (11) φ(μ;-1(I))êΔ og at

(12) μ;f(φ(μ;-1(I))) = μ(μ;-1(I)) =I

Vi ønsker nå å vise: (13) (Ax)(xêΔ & μ;f(x) =I → x = φ(μ;-1(I)))

La oss gi et bevis for (13). Anta for redutio ad absurdum at det finnes z1 der:

(14) z1êΔ & μ;f(z1)=I & z1 ≠ φ(μ;-1(I))

Siden z1êΔ har vi i lys av definisjonen av Δ at det finnes x0 der (15) x0êΔ* og (16) z1 = φ(x0). Det følger fra dette siste og (14) at φ(x0) ≠ φ(μ;-1(I)). Men siden φ er en-entydig (jmf. (10)) må vi da ha x0 ≠ μ;-1(I). Fra dette kan man slutte at Mg(z: zêU;f & μ;f(z)=μ(x0)) og Mg(z: zêU;f & μ;f(z)=I) er disjunkte, mao. har man: (16.1) Mg(z: zêU;f & μ;f(z)=μ(x0))∩ Mg(z: zêU;f & μ;f(z)=I) =ø.

Men fra (16) og (14) følger at μ;f(z1) = μ;f(φ(x0)) =I

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Men vi har φ(x0) ê Mg(z: zêU;f & μ;f(z)= μ(x0)) i lys av forutsetningene om φ. Det følger at μ(x0) = μ(φ(x0)). Men fra dette, (14) og (16) følger:

(17.1) z1ê Mg(z: zêU;f & μ;f(z)=μ(x0))

(17.2) z1êMg(z: zêU;f & μ;f(z)=I)

Men disse to påstandene strider mot (16.1). Det følger at det ikke kan finnes z1 der (14) holder. Dette viser at (13) er korrekt.

Nå har vi ikraft av aksiomene for de finstrukturerte utsagnene at

Cd(Mg(z: zêU;f & μ;f(z)=I)) >= Aleph;0

Siden μ;f(φ(μ;-1(I))) =I (Jmf. forutsetning (i)) må det da finnes f0êU;f slik at

(18) f0 ≠ φ(μ;-1(I)) & μ;f(f0) =I =μ;f(φ(μ;-1(I)))

Fra dette skulle det være klart at {φ(μ;-1(I))} Inkl Δ og at LKm;f(f0, {φ(μ;-1(I))})
Men i lys av (13) er *ikke* f0êΔ. Det følger at Δ ikke er lukket under implikasjon og derfor at ~Rasj;f(Δ). Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Vi har nå i noen grad avklart forholdet mellom η(Tror);(x,t) og η(Tror*);(x,t). Vår neste oppgave er et nærmere studium av de generelle lover som gjelder for disse to operasjonene og som kan utledes innenfor den teorien vi har nøyaktig definert i Del I og Del II. For dette formål finner vi det hensiktsmessig å innføre et nytt begrep nemlig hva vi kaller "en betinget modalstruktur". Dette er temaet for den neste paragrafen.

§4.2 Om betingede modalstrukturer.

Mot slutten av §2 nevne vi tre setninger vedrørende utsagnet η(Tror);(x,t). Disse setningene er sammenfattet i Teorem 4.2.2 nedenfor. Og vi skal gi bevis for dette teoremet. Men først vil vi gi bevis for denne satsen:

Teorem 4.2.1 Anta α,β êU og <x,t>êPxT. Da har man:

(a) ⊨ α → ⊨ η(Tror*);(x,t) => Tror*;(x,t)(α)

(b) ⊨ η(Tror*);(x,t) =>. Tror*;(x,t)(α=>β) => (Tror*;(x,t)(α)=>Tror*;(x,t)(β))

(c) ⊨ η(Tror*);(x,t) => ¬ Tror*;(x,t)(αΩ ¬α)

Bevis: *Ad (a)*: Anta (1) ⊨α. Da følger: (2) (Aw)(wêI → w ⊨α)
Det vil nå være tilstrekkelig å bevise:

(2) (Aw)(wêI →. w ⊨ η(Tror*);(x,t) → w ⊨Tror*;(x,t)(α))

Anta derfor for vilkårlig w at (3) wêI & w ⊨ η(Tror*);(x,t). Da følger ikraft av definisjonen av η(Tror*);(x,t) at (4) Rasj(Mg(y: yêU & w ⊨ Tror*;(x,t)(y))). Fra dette følger så ved hjelp av definisjonen av Rasj(Δ) at

(5) (Aα)(αêU & I Inkl μ(α) → αê Mg(y: yêU & w ⊨ Tror*;(x,t)(y)))

Men fra (2) følger I Inkl μ(α) og vi har αêU ifølge forutsetningene i satsen. Vi må derfor ha αê Mg(y: yêU & w ⊨ Tror*;(x,t)(y)) og derfor w ⊨ Tror*;(x,t)(α). Dette viser at punkt (a) holder.

Ad (b): Anta for vilkårlig wêI at følgende holder:

(1) w ⊨ η(Tror*);(x,t) & w ⊨ Tror*;(x,t)(α=>β) & w ⊨ Tror*;(x,t)(α)

Da har vi ved hjelp av definisjonen av η(Tror*);(x,t) at

(2) Rasj(Mg(y: yêU & w ⊨ Tror*;(x,t)(y))) Fra den andre og tredje konjunkten i (1) følger da:

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(3.1) α=>β ê Mg(y: yêU & w ⊨ Tror*;(x,t)(y))
(3.2) α ê Mg(y: yêU & w ⊨ Tror*;(x,t)(y))

Men fra (2) og definisjonen av Rasj(Δ) (se Del I) kan man slutte:

(4) (Aα)(AΓ)(αêU& Γ Inkl Mg(y: yêU & w ⊨ Tror*;(x,t)(y)) &
LK;m(α,Γ). → αêMg(y: yêU & w ⊨ Tror*;(x,t)(y)))

Nå har man i lys av (3.1) og (3.2) at {α,α=>β} Inkl Mg(y: yêU & w ⊨ Tror*;(x,t)(y)). Videre har man åpenbart at LK;m(β, {α,α=>β}). Fra disse to forhold og (4) kan man slutte: βêMg(y: yêU & w ⊨ Tror*;(x,t)(y)) og derfor w ⊨ Tror*;(x,t)(β).

Dette viser at punkt (b) holder.

Ad (c): Anta for vilkårlig w at (1) w ⊨ η(Tror*);(x,t). Da har vi per definisjon:
(2) Rasj(Mg(y: yêU & w ⊨ Tror*;(x,t)(y))) . Fra dette og definisjonen av Rasj følger:
(3) (Aα)(αêU → ~((αΩ~α)êMg(y: yêU & w ⊨ Tror*;(x,t)(y))))

Men siden vi forutsetter at αêU følger herav: w ⊨ ¬ Tror*;(x,t)(α Ω ¬α). Dette viser at punkt (c) holder. **QED**.

Teorem 4.2.2 Anta α,β êU og <x,t>êPxT. Da har man:

(a) ⊨ α → ⊨ η(Tror);(x,t) => Tror*;(x,t)(α)
(b) ⊨ η(Tror);(x,t) =>. Tror*;(x,t)(α=>β) => (Tror*;(x,t)(α)=>Tror*;(x,t)(β))
(c) ⊨ η(Tror);(x,t) => ¬ Tror*;(x,t)(αΩ ¬α)

Bevis: Denne satsen følger umiddelbart fra satsen ovenfor siden vi har
⊨ η(Tror);(x,t) => η(Tror*);(x,t) ifølge Korollar 4.1.1. **QED**.

Med dette har vi fremlagt bevis for de påstandene som vi nær slutten av §2 lovet å bevise. Det er viktig å merke seg at de to teoremene vi har vist ovenfor selvfølgelig også holder om man overalt i dem erstatter uttrykket "Tror" med ett av uttrykkene "Ser", "Innse", "Husk", "Vet" eller "Med".

La oss så gå over til definisjonen av det vi i det følgende vil kalle *betingede modalstrukturer*. Anta at man setter per definisjon γ = η(Tror*);(x,t) og T = Tror*;(x,t). Da ser man i lys av Teorem 4.2.1 at vi har:

(i) γ ê U & T:U → U
(ii) (Aα)(αêU →. ⊨α → ⊨ γ => T(α))
(iii) (Aα)(Aβ)[α,βêU →. ⊨ γ =>.T(α=>β) => (T(α) => T(β))]
(iv) (Aα)(αêU → ⊨ γ => ¬T(αΩ ¬α))

Et hvilket som helst par <γ,T> som oppfyller kravene (i) - (iv) er det vi vil kalle en betinget modalstruktur. Man ser derfor at f.eks. paret <η(Tror*);(x,t), Tror*;(x,t)> oppfyller kravene som stilles til en slik struktur. Alle de satser som vi derfor kan vise at holder generelt for betingede modalstrukturer må derfor også gjelde for en spesiell betinget modalstruktur som f.eks. <η(Tror*);(x,t), Tror*;(x,t)> eller <η(Ser*);(x,t), Ser*;(x,t)>

La oss gi en formel definisjon av begrepet 'betinget modalstruktur':

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Definisjon 4.2.1 Et par <η,T> kalles for en betinget modalstruktur hvis og bare hvis η og T oppfyller de følgende krav:

(i) $\eta \hat{e} U \ \& \ T{:}U \rightarrow U$

(ii) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} U \rightarrow . \vdash \alpha \rightarrow \models \eta \Rightarrow T(\alpha))$

(iii) $(A\alpha)(A\beta)[\ \alpha,\beta \hat{e} U \rightarrow . \models \eta \Rightarrow . T(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (T(\alpha) \Rightarrow T(\beta))\ ]$

(iv) $(A\alpha)(\alpha \hat{e} U \rightarrow \models \eta \Rightarrow \neg T(\alpha \Omega \neg \alpha))$

I forbindelse med denne definisjonen kaller vi påstand (ii) for generaliseringsregelen og påstand (iii) for distribusjonsregelen. (iv) kalles i det følgende for konsistenspostulatet.

Vi skal senere i §4.3 se på å en rekke generelle teoremer som gjelder for betingede modalstrukturer i den betydningen vi har definert. Akkurat her vil vi imidlertid bare utdype definisjonen ovenfor ved å vise at det er mulig å definere dette begrepet på en litt annen måte. La oss se på følgende sats:

Teorem 4.2.3 Anta <η,T> er en betinget modalstruktur og at $\alpha,\beta \hat{e} U$. Da gjelder:

(a) $\vdash \alpha \rightarrow \models \eta \Rightarrow T(\alpha)$

(b) $\models \alpha \Rightarrow \beta \rightarrow \models \eta \Rightarrow . T(\alpha) \Rightarrow T(\beta)$

(c) $\models \eta \Rightarrow . T(\alpha \Omega \beta) \Leftrightarrow T(\alpha) \Omega T(\beta)$

(d) $\models \eta \Rightarrow (T(\alpha) \Rightarrow \neg T(\neg \alpha)$

Vi skal straks vise at dette holder, men før vi vi gir beviset er det verdt å nevne at punktene (a) - (d) også impliserer (i) -(iv) i definisjonen ovenfor. Med andre ord er det slik at dersom vi definerer en betinget modalstruktur som et ordnet par <η,T> der (a) - (c) holder så kan vi utlede som et teorem definisjonen ovenfor. Dette innebærer at de to definisjonene vil være helt ekvivalente.

Bevis. *Ad(a)*: Dette følger direkte fra definisjonen av betinget modalstruktur.

Ad (b): Anta (1) $\models \alpha \Rightarrow \beta$. Da har vi ved hjelp av ved hjelp av generaliseringsregelen: (2) $\models \eta \Rightarrow T(\alpha \Rightarrow \beta)$. Siden distribusjonsregelen holder har vi (3) $\models \eta \Rightarrow . T(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (T(\alpha) \Rightarrow T(\beta))$. Men fra (2) og (3) følger $\models \eta \Rightarrow . T(\alpha) \Rightarrow T(\beta)$ ved ren utsagnslogikk.

Ad (c): Man har (1) $\models \alpha \Omega \beta \Rightarrow \alpha$ ved ren utsagnslogikk. Fra dette følger ved hjelp av generaliseringsregelen: (2) $\models \eta \Rightarrow T(\alpha \Omega \beta \Rightarrow \alpha)$. Ved hjelp av distribusjonsregelen har man: (3) $\models \eta \Rightarrow . T(\alpha \Omega \beta \Rightarrow \alpha) \Rightarrow (T(\alpha \Omega \beta) \Rightarrow T(\alpha))$. Fra (2) og (3) følger ved hjelp av ren utsagnslogikk: (4) $\models \eta \Rightarrow . T(\alpha \Omega \beta) \Rightarrow T(\alpha)$. På nøyaktig samme måte kan man utlede: (5) $\models \eta \Rightarrow . T(\alpha \Omega \beta) \Rightarrow T(\beta)$. Fra (4) og (5) følger så ved ren utsagnslogikk: (6) $\models \eta \Rightarrow . T(\alpha \Omega \beta) \Rightarrow T(\alpha) \Omega T(\beta)$. Det gjenstår å vise den andre halvdelen i punkt (c). Vi har ved ren utsagnslogikk: (7) $\models \alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha \Omega \beta)$. Fra dette og generaliseringsregelen følger: (8) $\models \eta \Rightarrow T(\ \alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha \Omega \beta))$. Nå har vi ved hjelp av distribusjonsregelen:

(9) $\models \eta \Rightarrow . T(\ \alpha \Rightarrow (\beta \Rightarrow \alpha \Omega \beta)) \Rightarrow (T(\alpha) \Rightarrow T(\beta \Rightarrow \alpha \Omega \beta))$

Ved bruk av den samme regel ser man at:

(10) $\models \eta \Rightarrow . T(\ \beta \Rightarrow \alpha \Omega \beta) \Rightarrow (T(\beta) \Rightarrow T(\alpha \Omega \beta))$

Fra (8), (9) og (10) følger ved hjelp av ren utsagnslogikk: $\models \eta \Rightarrow . T(\alpha) \Omega T(\beta) \Rightarrow T(\alpha \Omega \beta)$. Fra dette og (6) følger så det vi ønsker: $\models \eta \Rightarrow . T(\alpha) \Omega T(\beta) \Leftrightarrow T(\alpha \Omega \beta)$. Dette viser at punkt (c) holder.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Ad (d): Fra punkt (iv) i definisjonen av betinget modalstruktur har vi:
(1) $\models \eta \Rightarrow \neg T(\alpha\ \Omega\ \neg\alpha)$. Fra punkt (c) ovenfor har man:
(2) $\models \eta \Rightarrow .T(\alpha)\Omega\ T(\neg\alpha) \Leftrightarrow T(\alpha\Omega\neg\alpha)$
Fra (1) og (2) følger så ved hjelp av ren utsagnslogikk: $\models \eta \Rightarrow (T(\alpha) \Rightarrow \neg T\neg(\alpha))$
Dette viser at (d) holder. **QED**.

Teorem 4.2.4 Anta $<\eta,T>$ er et par der vi har $\eta \hat{e} U$ og $T: U \rightarrow U$ og at følgende gjelder for alle $\alpha,\beta \hat{e} U$:
(a) $\models\alpha \rightarrow \models \eta \Rightarrow T(\alpha)$
(b) $\models \alpha \Rightarrow \beta \rightarrow \models \eta \Rightarrow . T(\alpha) \Rightarrow T(\beta)$
(c) $\models \eta \Rightarrow .\ T(\alpha\Omega\beta) \Leftrightarrow T(\alpha)\Omega\ T(\beta)$
(d) $\models \eta \Rightarrow (T(\alpha) \Rightarrow \neg T(\neg\alpha)$
Da har vi at $<\eta,T>$ er en betinget modalstruktur.

Dette teoremet er i en hvis forstand omvendingen av det foregående og viser sammen med det foregående teorem at vi kunne ha definert en betinget modalstruktur som et ordnet par $<\eta,T>$ som oppfyller de kravene som er nevnt i forutsetningenen i satsen ovenfor.

Bevis: Det vil være tilstrekkelig å vise at $<\eta,T>$ oppfyller kravene (ii) - (iv) i Definisjon 4.2.1. Når det gjelder kravet (ii) følger dette direkte fra forutsetningen (a). For å vise krav (iv) er det nok å vise at (1) $\models \eta \Rightarrow \neg T(\alpha\ \&\ \neg\alpha)$. Nå har vi ved hjelp av ren utsagnslogikk og forutsetning (d) at $\models \eta \Rightarrow \neg(T(\alpha)\Omega T(\neg\alpha))$. Men fra dette, forutsetning (c) og ren utsagnslogikk følger (1).

For å vise at krav (ii) holder er det nok å vise:
(2) $\models \eta \Rightarrow . T(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (T(\alpha) \Rightarrow T(\beta))$
Nå har man ved ren utsagnslogikk at (2) $\models (\alpha \Rightarrow \beta)\ \Omega\ \alpha. \Rightarrow \beta$. Fra dette og forutsetning (b) kan man slutte: (3) $\models \eta \Rightarrow . T((\alpha \Rightarrow \beta)\Omega\alpha) \Rightarrow T(\beta)$. Fra forutsetning (c) følger:
(4) $\models \eta \Rightarrow .\ T((\alpha \Rightarrow \beta)\ \Omega\alpha) \Leftrightarrow T(\alpha \Rightarrow \beta)\Omega\ T(\alpha)$
Men fra (3) og (4) følger (2) ved ren utsagnslogikk. **QED**.

Dette avslutter vår introduksjon av begreper *betinget modalstruktur*. I den neste paragrafen vil vi introdusere et beslektet begrep, nemlig *betinget modalfunksjon*.

§4.2.1 Definisjon av en betinget modalfunksjon.

Vi tar vårt utgangspunkt i utsagnet $\eta(Tror^*);(x,t)$ og operasjonen $Tror^*;(x,t)$ idet vi tenker oss at x og t er fikserte entiteter. Det første man merker seg er at $Tror^*;(x,t)$ da er en funksjon som avbilder mengden av utsagn U inn i U. Med andre ord har vi at $Tror^*;(x,t)(\alpha)\hat{e}U$ om $\alpha \hat{e} U$. Derfor har vi:

(1) $Tror^*;(x,t) : U \rightarrow U$

Det andre man kan merke seg er at utsagnet $\eta(Tror^*);(x,t)$ er definert ved hjelp av funksjonen $Tror^*;(x,t)$. Man har jo, som det fremgår av det som har blitt nevnt tidligere at

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(2) $\eta(\text{Tror*});(x,t) = \mu;\text{-}1(\text{Mg}(w{:}w\hat{e}I \;\&\; \text{Rasj}(\text{Mg}(y{:}\; y\hat{e}U \;\&\; w \models \text{Tror*};(x,t)(y))))$

I det følgende skal vi kalle et ordnet par $<\eta,T>$ for en *betinget modalfunksjon* hvis og bare hvis η og T oppfyller de følgende to krav:

(a) $T : U \rightarrow U$
(b) $\eta = \mu;\text{-}1(\text{Mg}(w{:}\; w\hat{e}I \;\&\; \text{Rasj}(\text{Mg}(y{:}\; y\hat{e}U \;\&\; w \models T(y))))$

Man ser umiddelbart at dersom man erstatter i punktene (a) og (b) bokstaven "T" overalt med uttrykket "Tror*;(x,t)" og den greske bokstaven "η" overalt med uttrykket "η(Tror*);(x,t)" får man henholdsvis (1) og (2) ovenfor. Det følger fra dette at $<\eta(\text{Tror*});(x,t), \text{Tror*};(x,t>$ er det vi her kaller for en betinget modalfunksjon. Lignende, helt analoge, betraktninger kan gjøres i forbindelse med de andre relasjonene i IxTxPxU;f som vi har nevnt tidligere, nemlig Ser, Husk, Innse, Med og Vet.

La oss nå gå videre med studiet av de betingede modalfunksjonene. Vi nevner først det følgende helt generelle teorem:

Teorem 4.2.1.1 Anta $<\eta,T>$ er en betinget modalfunksjon og at $\alpha,\beta\ \hat{e}U$. Da gjelder:
(a) $\models\alpha \;\rightarrow\; \models \eta \Rightarrow T(\alpha)$
(b) $\models\ \eta \Rightarrow .\ T(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (T(\alpha) \Rightarrow T(\beta))$
(c) $\models\ \eta \Rightarrow\ \neg T(\alpha\Omega\neg\alpha)$

Denne satsen viser tydelig at en betinget modalfunksjon $<\eta,T>$ oppfyller alle de krav som stilles til en betinget modalstruktur. Det følger at mengden av alle de betingede modalfunksjonene utgjør en underklasse av mengden av alle de betingede modalstrukturene. Enhver sats som derfor gjelder for alle betingete modalstrukturer vil derfor også gjelde for alle betingede modalfunksjoner.

Bevis: Man får frem et bevis for denne satsen om man i beviset for Teorem 4.2.1 erstatter alle forekomster av uttrykket "η(Tror*);(x,t)" med "η" og alle forekomster av uttrykket "Tror*;(x,t)" med "T". Det er derfor ikke nødvendig å skrive opp dette beviset på nytt. **QED**.

Vi nevner også et annet teorem som er relatert til det ovenfor nemlig:

Teorem 4.2.1.2 Anta $<\eta,T>$ er en betinget modalfunksjon og at $\alpha,\beta\hat{e}U$. Da gjelder:
(a) $\models\alpha \;\rightarrow\; \models \eta \Rightarrow T(\alpha)$
(b) $\models \alpha \Rightarrow \beta \;\rightarrow\; \models \eta \Rightarrow .\ T(\alpha) \Rightarrow T(\beta)$
(c) $\models\ \eta \Rightarrow .\ T(\alpha\Omega\beta) \Leftrightarrow T(\alpha)\Omega\ T(\beta)$
(d) $\models\ \eta \Rightarrow (T(\alpha) \Rightarrow \neg T(\neg\alpha)$

Bevis: Dette følger fra den foregående sats og Teorem 4.2.3 : Siden $<\eta,T>$ er en betinget modalfunksjon har vi at den også er en betinget modalstruktur. **QED**.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

La oss tilslutt bemerke at de to siste teoremene er ekvivalente. Fra Teorem 4.2.1.1 kan man utlede Teorem 4.2.1.2 og omvendt. Beviset for at Teorem 4.2.1.2 impliserer Teorem 4.2.1.1 er forøvrig nesten identisk med beviset for Teorem 2.2.4. Vi går nå over til å se på den siste begrepsdannelsen som er relatert til betingede modalstrukturer.

§4.2.2 Definisjon av en betinget svak modalfunksjon. Definisjon av den kanoniske betingede modalfunksjon bestemt av en betinget svak modalfunksjon

La oss nå se på en teori som i en viss forstand er svakere enn den vi ovenfor har nevnt om betingede modalfunksjoner. Anta

(1) $T;f : U;f \rightarrow U$.

I motsetning til $T: U \rightarrow U$ er $T;f$ en funksjon som tilordner et finstrukturerte utsagn α et utsagn $T;(\alpha)$. I tilknytning til en slik funksjon $T;f$ definerer vi et utsagn $\eta;f$ ved:

(2) $\eta;f = \mu;\text{-}1(Mg(w:w\hat{e}I \ \& \ Rasj;f(Mg(\alpha: \alpha\hat{e}U;f \ \& \ w \models T;f(\alpha)))))$

Man ser at $\eta;f$ er det utsagnet som er sant i alle de verdenene w hvor vi har at mengden av alle de finstrukturerte utsagnene α der $w \models T;f(\alpha)$ er en rasjonelt organisert mengde av finstrukturerte utsagn. Vi kaller et ordnet par $<\eta;f,T;f>$ som oppfyller kravene (1) og (2) for en *betinget svak modalfunksjon*. Man kan sette dette opp som en formell definisjon slik:

Definisjon 4.2.2.1 $<\eta;f, T;f>$ er en betinget svak modalfunksjon hvis og bare hvis:
(i) $T;f : U;f \rightarrow U$
(ii) $\eta;f = \mu;\text{-}1(Mg(w:w\hat{e}I \ \& \ Rasj;f(Mg(\alpha: \alpha\hat{e}U;f \ \& \ w \models T;f(\alpha)))))$

La oss i denne forbindelse gi et eksempel. Vi ser på predikatet "Tror;(w,t)(x,y)" og definerer funksjonen Tror;f ved:

(3) $Tror;f;(x,t)(\alpha) = \mu;\text{-}1(Mg(w: w\hat{e}I \ \& \ Tror;(w,t)(x,\alpha))$

Man ser da umiddelbart at $Tror;f;(x,t) : U;f \rightarrow U$ og man ser at vi har:
$w \models Tror;f;(x,t)(\alpha) \leftrightarrow Tror;(w,t)(x,y)$
Setter man inn "Tror;(w,t)(x,α)" for "$w \models T;f(\alpha)$" i (2) ovenfor ser man at resultatet blir:

(4) $\eta;f = \mu;\text{-}1(Mg(w:w\hat{e}I \ \& \ Rasj;f(Mg(\alpha: \alpha\hat{e}U;f \ \& \ Tror;(w,t)(x,\alpha))))$

Med andre ord har vi i dette tilfelle at $\eta;f$ er identisk med $\eta(Tror);(x,t)$ som definert ved Definisjon 2.7.

Vi kommer nå til begrepet om *den kanoniske betingete modalfunksjonen* som er bestemt av en betinget svak modalfunksjon. Vi definerer dette begrepet slik:

Definisjon 4.2.2.2. Anta $S=<\eta;f,T;f>$ er en betinget svak modalfunksjon. Definer η og T ved
(i) $T(\alpha)= \mu;\text{-}1(Mg(w: w\hat{e}I \ \& \ \alpha\hat{e}U \ \& \ (Ez)(z\hat{e}U;f \ \& \ \mu(\alpha) =\mu;f(z) \ \& \ w \models T;f(z))))$

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(ii) $\eta = \mu;\text{-}1(Mg(w: w\hat{e}I \ \& \ Rasj(Mg(\alpha: \alpha\hat{e}U \ \& \ w \models T(\alpha))))$

Da kaller vi $<\eta,T>$ for den kanoniske betingede modalfunksjonen bestemt av den betingede svake modalfunksjonen $<\eta;f, T;f>$.

Vi skal avslutte dette avsnittet med to satser:

Teorem 4.2.2.1 Anta $<\eta;f, T;f>$ er en betinget svak modalfunksjon og at $<\eta, T>$ er den kanoniske betingede modalfunksjonen bestemt av $<\eta;f, T;f>$. Da har man:

$\models \eta;f => \eta$

Bevis: Dette bevises nøyaktig på samme måte som Korollar 4.1.1 i §4.1. Det skulle derfor være unødvendig å gi dette beviset på nytt igjen med de omskrivningene som trengs. **QED**.

Teorem 4.2.2.2 Anta $<\eta;f, T;f>$ er en betinget svak modalfunksjon og at $<\eta, T>$ er den kanoniske betingede modalfunksjonen bestemt av $<\eta;f, T;f>$. Anta $\alpha, \beta\hat{e}U$. Da har man:

(a) $\models \alpha \ \rightarrow \ \models \eta;f => T(\alpha)$

(b) $\models \eta;f =>. T(\alpha => \beta) => (T(\alpha) => T(\beta))$

(c) $\models \eta;f => \ \neg T(\alpha\Omega\neg\alpha)$

Bevis: Dette følger umiddelbart ved hjelp av Teorem 4.2.1.1 og Teorem 4.2.2.1 som vi har skrevet opp ovenfor. **QED**.

§4.3 Generelle teoremer om betingede modalstrukturer. Elementærteorem I - III

Vi skal i denne paragrafen se på en del satser som gjelder generelt for betingede modalstrukturer. Siden man kan vise at f.eks. $<\eta(Ser^*);(x,t), Ser^*;(x,t)>$ er en betinget modalstruktur følger det selvfølgelig at alle de satsene vi nevner her gjelder for denne spesielle betingede modalstrukturen. Siden man også kan vise at ethvert par av typen $<\eta(R^*);(x,t), R^*;(x,t)>$ der R Inkl IxTxPxU;f er en betinget modalstruktur gjelder de følgende satser også for alle disse strukturene. Satsene vi angir her er i en viss forstand helt analoge til dem vi nevnte i §2.2, nemlig Teorem 2.2.1 - 2.2.3, og som vi der kalte "elementær teoremer" på grunn av sin nokså enkle og usofistikerte natur.

Før vi går videre finner vi det imidlertid nødvendig å minne om definisjonen av funksjonen CT, den duale operatoren til T om T er en funksjon som avbilder mengden av utsagn inn i seg selv. Definisjonen er denne:

Definisjon 4.3.1 Anta $T : U \rightarrow U$ og at $\alpha\hat{e}U$. Da setter vi

(i) $CT(\alpha) = \neg T(\neg\alpha)$

(ii) $CT = \lambda/\alpha\hat{e}U/(\neg T\neg(\alpha))$

Noen kommentarer er på plass i forbindelse med denne definisjonen. Som man ser kan C oppfattes som en funksjon som til enhver funksjon i mengden $Mg(F: F: U\rightarrow U)$ til denne en

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

ny funksjon. Er derfor T: U→U har vi CT og så er en funksjon i denne mengden. I stedet for å skrive CT burde vi derfor for å være mer eksplisitte egentlig ha skrevet C(T). La oss kalle funksjonene i mengden Mg(F : (F:U→U)) for mengden av unære utsagnsfunksjoner. Har vi derfor for oss to unære utsagnsfunksjoner F og G vil sammensetningen av dem, ie. FoG også være en unær utsagnsfunksjon. Er αêU vil vi da ha at C(FoG)(α) = ¬((FoG)(¬α)) = ¬(F(G(¬α)). På den annen side kan vi også danne de to duale funksjonene C(F) og C(G) og se på (C(F)oC(G))(α). Da har vi (C(F)oC(G))(α) = C(F)(C(G)(α))= C(F)(¬G(¬α))= ¬F(¬(¬G(¬α)). Men siden ¬(¬G(¬α)) = G(¬α), har vi at C(F)(C(G)(α)) =¬(F(G(¬α)). Man ser derfor at C i en vis forstand distribuerer over sammensetningsoperasjonen o. Er derfor F;1, ..., F;n êU^U har vi at C(F;1o ... oF;n) = C(F;1)o ... oC(F;n)

Vårt første teorem er helt analogt med Teorem 2.2.1 om K-funksjoner:

Teorem 4.3.1 (Elementærteorem I). Anta α;i êU (iêN) og at βêU. Anta <η,T> er en betinget modalstruktur. Da har vi:

(a) ⊨ η=>.T(αΩβ) <=> T(α)ΩT(β)
(b) ⊨ η =>. T(SNu/i,1,n/(α;i)) <=> SNu/i,1,n/(T(α;i))
(c) ⊨ α => β → ⊨ η => .CT(α) => CT(β)
(d) ⊨ α => β → ⊨ η =>T(α) => T(β)
(e) ⊨ SNu/i,1,n/(α;i) =>β → ⊨ η =>. SNu/i,1,n/(T(α;i)) => T(β)
(f) ⊨ α <=> β → ⊨ η =>. T(α) <=> T(β)
(g) ⊨ α <=> β → ⊨ η => CT(α) <=> CT(β)

Bevis: Dette bevises på en lignene måte som Teorem 2.2.1. Men over alt i beviset for Teorem 2.2.1 hvor det henvises til generaliseringsregelen og distribusjonsregelen må man nå bruke reglen ⊨ α → ⊨ η => T(α) og regelen ⊨ η =>. T(α=>β) => T(α) => T(β). De øvrige endringene i beviset for Teorem 2.2.1 som skal til skulle egentlig være ganske opplagte. Selvfølgelig må man i det nye beviset operere med T(α) og CT(α) i stedet for F(α) og CF(α). **QED**.

Det følgende teoremet svarerer til Teorem 2.2.2 i §2.2. Også dette er, som man ser, av en temmelig elementær natur:

Teorem 4.3.2 (Elementærteorem II)[58] Anta α;i êU (iêN) og at α,β,γ êU. Anta <η,T> er en betinget modalstruktur. Da har vi:

(i) ⊨ η =>. T(α) Ω T(α=>β) => T(β)
(ii) ⊨ η =>. T(SNu/i,1,n/(α;i))=>β. =>. SNu/i,1,n/(T(α;i)) =>β
(iii) ⊨ η =>. T(α<=>β) =>. (T(α) <=>T(β))
(iv) ⊨ η =>. T(α <=> β) =>. T(αoγ) <=> T(βoγ)
(v) ⊨ η =>. T(α <=> β) =>. T(γoα) <=> T(γoβ)
(vi) ⊨ η =>. T(α <=> β) =>. T(¬α) <=> T(¬β)
(vii) ⊨ η =>. T(α <=> β) =>. CT(α) <=> CT(β)
(viii) ⊨ η =>. (T(α <=> β) =>. CT(αoγ) <=> CT(βoγ))

58 Merk at utrykket "o" i denne satsen er en plassholder for ett av de følgende uttrykk "=>", "<=>", "Ω" og "v".

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(ix) ⊨ η =>. (T(α <=> β) =>. CT(γoα) <=> CT(γoβ))
(x) ⊨ η =>. CT(UNu/i,1,n/(α;i)) <=> UNu/i,1,n/(CT(α;i))
(xi) ⊨ η =>. T(SNu/i,1,n/(α;i)) <=> ¬CT(UNu/i,1,n/(¬α;i))
(xii) ⊨ η =>. T(UNu/i,1,n/(α;i)) <=> ¬CT(SNu/i,1,n/(¬α;i))
(xiii) ⊨ η =>. CT(SNu/i,1,n/(α;i)) <=> ¬T(UNu/i,1,n/(¬α;i))
(xiv) ⊨ η =>. CT(UNu/i,1,n/(α;i)) <=> ¬T(SNu/1,1,n/(¬α;i))
(xv) ⊨ η =>. T(SNu/i,1,n/(α;i) => βΩ¬β) => T(UNu/i,1,n/(¬α;i))

Bevis: Dette bevises på en lignene måte som Teorem 2.2.2 i §2.2. Over alt i beviset for Teorem 2.2.2 hvor det henvises til generaliseringsregelen og distribusjonsregelen må man nå bruke reglene ⊨ α → ⊨ η => T(α) og regelen ⊨ η =>. T(α=>β) => T(α) => T(β). De øvrige endringene i beviset for Teorem 2.2.2 som skal til for å få et bevis for satsen ovenfor skulle egentlig være ganske opplagte. Selvfølgelig må man i det nye beviset operere med T(α) og CT(α) i stedet for F(α) og CF(α). Vi overlater detaljene til leseren. **QED**.

Teorem 4.3.3 (Elementærteorem III) Anta α,β êU. Anta <η,T> er en betinget modalstruktur. Da har vi:

(i) ⊨ η =>. T(α=>β) => CT(α) => CT(β)
(ii) ⊨ η =>. T(αUβ) Ω T(¬α). => T(β)
(iii) ⊨ η =>. T(αUβ) Ω CT(¬β) => CT(α)
(iv) ⊨ η =>. T(α => β) =>.T(¬β) => T(¬α)
(v) ⊨ η =>. T(α => β) => ¬CT(β) => ¬CT(α)
(vi) ⊨ η =>. CT(αΩβ) => CT(α) & CT(β)
(vii) ⊨ η =>. T(αUβ) => T(β)UCT(α)
(viii) ⊨ η =>. CT(¬β) Ω T(¬α) => CT(¬αΩ¬β)
(ix) ⊨ η =>. CT(β) Ω T(α) =>CT(αΩβ)
(x) ⊨ η =>. T(α) => CT(β) => CT(αΩβ)
(xi) ⊨ η =>. CT(¬β) => ¬T(αΩβ)

Bevis: Dette bevises på en lignene måte som Teorem 2.2.3 i §2.2. Over alt i beviset for Teorem 2.2.3 hvor det henvises til generaliseringsregelen og distribusjonsregelen må man nå bruke reglene ⊨ α → ⊨ η => T(α) og regelen ⊨ η =>. T(α=>β) => T(α) => T(β). De øvrige endringene i beviset for Teorem 2.2.3 som skal til for å få et bevis for satsen ovenfor skulle egentlig være ganske opplagte. Selvfølgelig må man i det nye beviset operere med T(α) og CT(α) i stedet for F(α) og CF(α). Igjen overlater vi detaljene til leseren. **QED**.

§4.4 Generelle teoremer om betingede modalstrukturer. Iterasjonsteoremer.

Vi gir først noen definisjoner som vi har bruk for.

Anta <η:n,T;n>/n>=1/ er en sekvens av betingede modalstrukturer. Da defineres Q;n og φ(n) der n>=1 induktivet ved:

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Definisjon 4.4.1: Anta <η;n, T;n>/nêN-{0}/ er en sekvens av betingede modalstrukturer. Da setter vi:

(i) Q;1 = T;1
(ii) Q;(n+1) = T;(n+1)oQ;n
(iii) φ(1) = η;1
(iv) φ(n+1) = η;(n+1)ΩT;(n+1)(φ(n))

Merk at dersom F og G er to funksjoner i U^U, så er FoG definert ved

FoG = Mg(<x,y>: (Ez)(<x,z>êG & <z,y>êF))

Det skulle være lett å utlede at at (FoG)(α) = F(G(α)). Vi behøver ikke gi noe detaljert bevis for dette her.

Tilsvarende defineres en sekvens M;n (nêN-{0}) slik:

Definisjon 4.4.2: Anta <η;n, T;n>/nêN-{0}/ er en sekvens av betingede modalstrukturer. Da setter vi:

(a) R;1(α)= ¬T;1(¬α)
(b) R;(n+1)(α) = ¬T;(n+1)(¬R;n(α))

Vårt første teorem i denne paragrafen er det følgende som vi gir et detaljert bevis for:

Teorem 4.4.1: Anta <η;1,T;1> og <η;2, T;2> er to betingede modalstrukturer. Da er også <η;1ΩT;1(η;2), T;1oT;2> en betinget modalstruktur.

Bevis: Anta <η;1,T;1> og <η;2, T;2> er to betingede modalstrukturer. Da har vi i lys av definisjonen av betinget modalstruktur at

(i) ⊨α → ⊨ η;1 => T;1(α)
(ii) ⊨ η;1 =>. T;1(α => β) => (T;1(α) => T;2(β))
(iii) ⊨ η;1 => ¬T;1(αΩ¬α)
(iv) ⊨α → ⊨ η;2 => T;2(α)
(v) ⊨ η;2 =>. T;2(α => β) => (T;2(α) => T;2(β))
(vi) ⊨ η;2 => ¬T;2(αΩ¬α)

Det vil nå være tilstrekkelig å bevise at følgende påstander holder, siden det er opplagt at η;1ΩT;1(η;2) êU og at T;1oT;2 : U → U :

(a) ⊨α → ⊨ η;1ΩT;1(η;2) => T;1(T;2(α))
(b) ⊨ η;1ΩT;1(η;2) =>. T;1(T;2(α => β)) => (T;1(T;2(α)) => T;1(T;2(β)))
(c) ⊨ η;1ΩT;1(η;2) => ¬T;1(T;2(αΩ¬α))

Ad (a): Anta (1) ⊨α. Da har vi hjelp av (iv) at (2) ⊨ η;2 => T;2(α). Fra dette og (i) kan man slutte: (3) ⊨ η;1 =>. T;1(η;2 => T;2(α)). Men fra dette, (ii) og utsagnslogikk følger: (4) ⊨ η;1 =>. T;1(η;2) => T;1(T;2(α)). Herav har vi så ved hjelp av ren utsagnslogikk at (5) ⊨ η;1ΩT;1(η;2) => T;1(T;2(α)). Dette viser at punkt (a) holder.

Ad (b): Fra (v) og (i) kan man utlede:

(1) ⊨ η;1 => T;1(η;2 =>. T;2(α => β) => (T;2(α) => T;2(β)) . Fra dette har vi så ved hjelp av (ii) og ren utsagnslogikk at:

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(2) $\models \eta;1 \Rightarrow T;1(\eta;2) \Rightarrow . T;1(T;2(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (T;2(\alpha) \Rightarrow T;2(\beta)))$

Nå har vi ved hjelp av (ii) at

(3) $\models \eta;1 \Rightarrow . T;1(T;2(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow (T;2(\alpha) \Rightarrow T;2(\beta)))$
$\Rightarrow T;1(T;2(\alpha \Rightarrow \beta)) \Rightarrow T;1(T;2(\alpha) \Rightarrow T;2(\beta)))$

Likeledes kan man utlede vd hjelp av (ii):

(4) $\models \eta;1 \Rightarrow . T;1(T;2(\alpha) \Rightarrow T;2(\beta)) \Rightarrow T;1(T;2(\alpha) \Rightarrow T;1(T;2(\beta))$

Men fra (2), (3) og (4) følger ved hjelp av ren utsagnslogikk:

(5) $\eta;1\Omega T;1(\eta;2) \Rightarrow . T;1(T;2(\alpha \Rightarrow \beta)) \Rightarrow (T;1(T;2(\alpha)) \Rightarrow T;1(T;2(\beta)))$

Dette viser at punkt (b) holder.

Ad (c): Vi nevner først at man fra forutsetningene (i) - (vi) ovenfor samt Elementærteorem I i forrige paragraf kan utledede følgende satser:

(0.1) $\models \eta;2 \Rightarrow . T;2(\alpha\Omega\beta) \Leftrightarrow T;2(\alpha)\Omega T;2(\beta)$

(0.2) $\models \eta;1 \Rightarrow . T;1(\alpha\Omega\beta) \Leftrightarrow T;1(\alpha)\Omega T;1(\beta)$

(0.3) $\models \alpha \Rightarrow \beta \rightarrow \models \eta;1 \Rightarrow .T;1(\alpha) \Rightarrow T;1(\beta)$

(0.4) $\models \alpha \Rightarrow \beta \rightarrow \models \eta;2 \Rightarrow .T;2(\alpha) \Rightarrow T;2(\beta)$

Vi nevner disse satsene siden de vil bli brukt i det følgende.

Fra (0.1) kan man slutte:

(1) $\models \eta;2 \Rightarrow . T;2(\alpha\Omega\neg\alpha) \Rightarrow T;2(\alpha)\Omega T;2(\neg\alpha)$

Fra (1) og (i) kan man slutte:

(2) $\models \eta;1 \Rightarrow T;1(\eta;2 \Rightarrow . T;2(\alpha\Omega\neg\alpha) \Rightarrow T;2(\alpha)\Omega T;2(\neg\alpha))$

Fra (ii) kan man utlede:

(3) $\models \eta;1 \Rightarrow . T;1(\eta;2 \Rightarrow . T;2(\alpha\Omega\neg\alpha) \Rightarrow T;2(\alpha)\Omega T;2(\neg\alpha))$
$\Rightarrow T;1(\eta;2) \Rightarrow . T;1(T;2(\alpha\Omega\neg\alpha) \Rightarrow T;2(\alpha)\Omega T;2(\neg\alpha))$

Ytterligere kan man fra (ii) utlede:

(4) $\models \eta;1 \Rightarrow . T;1(T;2(\alpha\Omega\neg\alpha) \Rightarrow T;2(\alpha)\Omega T;2(\neg\alpha))$
$\Rightarrow T;1(T;2(\alpha\Omega\neg\alpha)) \Rightarrow T;1(T;2(\alpha)\Omega T;2(\neg\alpha))$

Fra (2), (3) og (4) følger ved hjelp av ren utsagnslogikk:

(5) $\models \eta;1\Omega T;1(\eta;2) \Rightarrow T;1(T;2(\alpha\Omega\neg\alpha)) \Rightarrow T;1(T;2(\alpha)\Omega T;2(\neg\alpha))$

På den annen side har vi fra (vi):

(6) $\models \eta;2 \Rightarrow \neg T;2(\alpha\Omega\neg\alpha)$ Fra dette og (0.1) følger ved hjelp av ren utsagnslogikk:

(7) $\models \eta;2 \Rightarrow \neg (T;2(\alpha)\ \Omega\ T;2(\neg\alpha))$

Fra (7) og (0.3) kan man så utlede:

(8) $\models \eta;1 \Rightarrow . T;1(\eta2) \Rightarrow \neg T;1(\neg (T;2(\alpha)\ \Omega\ T;2(\neg\alpha)))$

Nå har man ved hjelp av (iii):

(9) $\models \eta;1 \Rightarrow \neg T;1((T;2(\alpha)\ \&\ T;2(\neg\alpha))\ \Omega\ \neg((T;2(\alpha)\ \&\ T;2(\neg\alpha)))$

Fra (5), (8), (9) og (0.2) kan man så ved ren utsagnslogikk slutte:

(10) $\models \eta;1\Omega T;1(\eta;2) \Rightarrow \neg T;1(T;2(\alpha\Omega\neg\alpha))$

Dette viser at punkt (c) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis. **QED**.

Den følgende sats kan oppfattes som et korollar til det foregående teorem.

Teorem 4.4.2: Anta <η;n, T;n>/n>=1/ er en sekvens av betingede modalstrukturer. Anta n>=1. Da er også <φ(n), Q;n> en betinget modalstruktur.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Bevis: Denne satsen bevises ved induksjon på n. *Basistrinn*: Vi må vise at <φ(1),Q;1> er betinget modalstruktur. Men φ(1)= η;1 og Q;1 = T;1 ifølge Definisjon 4.4.1. Det følger da fra forutsetningene i satsen at <φ(1),Q;1> er en betinget modalstruktur.

Induksjonstrinn: Vi anta satsen holder for n (>=1), ie at (1) <φ(n), Q;n> er en betinget modalstruktur. Men ifølge forutsetningene er <η;(n+1), T;(n+1)> en betinget modalstruktur. Ifølge Teorem 4.4.1 må da <η;(n+1)ΩT;(n+1)(φ(n)), T;(n+1)oQ;n> være en betinget modalstruktur. Men φ(n+1) = η;(n+1)ΩT;(n+1)(φ(n)) og Q(n+1) = T;(n+1)oQ;n ifølge Definisjon 4.4.1. Det følger derfor at <φ(n+1), Q;(n+1) er en betinget modalstruktur. **QED**.

Teorem 4.4.3 <η;n, T;n>/n>=1/ er en sekvens av betingede modalstrukturer. Anta αêU. Da har vi:

(i) R;n(α) =CQ;n(α)

(ii) Q;n(α) = ¬R;n(¬α)

Bevis: Også denne satsen bevises ved induksjon. *Ad (i)*: *Basistrinn*: Vi har etter definisjonen av R;n at (1) R;1(α) = ¬T;1(¬α). Tilsvarende har vi i lys av definisjonen e av C og Q;n at (2) CQ;1(α) = ¬Q;1(¬α) = ¬T;1(¬α). *Induksjonstrinn*: Vi antar satsen holder for n (>=1) ie. (3) R;n(α) =CQ;n(α) og skal vise at den holder for n+1. Nå har man per definisjon av R;n :

(4) R;(n+1)(α)= ¬T;(n+1)(¬(R;n(α)) Fra (3) følger R;n(α) = ¬Q;n(¬α). Fra dette og (4) kan man da slutte:

(5) R;(n+1)(α)= ¬T;(n+1)(¬(¬Q;n(¬α))) = ¬(T;(n+1)(Q;n(¬α)) = ¬Q;(n+1)(¬α). Med andre ord har vi (6) R;(n+1)(α) = CQ;(n+1)(α). Dette viser at satsen holder for n+1 om den holder for n. Dermed har vi bevist punkt (i).

Ad (ii): Fra (i) følger R;n(α) = ¬Q;n(¬α) i lys av definisjonen av C. Da har vi siden dette holder for alle αêU at R;n(¬α) = ¬Q;n(¬¬α) = ¬Q;n(α). Men fra dette følger åpenbart Q;n(α) = ¬¬Q;n(α) = ¬ R;n(¬α).

Vi har nå gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Det følgende teorem kan oppfattes som et korollar til Teorem 4.3.1 og Teorem 4.4.2. Man ser at det er helt analogt til Elementærteorem I i forrige paragraf:

Teorem 4.4.4 (Iterasjonsteorem I). Anta α;i êU (iêN-{0}) og at α,βêU. Anta <η;n,T;n>/nêN-{0}/ er en sekvens av betingede modalstrukturer. Da har vi om n>=1 & m>=1:

(a) ⊨ φ(n) =>. Q;n(αΩβ) <=> Q;n(α)ΩQ;n(β)

(b) ⊨ φ(n) =>. Q;n(SNu/i,1,m/(α;i)) <=> SNu/i,1,m/(Q;n(α;i))

(c) ⊨ α => β → ⊨ φ(n) =>. CQ;n(α) => CQ;n(β)

(d) ⊨ α => β → ⊨ φ(n) =>. Q;n(α) => Q;n(β)

(e) ⊨ SNu/i,1,m/(α;i) =>β → ⊨ φ(n) =>.SNu/i,1,m/(Q;n(α;i)) => Q;n(β)

(f) ⊨ α <=> β → ⊨ φ(n) =>. Q;n(α) <=> Q;n(β)

(g) ⊨ α <=> β → ⊨ φ(n) =>. CQ;n(α) <=> CQ;n(β)

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Bevis: Anta Anta α;i êU (iêN-{0}) og at α,βêU. Anta <η;n,T;n>/nêN-{0}/ er en sekvens av betingede modalstrukturer og at n>=1 & m>=1. Da har vi ved hjelp av Teorem 4.4.2 at <φ(n), Q;n> er en betinget modalstruktur. Fra dette og Teorem 4.3.1 følger så satsen. **QED**.

På samme måte ser man at ser man at den følgende sats er helt analog med Teorem 4.3.2:

Teorem 4.4.5 (Iterasjonsteorem II) Anta α;i êU (iêN-{0}) og at α,β,γ êU. Anta <η;n,T;n>/nêN-{0}/ er en sekvens av betingede modalstrukturer. Da har vi om n>=1 & m>=1:

(i)	⊨ φ(n) =>. Q;n(α) Ω Q;n(α=>β) => Q;n(β)
(ii)	⊨ φ(n) =>. Q;n(SNu/i,1,m/(α;i))=>β. =>. SNu/i,1,m/Q;n(α;i) =>β
(iii)	⊨ φ(n) =>. Q;n(α<=>β) =>. (Q;n(α) <=>Q;n(β))
(iv)	⊨ φ(n) =>. Q;n(α <=> β) =>. Q;n(αoγ) <=> Q;n(βoγ)
(v)	⊨ φ(n) =>. Q;n(α <=> β) =>. Q;n(γoα) <=> Q;n(γoβ)
(vi)	⊨ φ(n) =>. Q;n(α <=> β) =>. Q;n(¬α) <=> Q;n(¬β)
(vii)	⊨ φ(n) =>. Q;n(α <=> β) =>. CQ;n(α) <=> CQ;n(β)
(viii)	⊨ φ(n) =>. Q;n(α <=> β) =>. CQ;n(αoγ) <=> CQ;n(βoγ)
(ix)	⊨ φ(n) =>. Q;n(α <=> β) =>. CQ;n(γoα) <=> Q;n(γoβ)
(x)	⊨ φ(n) =>. CQ;n(UNu/i,1,m/(α;i)) <=> UNu/i,1,m/(CQ;n(α;i))
(xi)	⊨ φ(n) =>. Q;n(SNu/i,1,m/(α;i)) <=> ¬CQ;n(UNu/i,1,m/(¬α;i))
(xii)	⊨ φ(n) =>. Q;n(UNu/i,1,m/(α;i)) <=> ¬CQ;n(SNu/i,1,m/(¬α;i))
(xiii)	⊨ φ(n) =>. CQ;n(SNu/i,1,m/(α;i)) <=> ¬Q;n(UNu/i,1,m/(¬α;i))
(xiv)	⊨ φ(n) =>. CQ;n(UNu/i,1,m/(α;i) <=> ¬Q;n(SNu/1,1,m/(¬α;i))
(xv)	⊨ φ(n) =>. Q;n(SNu/i,1,m/(α;i) => βΩ¬β) => Q;n(UNu/i,1,m/(¬α;i))

Bevis: Anta Anta α;i êU (iêN-{0}) og at α,βêU. Anta <η;n,T;n>/nêN-{0}/ er en sekvens av betingede modalstrukturer og at n>=1 & m>=1. Da har vi ved hjelp av Teorem 4.4.2 at <φ(n), Q;n> er en betinget modalstruktur. Fra dette og Teorem 4.3.2 følger så satsen. **QED**.

Endelig kan den følgende sats oppfattes som et korollar til Teorem 4.3.3, Elementærteorem III og Teorem 4.4.2:

Teorem 4.4.6 (Iterasjonsteorem III) Anta α,βêU. Anta <η;n,T;n>/nêN-{0}/ er en sekvens av betingede modalstrukturer. Da har vi:

(i)	⊨ φ(n) =>. Q;n(α=>β) => (CQ;n(α) => CQ;n(β))
(ii)	⊨ φ(n) =>. Q;n(αUβ) Ω Q;n(¬α). => Q;n(β)
(iii)	⊨ φ(n) =>. Q;n(αUβ) Ω CQ;n(¬β) => CQ;n(α)
(iv)	⊨ φ(n) =>. Q;n(α => β) =>.Q;n(¬β) => Q;n(¬α)
(v)	⊨ φ(n) =>. Q;n(α => β) => ¬CQ;n(β) => ¬CQ;n(α)
(vi)	⊨ φ(n) =>. CQ;n(αΩβ) => CQ;n(α) & CQ;n(β)
(vii)	⊨ φ(n) =>. Q;n(αUβ) => Q;n(β)UCQ;n(α)
(viii)	⊨ φ(n) =>. CQ;n(¬β) Ω Q;n(¬α) => CQ;n(¬αΩ¬β)
(ix)	⊨ φ(n) =>. CQ;n(β) Ω Q;n(α) =>CQ;n(αΩβ)
(x)	⊨ φ(n) =>. Q;n(α) => (CQ;n(β) => CQ;n(αΩβ))
(xi)	⊨ φ(n) =>. CQ;n(¬β) => ¬Q;n(αΩβ)

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Bevis: Anta α;i êU (iêN-{0}) og at α,βêU. Anta <η;n,T;n>/nêN-{0}/ er en sekvens av betingede modalstrukturer og at n>=1 & m>=1. Da har vi ved hjelp av Teorem 4.4.2 at <φ(n), Q;n> er en betinget modalstruktur. Fra dette og Teorem 4.3.3 følger så satsen. **QED**.

§4.5 Kommentarer til de generelle teoremene om modalstrukturer.

I dette avsnittet vil vi kommentere forskjellige sider ved de generelle teoremene om betingede modalstrukturer som vi har presentert og bevist i de to foregående paragrafer. Det dreier seg om satsene Teorem 4.3.1 - 4..3.3, de såkalte "Elementær-teoremene I -III" i §4.3, og "Iterasjonsteoremene I - III", ie. Teorem 4.4.4 - 4.4.6 i forrige paragraf (§4.4).

Det første som kan noteres i forbindelse med alle disse teoremene er at de fremdeles holder om vi i forutsetningene i disse satsene erstatter uttrykket "betinget modalstruktur", slik som det ble definert i §4.2, med uttrykket "betinget modalfunksjon". Dette er fordi enhver betinget modalfunksjon er en betinget modalstruktur, noe vi ga bevis for i §4.2.1. I denne forbindelse bør det også bemerkes at mengden av betingede modalstrukturer trolig er mer omfattende enn mengden av betingede modalfunksoner. Vi har ikke noe sted ovenfor bevist, eller forsøkt å bevise, at mengden av betingede modalstrukturer er inkludert i mengden av betingede modalfunksjoner.

Det andre som vi finner det viktig å bemerke er at såvel <η(Tror);(x,t), Tror*;(x,t)> som <η(Tror*);(x,t), Tror*;(x,t)> er betingede modalstrukturer. Av disse to er bare det siste paret en betinget modalfunksjon. Dette fremgår av definisjonen av "betinget modalfunksjon" og definisjonen av "η(Tror*);(x,t)". Fra dette kan vi så ved hjelp av Teorem 4.2.1.1 slutte at <η(Tror*);(x,t), Tror*;(x,t)> er en betinget modalstruktur. At det første paret er en betinget modalstruktur fremgår av Teorem 4.2.2. Man ser ganske lett at dersom R er en relasjon som er inkludert i IxTxPxU;f så er <η(R);(x,t), R*;(x,t)> såvel som <η(R*);(x,t), R*;(x,t)> betingede modalstrukturer.

Vi kan sammenfatte disse observasjonene i det følgende teorem:

Teorem 4.5.1 Anta R Inkl IxTxPxU;f. Da har man at

(i) <η(R);(x,t), R*;(x,t)> og <η(R*);(x,t), R*;(x,t)> er betingede modalstrukturer.

Man har at alle de følgende par er betingede modalstrukturer:

(ii) <η(Ser);(x,t), Ser*;(x,t)> og <η(Ser*);(x,t), Ser*;(x,t)>

(iii) <η(Husk);(x,t), Husk*;(x,t)> og <η(Husk*);(x,t), Husk*;(x,t)>

(iv) <η(Innse);(x,t), Innse*;(x,t)> og <η(Innse*);(x,t), Innse*;(x,t)>

(v) <η(Med);(z,x,t), Med*;(z,x,t)> og <η(Med*);(z,x,t), Med*;(z,x,t)>

(vi) <η(Vet);(x,t), Vet*;(x,t)> og <η(Vet*);(x,t), Vet*;(x,t)>

(vii) <η(Tror);(x,t), Tror*;(x,t)> og <η(Tror*);(x,t), Tror*;(x,t)>

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Alle de parene som er nevnt i satsen ovenfor er som man nå ser betingede modalstrukturer. Fra dette og Teorem 4.3.1 - 4.3.3 følger derfor at om vi for eksempel i Teorem 4.3.1 over alt erstatter "η" med uttrykket "η(Tror);(x,t)" og uttrykket "T" overalt med uttrykket

"Tror*;(x,t)" fremkommer en sats som åpenbart må holde. (Forutsetningen i Teorem 4.3.1 om at <η,T> er en betinget modalstruktur kan sløyfes om man foretar disse substitusjonene.) Man ser at man lett kan generere nøyaktig tolv nye teoremer fra Teorem 4.3.1 om man etter tur erstatter <η,T> med en de betingede modalstrukturene som er nevnt i punkt (ii) - (vii) ovenfor. Nøyaktig det samme kan sies i forbindelse med satsene Teorem 4.3.2 og

Teorem 4.3.3. For hver av disse to satsene kan man formulere tolv nye ettersom man erstatter <η,T> med en av strukturerne nevnt ovenfor. Det sier seg selv at det er fullstendig unødvendig å skrive opp alle disse satsene. Vi innskrenker oss til bare å nevne ett eksempel.

Fra det forhold at <η(Tror);(x,t), Tror*;(x,t)> er en betinget modalstruktur og Teorem 4.3.1 følger umiddelbart den følgende sats.

Korollar 4.5.1 (Elementærteorem I). Anta α;i êU (iêN) og at βêU. Da har vi:

(a) ⊨ η(Tror);(x,t)=>.Tror*;(x,t)(αΩβ) <=> Tror*;(x,t)(α)ΩTror*;(x,t)(β)

(b) ⊨ η(Tror);(x,t) =>.
Tror*;(x,t)(SNu/i,1,n/(α;i)) <=> SNu/i,1,n/(Tror*;(x,t)(α;i))

(c) ⊨ α => β → ⊨ η(Tror);(x,t) => .CTror*;(x,t)(α) => CTror*;(x,t)(β)

(d) ⊨ α => β → ⊨ η(Tror);(x,t) =>Tror*;(x,t)(α) => Tror*;(x,t)(β)

(e) ⊨ SNu/i,1,n/(α;i) =>β →
⊨ η(Tror);(x,t) =>. SNu/i,1,n/(Tror*;(x,t)(α;i)) => Tror*;(x,t)(β)

(f) ⊨ α <=> β → ⊨ η(Tror);(x,t) =>. Tror*;(x,t)(α) <=> Tror*;(x,t)(β)

(g) ⊨ α <=> β → ⊨ η(Tror);(x,t) => CTror*;(x,t)(α) <=> CTror*;(x,t)(β)

Bemerkninger av den typen som vi har kommet med ovenfor kan også gjøres i forbindelse med "iterasjonsteoremene" Teorem 4.4.5 - 4.4.6 i §4.4.

Istedet for å formulere korollarer en block til iterasjonsteoremene ovenfor, vil vi istedet gi endel eksempler på hva som følger fra dem.

Vi starter med det følgende eksempel: Anta t, t1 , t2 er tre tidspunkter der t < t1 < t2. La oss anta videre at:

(i) <η1,T;1> = <η(Tror);(x,t),Tror*;(x,t)>

(ii) <η;2,T;2> = <η(Vet);(x,t1), Vet*;(x,t1)>

(iii) <η;3,T;3> = <η(Tror);(x,t2), Tror*;(x,t2)>

Da har vi at i lys av det vi har nevnt ovenfor at <η;i,T;i>(i=1...3) er tre betingede modalstrukturer. Fra Definisjon 4.4.1 følger da at:

Q(3)(α) = Tror*;(x,t2)(Vet*;(x,t1)(Tror*;(x,t)(α)))

La oss så se på φ(3). Ved hjelp av Definisjon 4.4.1 ser man at

φ(3) = η;3Ω T;3(φ(2))

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Men φ(2) = η;2ΩT;2(η;1). Man har derfor at

φ(3) = η;3Ω T;3(η;2ΩT;2(η;1))

Men siden vi har ⊨ η;3=> T;3(η;2ΩT;2(η;1)) <=> T;3(η;2)ΩT;3(T;2(η;1)) og derfor ⊨ η;3ΩT;3(η;2ΩT;2(η;1)) .<=> η;3Ω T;3(η;2)ΩT;3(T;2(η;1)) følger at

φ(3) = η;3 Ω T;3(η;2)Ω T;3(T;2(η;1))

I lys av (i) - (iii) kan vi da slutte at

φ(3) = η(Tror);(x,t2)Ω Tror*(x,t2)(η(Vet);(x,t1)) Ω
Tror*;(x,t2)(Vet*;(x,t1)(η(Tror);(x,t)))

og at Q;3(α) =T;3(T;2(T;1(α))) = Tror*;(x,t2)(Vet*;(x,t1)(Tror*;(x,t)(α)))

Fra dette og Teoerem 4.4.4, punkt (a,) kan man da slutte at kondisjonalutsagnet som har som antesedent η(Tror);(x,t2)Ω Tror*(x,t2)(η(Vet);(x,t1)) Ω
Tror*;(x,t2)(Vet*;(x,t1)(η(Tror);(x,t)))
og som konsekvent bikondisjonalen der utsagnet

Tror*;(x,t2)(Vet*;(x,t1)(Tror*;(x,t)(αΩβ)))

er den venstre komponenten og utsagnet

Tror*;(x,t2)(Vet*;(x,t1)(Tror*;(x,t)(α))) Ω Tror*;(x,t2)(Vet*;(x,t1)(Tror*;(x,t)(β)))

er den høyre komponenten er logisk gyldig dvs. sant i alle mulige verdener.

La oss se på et annet eksempel. Vi antar at forutsetningene ovenfor, (i)-(iii), holder. Ved hjelp av Teorem 4.4.6, punkt (vii), kan vi da slutte at

⊨ φ(3) =>. Q;3(αUβ) => Q;3(β)UCQ;3(α)

Man ser fra dette at kondisjonalutsagnet som har

η(Tror);(x,t2)Ω Tror*(x,t2)(η(Vet);(x,t1)) Ω
Tror*;(x,t2)(Vet*;(x,t1)(η(Tror);(x,t)))

som antesedent og har utsagnet a =>b som konsekvent der

a= Tror*;(x,t2)(Vet*;(x,t1)(Tror*;(x,t)(αUβ)))

b= Tror*;(x,t2)(Vet*;(x,t1)(Tror*;(x,t)(β))) U
CTror*;(x,t2)(Vet*;(x,t1)(Tror*;(x,t)(α)))

også er sant i alle mulige verdener.

Stort sett blir iterasjonsteoremene I - II temmelig uleselige når man ser på lange sekvenser av operatorene Tror*, Ser*, Innse* , Vet*. Dette skulle klart fremgå av de to eksemplene vi har gitt ovenfor.

Hvis <η;i,T;i>/i>=1/ er en sekvens av betingede modalstrukturer har vi definert hva som menes med <K;n>/n>=1 og <φ(n)>/n>=1/. Man kan i denne sammenheng studere Definisjon 4.4.1. Det er imidlertid intet som tilsier at de diverse <η;i,T;i> skal være distinkte ettersom i gjennomløper de naturlige tall >=1. Man kan ha <η;i,T;i> = <η;(i+1), K;(i+1)> for alle i>0. Dette vil være tilfelle om vi for eksempel setter (1) <η;i,T;i> = <η(Tror);(x,t), Tror*;(x,t)> for alle i>0. La oss nå sette per definisjon om αêU:

(i) Tror*(1);(x,t)(α) = Tror*;(x,t)(α)

(ii) Tror*(n+1);(x,t)(α) = Tror*;(x,t)(Tror*(n);(x,t)(α))

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Gitt at (1) holder er det da lett å vise at Q;n(α) = Tror*(n);(x,t)(α) for alle n>0. Videre vil vi ha φ(1) = η(Tror);(x,t) og at φ(n+1)= η(Tror);(x,t) Ω Tror*;(x,t)(φ(n)). Setter man temporært γ = η(Tror);(x,t) kan man faktisk vise at

φ(n) = γ Ω SNu/i,1,n-1/(Tror*(i);(x,t)(γ))

Alt dette innebærer at om vi antar (1) ovenfor holder er det lett å se at f.eks følgende sats er et korollar til Teorem 4.4.4:

Korollar 4.5.2 Anta α;i êU (iêN-{0}) og at α,βêU. Anta
(i) <η;n,T;n>=<η(Tror);(x,t), Tror*;(x,t)> for alle n>0.
Da har vi om n>=1 & m>=1:
(a) ⊨ φ(n) =>. Tror*(n);(x,t)(αΩβ) <=> Tror*(n);(x,t)(α)ΩTror*(n);(x,t)(β)
(b) ⊨ φ(n) =>. Tror*(n);(x,t)(SNu/i,1,m/(α;i)) <=> SNu/i,1,m/(Tror*(n);(x,t)(α;i))
(c) ⊨ α => β → ⊨ φ(n) =>. CTror*(n);(x,t)(α) => CTror*(n);(x,t)(β)
(d) ⊨ α => β → ⊨ φ(n) =>. Tror*(n);(x,t)(α) => Tror*(n);(x,t)(β)
(e) ⊨ SNu/i,1,m/(α;i) =>β →
⊨ φ(n) =>.SNu/i,1,m/(Tror*(n);(x,t)(α;i)) => Tror*(n);(x,t)(β)
(f) ⊨ α <=> β → ⊨ φ(n) =>. Tror*(n);(x,t)(α) <=> Tror*(n);(x,t)(β)
(g) ⊨ α <=> β → ⊨ φ(n) =>. CTror*(n);(x,t)(α) <=> CTror*(n);(x,t)(β)

Det sier seg selv at vi i avsnittene ovenfor kunne ha arbeidet med en av relasjonene Ser, Innse, Vet, Husk og Med istedet for relasjonen Tror.

§5 Om en utvidelse av begrepet 'standard begrepsramme'

Hittil i denne delen av vårt arbeid, Del III, har vi ikke på noe vis trukket inn begrepet begrepsramme som vi introduserte i Del I. Heller ikke har det vært nødvendig å trekke inn begrepet 'standard begrepsramme' i diskusjonen. Dette innebærer at ingen av de aksiomene i vår kunnskapsteori som trekker inn noen av disse begrepene har blitt brukt ved utledningen av teoremene ovenfor. I dette avsnittet vil vi imidlertid se litt nærmere på hvordan teoremene ovenfor kan avspeiles innenfor en viss klasse av begrepsrammer. Dette kan kaste ytterligere noe lys over de satsene vi hittil har bevist i denne delen.

Vi har tidligere definert begrepet 'standard begrepsramme' i Del II og skal derfor ikke gjenta denne her. Imidlertid nevner vi at dersom B = <D,X, In> er en standard begrepsramme så vil de intensjonale relasjonene |Ser|, |Vet|, |Tror|, |Innse|, |Inns|, |Husk| og |Med| være elementer i In, dvs. de intensjonale relasjonene som inngår i begrepsrammen.

Vi skal nå tenke oss at en standard begrepsramme oppfyller ytterligere noen krav. Men vi skal ikke formulere dem akkurat nå, men vil komme tillbake til dem noe senere.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

La oss først minne om at de relasjonene vi hovedsakelig har arbeidet med i denne delen, Del III, har vært relasjonene Ser, Innse, Husk, Med, Vet og Tror. Alle disse relasjonene er inkludert i IxTxPxU;f. I det følgende skal imidlertid våre overveielser være litt mer generelle (i det minste til å begynne med) og vi betrakter derfor en vilkårlig relasjon R der R Inkl IxTxPxU;f.

Vi skal først definere et binært attributt |η(R)|. Et person-tidspunkt-par <x,t> har denne egenskapen i verdenen w hvis og bare hvis utsagnsfeltet til R med hensyn på x og t i verdenen w er en rasjonelt organisert mengde med finstrukturerte utsagn. Ekstensjonsfunksjonen til dette binære attributtet vi da være:

(1) λ/wêI/(Mg(<x,t>: Rasj;f(Mg(y: yêU;f & <w,t,x,y>êR))))

Selve egenskapen |η(R)| kan da defineres slik:

(2) |η(R)| = Ekst;-1[λ/wêI/(Mg(<x,t>: Rasj;f(Mg(y: yêU;f & <w,t,x,y>êR))))]

Vi definerer videre uttrykket "η(R)_" på følgende vis:

(3) η(R)_ = <3,2,0, |η(R)|>

Det følger fra dette at dersom B = <D,X,In> er en begrepsramme der |η(R)| ê X så er η(R)_ et egenskapsnavn assosiert med denne begrepsrammen. Er a,b to elementer i D, og setter vi n(x) = <2,0,0,x> for alle xêD, vi n(a) og n(b) være navnene på elementene a,b assosiert med begrepsrammen B. η(R)_(n(a),n(b)) vil da være en formel i CFm(B). Denne formelen uttrykker da utsagnsfeltet til R med hensyn på a og b er en rasjonelt organisert mengde med finstrukturerte utsagn.

Vi kan sammenfatte det vi har nevnt ovenfor i den følgende definisjon:

Definisjon 5.1 Anta R Inkl IxTxPxU;f Da setter vi:
(i) |η(R)| = Ekst;-1[λ/wêI/(Mg(<x,t>: Rasj;f(Mg(y: yêU;f & <w,t,x,y>êR))))]
(ii) η(R)_ = <3,2,0, |η(R)|>

Nå skulle det være klart siden Tror, Vet, Innse, Ser, Husk og (Med) er relasjoner som er inkludert i IxTxPxU;f (IxTxP^2xU;f) at |η(Tror)|, |η(Vet)|,... | η(Med)| er binære egenskaper. (Den siste vil være en ternær egenskap). Med andre ord er for eksempel |η(Vet)| den egenskapen som et person-tidspunkt par <x.t> er i besittelse av hvis og bare hvis kunskapsfeltet til x ved tidspunktet t er en rasjonelt organisert mengde med finstrukturerte utsagn. Man ser også at dersom B = <D,X,In> er en begrepsramme og |η(Vet)|êX vil vi ha at η(Vet)_ = <3,2,0, |η(Vet)|> er et egenskapsnavn assosiert med rammen B, og er da f.eks. a,b to konstanter assosiert med B, vil η(Vet)_(a,b) være en formel assosiert med B, med andre ord vil da η(Vet)_;(a,b)êFm(B).

Vi vil nå gå et steg videre og etterhvert definere to intensjonale relasjoner av type <2,1> over D i det vi forutsetter at D er den første komponenten i i en begrepsramme B = <D,X,In>.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Vi tenker oss igjen at R er envilkårlig relasjon der R Inkl IxTxPxU;f. Vi betrakter nå mengden av alle de par <<x,t>,y> der vi har at

(4) yêU;f & (Ez)(zêU;f & μ;f(y) = μ;f(z) & <w,t,x,z>êR)

dette innebærer at vi betrakter mengden av alle de par <<x,t>,y> der y er et finstrukturert utsagn som er eksvivalent med et eller annet finstrukturert utsagn som hører med i utsagnsfeltet t R med hensyn på xog t i verdenen w.

Ser man nå på:

(5) λ/wêI/(Mg(<<x,t>,y>: yêU;f & (Ez)(zêU;f & μ;f(y) = μ;f(z) & <w,t,x,z>êR)))

vil dette være ekstensjonsfunksjonen til et bestemt attributt som vi betegner med |R*|. Denne egenskapen vil være en intensjonal relasjon av type <2,1>. Vi definerer den slik:

(6) |R*| = Ekst;-1(λ/wêI/(Mg(<<x,t>,y>: yêU;f &
(Ez)(zêU;f & μ;f(y) = μ;f(z) & <w,t,x,z>êR))))

Siden |R*| er en intensjonal relasjon av type <2,1> (Jmf. den definisjonen av intensjonal relasjon som vi har gitt tidligere i Del I) kan vi tenke oss at den er med i In der B=<D,X,In> er en begrepsramme. Er den det vil <4,2,1,|R*|> være et navn på denne intensjonale relasjonen assosiert med begrepsrammen B. Vi betegner dette navnet med R*_ og setter:

(7) R*_ =<4,2,1,|R*|>

Vi kan sammenfatte våre overveielser her i den følgende definisjon:

Definisjon 5.2 Anta R Inkl IxTxPxU;f Da setter vi:
(i) |R*| = Ekst;-1(λ/wêI/(Mg(<<x,t>,y>: yêU;f &
(Ez)(zêU;f & μ;f(y) = μ;f(z) & <w,t,x,z>êR))))
(ii) R*_ =<4,2,1,|R*|>

Man ser at denne definisjonen er generell. R er en vilkårlig relasjon som er inkludert i IxTxPxU;f. Siden Tror f,eks. også er en slik relasjon kan man derfor i denne definisjonen sette R = Tror. I så tilfelle får man:

(8) |Tror*| = Ekst;-1(λ/wêI/(Mg(<<x,t>,y>: yêU;f &
(Ez)(zêU;f & μ;f(y) = μ;f(z) & Tror;(w,t)(x,y))))

og (9) Tror*_= <4,2,1,|Tror*|>

Vi har derfor at |Tror*| er en intensjonal relasjon av type <2,1> over D. Tenker man seg at B=<D,X,In> er en begrepsramme og at |Tror*| ê In vil naturligvis Tror*_ være et navn på denne relasjonen assosiert med B. Tilsvarende betraktninger kan gjøres i forbindelse med de andre relasjonene vi har arbeidet med: Innse, Husk, Ser, Vet og Med. Når det gjelder Med må man huske på at Med Inkl IxTxP^2xU;f og at vi derfor har:

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

|Med*| = Ekst;-1(λ/wêI/(Mg(<<z,x,t>,y>: yêU;f &
(Ez)(zêU;f & μ;f(y) = μ;f(z) & Med;(w,t)(z,x,y)>))))

Som man ser fra denne definisjonen følger det at |Med*| er en intensjonal relasjon av type <3,1> over D og at vi videre har Med*_ = <4,3,1,|Med*|>.

Er B=<D,X,In> en begrepsramme der |Tror*| ê In og a,bêD, og hvor vi forutsetter at a0=<2,0,0,a> og b0= <2,0,0,b> og αê CFm(B), vil Tror*_(a0,b0)(α) også være en formel som er med i CFm(B). Merk at formelen Tror*_(a0,b0)(α) ikke uttrykker at a tror ved tidspunktet b at α, men snarere at det at α er tilfelle er ekvivalent med noe (et finstrukturert utsagn) a tror ved tidspunktet b. Tilsvarende vil for eksempel Husk*_(a0,b0)(α) måtte leses slik: Det at α er ekvivalent med et finstrukturert utsagn som a husker at er tilfelle ved tidspunktet b.

Den intensjonale relasjonen |R*| der R Inkl IxTxPxU;f svarer naturligvis til utsagnsfunksjonen R* ;(x,t) : U→U. Vi skal nå se på en annen intensjonal relasjon |R°| som står i samme forhold til R°;(x,t): U→U som |R*| forholder seg til R*;(x,t) : U→U.

Igjen antar vi at R er en vilkårlig relasjon som er inkludert i IxTxPxU;f og at B=<D,X,In> er en begrepsramme. Vi betrakter så uttrykket:

(10) yêU;f & I∩Mg(μ;f(z): <w,t,x,z>êR) Inkl μ;f(y)

Når man studerer formelen (10) nøyere skulle det ikke være så vanskelig å innse at den sier at snittet av sannhetsmengdene til alle de finstrukturerte utsagnene som er med i utsagnsfeltet til R med hensyn på x,t i verdenen w impliserer det finstrukturerte utsagnet y.

Den funksjonen som til enhver mulig verden w tilordner w mengden av alle de par <<x,t>,y> som oppfyller (10) , med andre ord den følgende funksjon:

(11) λ/wêI/[Mg(<<x,t>,y>: yêU;f & I∩Mg(μ;f(z): <w,t,x,z>êR) Inkl μ;f(y))]

er selvfølgelig ekstensjonsfunksjonen til en viss egenskap. Vi betegner denne |R°| og setter per definisjon:

|R°| = Ekst;-1(λ/wêI/[Mg(<<x,t>,y>: yêU;f &
I∩Mg(μ;f(z): <w,t,x,z>êR) Inkl μ;f(y))])

|R°| er naturlig nok en intensjonal relasjon av type <2,1> over D. I det følgende setter vi R°_ = <4,2,1,|R°|>. Har man nå at B=<D,X,In> er en begrepsramme og at |R°| êIn vil R°_ være navnet på den intensjonale relasjonen |R°| assosiert med B.

Vi sammenfatter betraktningene ovenfor i den følgende definisjon:

Definisjon 5.3 Anta R Inkl IxTxPxU;f Da setter vi:
(i) |R°| = Ekst;-1(λ/wêI/[Mg(<<x,t>,y>: yêU;f &
I∩Mg(μ;f(z): <w,t,x,z>êR) Inkl μ;f(y))])

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(ii) R°_ = <4,2,1,|R°|>

Man ser at denne definisjonen er generell. R er en vilkårlig relasjon som er inkludert i IxTxPxU;f. Siden Tror f,eks. også er en slik relasjon kan man derfor i denne definisjonen sette R = Tror. I så tilfelle får man:

(8) |Tror°| = Ekst;-1(λ/wêI/[Mg(<<x,t>,y>: yêU;f &
I∩Mg(μ;f(z): Tror;(w,t)(x,z)) Inkl μ;f(y))])

og (9) Tror°_= <4,2,1,|Tror°|>

Vi har derfor at |Tror°| er en intensjonal relasjon av type <2,1> over D. Tenker man seg at B=<D,X,In> er en begrepsramme og at |Tror°| ê In vil naturligvis Tror°_ være et navn på denne relasjonen assosiert med B. Tilsvarende betraktninger kan gjøres i forbindelse med de andre relasjonene vi har arbeidet med: Innse, Husk, Ser, Vet og Med. Når det gjelder Med må man huske på at Med Inkl IxTxP^2xU;f og at vi derfor har:

|Med°| = Ekst;-1(λ/wêI/[Mg(<<z,x,t>,y>: yêU;f &
I∩Mg(μ;f(v): Med;(w,t)(z,x,v)) Inkl μ;f(y))])

Som man ser fra denne definisjonen følger det at |Med°| er en intensjonal relasjon av type <3,1> over D og at vi videre har Med°_ = <4,3,1,|Med°|>.

Er B=<D,X,In> en begrepsramme der |Tror°| ê In og a,bêD, og hvor vi forutsetter at a0=<2,0,0,a> og b0= <2,0,0,b> og αê CFm(B), vil Tror°_(a0,b0)(α) også være en formel som er med i CFm(B). Merk at formelen Tror°_(a0,b0)(α) ikke uttrykker at a tror ved tidspunktet b at α, men snarere at *det at α er en konsekvens av alt det a tror ved tidspunktet b*. Tilsvarende vil for eksempel Husk°_(a0,b0)(α) måtte leses slik: "Det at α er en logisk konsekvens av alt det a husker at er tilfelle ved tidspunktet b" eller "Fra alt det a husker ved tidspunktet b følger at α".

Vi har ovenfor definert de intensjonale relasjonene |R*| og |R°|. Det er imidlertid mulig å definere |R| på en naturlig måte for alle R Inkl IxTxPxU;f.

Dette skjer på den følgende måte. Man ser at λ/wêI/(<<x,t>,y>: <w,t,x,y>êR) er en ekstensjonsfunksjon. Derfor vil Ekst;-1(λ/wêI/(<<x,t>,y>: <w,t,x,y>êR)) være en egenskap. Denne egenskap vil være en intensjonal relasjon av type <2,1> over D. Vi betegner den med |R|. Selvfølgelig vil da, om B=<D,X,In> er en begrepsramme og |R|êIn , <4,2,1,|R|> være et navn på |R| assosiert med begrepsrammen B. Det kan være hensiktsmessig å sammenfatte dette i en definisjon:

Definisjon 5.4 Anta R Inkl IxTxPxU;f Da setter vi:
(i) |R| = Ekst;-1(λ/wêI/[Mg(<<x,t>,y>: yêU;f & <w,t,x,y>êR)])
(ii) R_ = <4,2,1,|R|>

Det følger fra denne definisjonen at dersom B=<D,X,In> er en begrepsramme og man har (AR)(R Inkl IxTxPxU;f → |R|êIn) at også f.eks. |Vet|, |Tror|, |Ser| êIn. Dette er selvfølgelig fordi relasjonene Vet, Tror, Ser er inkludert i IxTxPxU;f.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Vi skulle nå ha gjort de forberedelser som gjør det naturlig å redfinere begrepet 'standard begrepsramme' som vi introduserte tidligere i Del II. Vi skal legge til endel krav som gjør definisjonen "sterkere" i den forstand at enhver standard begrepsramme i den nye betydningen er en standard begrepsramme i den gamle betydningen, mens det omvendte ikke holder.

Definisjonen er denne:

Definisjon 5.5 En begrepsramme B= <D,X,In> kalles en standard begrepsramme om den oppfyller følgende krav:

(i) T,P Inkl D & X= UN/i,1,inf/(E(D^n))
(ii) |T|,|P|, |<| ê X
(iii) |Nec|, |Pos| êIn
(iv) (AR)(Rê {Ser, Innse,Husk,Vet,Tror, Med}→ |R|êIn)
(v) (AR)(R ê {Ser, Innse,Husk,Vet,Tror,Med} → |η(R)|êX)
(vi) (AR)(Rê {Ser, Innse,Husk,Vet,Tror,Med} → |R*|êIn)
(vii) (AR)(R ê {Ser, Innse,Husk,Vet,Tror,Med} → |R°|êIn)

Studerer man denne definisjonen nærmere og sammenligner den med den vi ga tidligere i Del II ser man at kravene (i) - (iii) er de samme. Den gamle definisjonen inneholdt bare disse tre kravene samt det krav at de intensjonale relasjonene |Ser|, |Innse|, |Husk|, |Med|, |Vet|, og |Tror| var med i In. Krav (iv) er bare en reformulering av dette kravet. I tillegg har vi føyd til kravene (v), (vi) og (vii) som innebærer at f. eks. |η(Tror)| nå må være blandt egenskapene i X, og at de intensjonale relasjonene |Tror°| og |Tror*| (blandt mange andre) nå også kreves som medlemmer av In.

Tidligere, i Del II, ble det forklart hva som mentes med en intepretasjonsfunksjon ξ assosiert med en begrepsramme B= <D,X,In>. Er B=<D,X,In> en begrepsramme og ξ en intepretasjonsfunksjon assosiert med B (ie, ξ : CFm(B) -(1-1)→U;f) definerte vi også hva som mentes med at den utvidete begrepsrammen <B,ξ> representerer en delmengde av de fintrukturerte utsagnene i U;f.

Tilslutt definerte vi presist (i Del II) hva som menes med at en formel assosiert med B, ie. en αêFm(B) , er gyldig i B. Vi definerte altså hva som menes med B ⊨ α, der α er en formel assosiert med B og B en begrepsramme.

Anta nå at B=<D,X,In> er en standard begrepsramme i den betydning som er fastsatt ved Definisjon 5.5 og at ξ : CFm(B) -(1-1)→U;f og at <B,ξ> representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Da har vi at alle de konstruksjonene vi har nevnt ovenfor som f.eks. η(Tror)_, Tror_, Tror°_ Tror*_ etc. inngår i formler som er med i Fm(B). Det vi nå er interessert i er hvilke av disse formlene som er gyldige i B.

Med de bemerkningene vi har kommet med ovenfor i tankene er det nå mulig å utlede en lang rekke satser som kaster lys over dette og særlig egenskapene til konstruksjonene R*_, R°_ , der man for "R" kon sette inn "Ser", "Tror", "Vet" osv.

Vi starter med en sats vedrørende konstruksjonene η(Tror)_ og Tror*_, nemlig denne:

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Teorem 5.1 Anta B=<D,X,In> er en standard begrepsramme, ξ: CFm(B) -(1-1)→U;f og at <B,ξ> representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Anta α,βêFm(B) og x,t er variabeltegn assosiert med B. Da har vi:

(i) $B \models \alpha \rightarrow B \models \eta(Tror)_(x,t) \rightarrow Tror^*_;(x,t)(\alpha)$

(ii) $B \models \eta(Tror)_(x,t) \rightarrow . \; Tror^*_;(x,t)(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow Tror^*_;(x,t)(\alpha) \rightarrow Tror^*_;(x,t)(\beta)$

(iii) $B \models \eta(Tror)_(x,t) \rightarrow \sim(Tror^*_;(x,t)(\alpha \,\&\sim\alpha))$

Noen kommentarer til dette teoremet er på sin plass. For det første nevner vi at η(Tror)_;(x,t) innebærer at trosfeltet til x ved tidspunktet t er rasjonelt organisert, dvs. utgjør en deduktivt strengt lukket mengde med finstrukturerte utsagn som er konsistent og som inneholder alle nødvendig sanne finstrukturerte utsagn. For det andre nevner vi at Tror*_;(x,t)(α) innebærer at α er logisk ekvivalent med et eller annet finstrukturert som x tror ved tidspunktet t. Man kunne lese "Tror*;(x,t)(α)" slik " *x tror ved tidspunktet t i den logisk gjennomsiktige betydning at α*".

For det andre nevner vi at denne satsen er helt analog med Teorem 4.2.1 i §4.2 ovenfor og at beviset for satsen ovenfor i det vesentlige har samme struktur som beviset for Teorem 4.2.1.

For det tredje understreker vi at at Teorem 5.1 holder om vi i denne satsen erstatter alle forekomster av uttrykket "Tror" med ett av uttrykkene "Ser", "Innse", "Husk", "Med" og "Vet".

Endelig nevner vi at det er lett å formulere teoremer som er helt analoge med de tre "Elementærteoremene" Teorem 4.3.1 - 4.3.3 i §4.3. Man får for eksempel en sats som er helt analog med Teorem 4.3.2 om man i dette teoremet erstatter forutsetningen i satsen med forutsetningen i Teorem 5.1 ovenfor. Videre må man gjøre følgende: Man må erstatte alle forekomster av "η" med "η(Tror)_;(x,t)" og alle forekomster av "T" med "Tror*_;(x,t)". Videre må man overalt erstatte tegnene "¬", "Ω", "U", "=>" og "<=>" med henholdsvis "~", "&", "v", "→" og "↔". Dessuten må man overalt hvor det står "SNu/i,1,n/" istedet skrive "/\ /i,1,n/" og erstatte alle forekomster av "UNu/i,1,n/" med "\/ /i,1,n/". Tilslutt må man erstatte alle forekomster av " ⊨" med "B ⊨" og endelig erstatte alle forekomster av "CT" med "CTror*_;(x,t)". Dette siste uttrykket er naturligvis definert ved:

CTror*_;(x,t)(α) = ~Tror*_;(x,t)(~α).

Gjør man disse erstatningene i de nevnte elementærteoremer i §4.3 får man tre nye satser som alle kan utledes fra Teorem 5.1 ovenfor.

Vi har nå sett på konstruksjonene η(Tror)_;(x,t) og Tror*_;(x,t) som åpenbart svarer til operasjonene η(Tror);(x,t) og Tror*. Vi studerte i §3 utsagnsfunksjonen Tror°;(x,t). I forbindelse med begrepsrammer har vi, som man ser fra det vi har nevnt ovenfor, at denne funksjonen svarer til konstruksjonen Tror°_ som vi definerte ovenfor. Vi skal nå se litt nærmere på egenskapene til denne konstruksjonen. I forbindelse med funksjonen Tror°;(x,t) i §3 bemerket vi at dette var hva vi kalte en K-funksjon. Dette henspiller naturligvis på det velkjente modallogiske system som går under navnet "K". Når man nå imidlertid ser på konstruksjonen Tror°_ ser man fra det følgende teorem at denne har egenskaper som er helt

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

analoge med egenskapene til nødvendighetsoperatoren i modalsystemet K. Dette fremgår av den følgende sats:

Teorem 5.2 Anta B=<D,X,In> er en standard begrepsramme, ξ: CFm(B) -(1-1)→U;f og at <B,ξ> representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Anta α,βêFm(B) og x,t er variabeltegn assosiert med B. Da har vi:

(i) $B \models \alpha \rightarrow B \models Tror°_;(x,t)(\alpha)$
(ii) $B \models Tror°_;(x,t)(\alpha\rightarrow\beta) \rightarrow Tror°_;(x,t)(\alpha) \rightarrow Tror°_;(x,t)(\beta)$

Vi skal ikke gi noe bevis for denne satsen siden det er temmelig elementært og man kan gå utfra at enhver som med en viss oppmerksomhet har fulgt med på hva vi har skrevet i tidligere paragrafer kan gi et bevis på egenhånd. Man ser at (i) i teoremet svarer til det som ofte kalles for den modale generaliseringsregelen i vanlig modallogikk og at (ii) i satsen svarer tildet som av og til i modallogikken kalles for aksiomet som sier at nødvendighets-operatoren distribuerer over kondisjonaloperatoren.

I forbindelse med operasjonen Tror°;(x,t) : U →U beviste vi i §2.2 vise satser Teorem 2.2.1 - Teorem 2.2.3 som vi kalte for "elementær"-teoremer. Det som nå kan bemerkes er at disse teoremene har sine helt klare motstykker om vi i stedet for Tror° (eller mer generelt det vi kalte i §2 for K-funksjoner) arbeider med Tror°_. Tar vi for oss for eksempel Teorem 2.2.2 får vi frem et teorem som fremdeles holder om vi gjør følgende: Vi erstatter forutesetningen i Teorem 2.2.2 med forutsetningen i i Teorem 5.2 og føyer også til at γ êFm(B). Dernest erstatter vi alle forekomster av uttrykket "F" i Teorem 2.2.2 med uttrykket "Tror°_;(x,t)". Videre må man overalt erstatte tegnene "¬", "Ω", "U", "=>" og "<=>" med henholdsvis "~", "&", "v", "→" og "↔". Dessuten må man overalt hvor det står "SNu/i,1,n/" istedet skrive "/\ /i,1,n/" og erstatte alle forekomster av "UNu/i,1,n/" med "\/ /i,1,n/". Tilslutt må man erstatte alle forekomster av " ⊨" med "B ⊨" og endelig erstatte alle forekomster av "CT" med "CTror°_;(x,t)". Dette siste uttrykket er naturligvis definert ved:

$CTror°_;(x,t)(\alpha) = \sim Tror°_;(x,t)(\sim\alpha)$.

Gjør man dette vil Teorem 2.2.2 i §2.2 transformeres til enhelt analog sats om begrepsrammer som fortsatt holder. På nøyaktig samme måte kan man transformere Teorem 2.2.1 og Teorem 2.2.3 til nye satser som fremdeles holder.

Sammenfattende kan man si at alle de satser vi tidligere har bevist om operasjonene Tror*;(x,t) og Tror°;(x,t) (og de tilsvarende operasjonene basert på relasjonene Ser, Innse, Husk, Med og Vet) har sine klare motstykker når vi arbeider med begrepsrammer og innfører konstruksjonene η(R)_ , R*_ og R°_ (hvor R kan være en av relasjonene Ser, Husk, osv.) slik vi har gjort i denne paragrafen.

Vi bemerker at man i bevisene for Teorem 5.1 og 5.2 samt de elementærteoremene som korresponderer til dem (som vi har antydet ovenfor) ikke behøver å bruke noen av de aksiomene i kunnskapsteorien som essensielt inneholder referanser til standard begrepsrammer, ie. man behøver ikke å referere til noen av aksiomene E14 - E17. Når det gjelder de aksiomene som vi faktisk har benyttet i denne delen av vårt arbeid har vi gjort rede for dem i §1. Det dreier seg da bare om de følgende aksiomer: E1, E2, E3, E4, E5, E10, E12

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

og E13 samt C1.(C2 er strengt tatt overflødig siden det følger fra E2 og C1). På basis av disse aksiomene er det også lett å se at implikasjonene som nevnes i det følgende teorem holder:

Teorem 5.3 Anta B=<D,X,In> er en standard begrepsramme, ξ: CFm(B) -(1-1)→U;f og at <B,ξ> representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Anta α ê Fm(B) og z, x, t er variabeltegn assosiert med B. Da har vi:

(i) B ⊨ Ser°_;(x,t)(α) → Vet°_;(x,t)(α)
(ii) B ⊨ Innse°_;(x,t)(α) → Vet°_;(x,t)(α)
(iii) B ⊨ Husk°_;(x,t)(α) → Vet°_;(x,t)(α)
(iv) B ⊨ Med°_;(z,x,t)(α) → Vet°_;(x,t)(α)
(v) B ⊨ Vet°_;(x,t)(α) → Tror°_;(x,t)(α)
(vi) B ⊨ Vet°_;(x,t)(α) → α

Når det gjelder beviset for denne satsen følger det samme mønster som beviset for Teorem 2.1.6 i §2.1.

Teorem 5.4 Anta B=<D,X,In> er en standard begrepsramme, ξ: CFm(B) -(1-1)→U;f og at <B,ξ> representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Anta α ê Fm(B) og z, x, t er variabeltegn assosiert med B. Da har vi:

(i) B ⊨ Ser*_;(x,t)(α) → Vet*_;(x,t)(α)
(ii) B ⊨ Innse*_;(x,t)(α) → Vet*_;(x,t)(α)
(iii) B ⊨ Husk*_;(x,t)(α) → Vet*_;(x,t)(α)
(iv) B ⊨ Med*_;(z,x,t)(α) → Vet*_;(x,t)(α)
(v) B ⊨ Vet*_;(x,t)(α) → Tror*_;(x,t)(α)
(vi) B ⊨ Vet*_;(x,t)(α) → α

Dette teoremet skulle også være temmelig opplagt i lys av de implikasjonene som ble fremstillt i Figur 1 i §1. Beviset følger igjen det samme mønsteret som beviset for et tidligere teorem, nemlig Teorem 3.6 i §3.

Vi skal avslutningsvis se på en sats som er litt mer interessant enn de to vi nettopp har kommentert. Grunnen er at denne satsen relaterer konstruksjonene Tror_, Tror°_, Tror*_ og η(Tror)_ til hverandre:

Teorem 5.5 Anta B=<D,X,In> er en standard begrepsramme, ξ: CFm(B) -(1-1)→U;f og at <B,ξ> representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Anta α ê Fm(B) og x, t er variabeltegn assosiert med B. Da har vi:

(i) B ⊨ Tror_;(x,t)(α) → Tror°_;(x,t)(α)
(ii) B ⊨ Tror_;(x,t)(α) → Tror*_;(x,t)(α)
(iii) B ⊨ Tror*_;(x,t)(α) → Tror°_;(x,t)(α)
(iv) B ⊨ η(Tror)_;(x,t) →
Tror_;(x,t)(α) ↔ Tror*_;(x,t)(α) ↔ Tror°_;(x,t)(α)

Det skulle neppe være nødvendig å gi noe bevis for denne satsen akkurat her. Noen kommentarer er imidlertid på sin plass.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Det første punktet sier at dersom x ved tidspunktet tror at α er tilfelle så er det slik at fra alt det x tror ved tidspunktet t følger det at α. Det andre punktet uttrykker at dersom x tror at α så er det at α ekvivalent med et finstrukturert utsagn som x tror. Begge disse setningene skulle være fullstendig innlysende. Det tredje punktet i satsen sier at dersom det at α er noe som er ekvivalent me d et eller annet som x tror så er det også en konsekvens av alt det som x tror. Det siste punktet i satsen sier at dersom trosfeltet til x (ved tidspunktet t) er rasjonelt organisert så er den påstand at x tror α ekvivalent med den påstand at α er ekvivalent med noe som x tror, og denne siste påstanden er i sin tur ekvivalent med at det at α er en logisk konsekvens av alt det x tror.

Det skulle ikke være så vanskelig å se at dette holder om man går tilbake til definisjonen av en rasjonelt organisert mengde med finstrukturerte utsagn og innprenter seg de krav som stilles i denne definisjonen.

Man ser at man får helt analoge satser om man overalt i Teorem 5.5 erstatter uttrykket "Tror" overalt med et av de følgende uttrykk: "Ser", "Innse", "Husk", "Vet" eller "Med".

§6 Avslutning og oppsummering

Vi har i denne delen av vårt arbeid definert en rekke viktige begreper ved hjelp av de seks epistemiske relasjonene som vi definerte i innledningen til denne delen og i §1. Det dreide seg om de følgende relasjoner: Vet, Tror, Ser, Husk, Innse og Med. Hver og en av disse relasjonene er inkludert i IxTxPxU;f.

Tar vi nå for oss f.eks. relasjonen Vet (helt tilsvarende ting kan sies mutatis mutandis om de andre epistemiske relasjonene) definerte vi først de to utsagnsfunkjsonene Vet*;(x,t) og Vet°;(x,t) som begge avbilder mengden av utsagn inn i mengden av utsagn, og hvor vi har at Vet°;(x,t)(α) (om x er en person og t er et tidspunkt) er det utsagnet som sier at utsagnet α er en logisk konsekvens av alt det x vet er tilfelle ved tidspunktet t. På lignenede vis er Vet*;(x,t)(α) det utsagnet som sier at α er ekvivalent med et finstrukturert usagn som beskriver et forhold x vet foreligger ved tidspunktet t.

Når det gjelder Vet°;(x,t) viste vi på grunnlag av aksiomene i vår teori at denne har visse egenskaper som ligner på de egenskapene som modaloperatoren i modalsystemet K er i besittelse av. Vi definerte derfor hva vi generelt mener med en K-funksjon og viste formellt at Vet°;(x,t) er en slik K-funksjon. (Dette gjelder også de tilsvarende funksjonene Tror°;(x,t), Ser°;(x,t), ... osv.) Vi utviklet så det man kunne kalle den generelle teorien om K-funksjoner. I denne forbindelse beviste vi tre ganske omfangsrike satser som vi kalte for Elementærteorem I - III. Det ble også bevist at dersom K;1 og K;2 er K-funksjoner så er sammensetningen av dem, K;2oK;1, en K-funksjon. Dette gjorde det mulig å bevise tre teoremer som vi kalte Iterasjonsteorem I - III som er helt analoge med de tre tidligere nevnte elementær-teoremer. Siden disse teoremene gjelder generelt gjelder de også for f.eks. Tror°;(x,t), Vet°;(x,t) osv.

Som man har sett har vi også har vi også for hver og en av de epistemiske relasjonene Vet, Tror, Ser, osv. definert utsagnene η(Vet);(x,t), η(Tror);(x,t), η(Ser);(x,t) osv. Hvis vi her bruker relasjonen Tror som eksempel er η(Tror);(x,t) det utsagnet som sier at utsagnsfeltet til relasjonen Tror med hensyn på x og t er rasjonelt organisert. I forbindelse med operasjonen η innførte vi i §4.1 begrepet 'betinget modalstruktur'. Dette var som man husker et ordnet par

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

<η,T> der η var et utsagn og T en utsagnsfunksjon (ie. en funksjon som avbilder mengden av utsagn inn i mengden av utsagn) og hvor komponentene oppfylte kravene nevnt i Definisjon 4.2.1 i §4.2. Vi viste i denne forbindelse at <η(Tror);(x,t), Tror*;(x,t)> var en slik betinget modalstruktur og at det samme var tilfelle mutatis mutandis for de andre epistemiske relasjonene. I forbindelse med betingede modalstrukturer viste vi også teoremer som var helt analoge med de elementærteoremer og iterasjonsteoremer som vi viste i forbindelsee med K-funksjoner.

I §5 viste vi hvordan man for hver og en av de epistemiske relasjonene Vet, Tror, Ser, Husk, Innse og Med kunne definere to typer av tilsvarende *intensjonale relasjoner*, på den ene side |Vet°|, |Tror°|, |Ser°|, |Husk°|, |Innse°| og |Med°| og på den anne side de intensjonale relasjonene |Vet*|, |Tror*|, |Ser*|, |Husk*|, |Innse*| og |Med*|. På tilsvarende vis definerte vi egenskapene |η(Vet)|, |η(Tror)|, |η(Ser)|, |η(Husk)|, η(|Innse)| og |η(Med)|. I §5 utvidet vi også begrepet *standard begrepsramme* ved å kreve at om B=<D,X,In> er en slik begrepsramme så må de intensjonale relasjonene |Vet°|, |Tror°|, |Ser°|, |Husk°|, |Innse°| og |Med°| , samt |Vet*|, |Tror*|, |Ser*|, |Husk*|, |Innse*| og |Med*|, være med i In. Videre krevde vi at de diverse egenskapene |η(Vet)|, |η(Tror)|, |η(Ser)|, |η(Husk)|, |η(Innse)| og |η(Med)| måtte være med i X. Er nå B = <<D,X,In>,ξ> en standard utvidet begrepsramme i denne forstand som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn kan vi, som vi viste i §5, bevise teoremer som er helt analoge med de elementær- og iterasjonsteoremene vi beviste i §2 - §4 om henholdsvis K-funksjoner og betingede modalstrukturer.

Hensikten med denne delen, Del III, av vårt arbeid har hovedsakelig vært å gi leseren et så fyldig som mulig bilde av hva som faktisk kan utledes i den kunnskapsteorien vi har formulert. Hvis man vil unngå overfladiskhet og filosofere i en genuint vitenskapelig ånd er dette noe man er strengt forpliktet til. Det virker rimelig å si at vi i så måte har oppfylt våre forpliktelser.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

DEL IV

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

§1 Innledning

Dette arbeidet består av to hoveddeler. I den første av disse delene fremsetter vi en teori om hvilke påstander det er fornuftig å akseptere gitt en viss evidens og kombinerer denne med en teori om sannsynlighet. Det er ikke uberettiget å si at det dreier seg om en teori om induksjon og sannsynlighet. I den andre delen av dette arbeid undersøker vi fra en formell synsvinkel en rekke av denne teoriens egenskaper og utdyper betraktelig hva som følger fra den. Den andre delen av dette arbeidet er derfor sterkt teknisk preget.

La oss først gi en skisse av grunnsetningene i den teorien vi fremsetter i Del I, §3.

De grunnleggende begrepene i den delen av denne teorien som har med aksepterbarhet å gjøre er predikatene "w er en logisk mulig verden" og "w er en verden med minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som verdenen w' " Ved hjelp av disse predikatene definerer vi predikatet "x er et utsagn som det er fornuftig å akseptere gitt at utsagnet y representerer all tilgjengelig evidens". Dette sistnevnte predikatet er derfor ikke er noe primitivt predikat.

Det grunnleggende begrep i den delen av teorien som har med sannsynlighet å gjøre er predikatet " z er sannsynligheten til det forhold utsagnet x beskriver gitt at utsagnet y representerer all tilgjengelig evidens".

La oss bemerke at teorien fremstilles helt presist som en rent predikatlogisk teori og at den formelt sett er en utvidelse av den mengdeteoretiske teorien ZFC;u, Zermelo-Fraenkelsystemet utvidet med urindivider. Vi har i tidligere arbeider gjort utførlig rede for dette mengdeteoretiske system.

Når det gjelder grunnsetninger som har med mulige verdener å gjøre dreier det seg om to stykker, nemlig for det første at det finnes en mengde med mulige verdener og for det andre at mengden med mulige verdener er minst tellbart uendelige. Det bør bemerkes at vi identifiserer utsagn med mengder av mulige verdener og at det derfor følger at det vi kaller sannhetsmengden til et utsagn er identisk med utsagnet selv.

Grunnsetningene i teorien som angår den relasjon som består mellom to verdener der den første har minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som den andre, vi kaller denne relasjonen for *enkelhetsrelasjonen*, er i hovedsak to, nemlig at denne relasjonen er refleksiv og transitiv. Når det gjelder akseptanserelasjonen, den relasjonen som består mellom to utsagn x og y hvis og bare hvis x er et utsagn som det er fornuftig å akseptere gitt at y representerer all tilgjengelig evidens defineres den. Denne definisjonen sier at det er fornuftig å akseptere et utsagn x gitt at y representerer all tilgjengelig evidens hvis og bare hvis (i) det finnes noen enkleste verdener i sannhetsmengden til y og (ii) disse enkleste verdenene er inkludert i sannhetsmengden til utsagnet x. Som man ser kan den delen av vår teori som har med mulige verdener, utsagn og akseptanserelasjonen å gjøre bygges opp fra et ganske lite antall aksiomer, i hovedsak fem stykker.

Når det gjelder den delen av teorien som dreier seg om sannsynlighet er det en rekke ting som bør bemerkes. For det første bør man iakta at dersom et utsagn kan tilskrives en sannsynlighet relativt til et utsagn y utgjør mengden av alle de utsagn som har en viss sannsynlighet relativt til y en naturlig boolsk algebra. Videre skulle det være klart at dersom et

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

utsagn har en viss sannsynlighet relativt til y er denne sannsynligheten et reellt tall som ligger i intervallet [0,1]. Det skulle også være klart at dersom det finnes noe utsagn som har en sannsynlighet relativt til utsagnet y så er sannsynligheten til y relativt til seg selv lik 1. Videre skulle det være ukontroversielt at dersom to uforenelige utsagn har en viss sannsynlighet reltivt til y så er sannsynligheten til disjunksjonen av dem lik summen av sannsynlighetene til hver av dem. Disse prinsippene virker ukontroversielle og innlysende og er inkludert i vår teori.

Det er imidlertid en rekke andre prinsipper som kommer inn i bildet når man kombinerer akseptanse med sannsynlighet. Det er et karakteristisk trekk ved den teorien som presenteres her at den sier at dersom det er rasjonelt å akseptere et utsagn x relativt til utsagnet y så er sannsynligheten til utsagnet x lik 1 relativt til y såfremt det finnes utsagn som kan tilskrives sannsynlighet relativt til y. Hvis det derfor er rasjonelt å akseptere, la oss si Einsteins relativitetsteori, relativt til all den evidens vi har nå og det finnes utsagn som kan tilskrives en viss sannsynlighet relativt til denne evidens, må derfor Einsteins relativitetsteori tilskrives sannsynligheten 1 på basis av den evidens vi har. Dette prinsipp lar seg formalisere og er inkludert i vår teori.

En annen grunnsetning som binder akseptanse og sannsynlighet sammen er det følgende: Anta y er et utsagn som representerer all den evidens som foreligger. Da sier prinsippet at dersom et eller annet utsagn kan tilskrives en sannsynlighet relativt til y så må det også finnes utsagn som det er fornuftig å akseptere relativt til y.

I tillegg til disse prinsippene er det også en rekke andre som angår forbindelsen mellom akseptanse og sannsynlighet som vi finner det nødvendig å ta med. Men vi venter med omtalen av dem til §3 hvor vi gir en rigorøs definisjon av vår teori.

En siste gruppe med grunnsetninger inkluderer det såkalte multiplikative aksiom. Dette sier at dersom to utsagn x og z kan tilskrives en sannsynlighet relativt til utsagnet y og sannsynligheten for x relativt til y er større en null så gjelder det at sannsynligheten til konjunksjonen av x og z relativt til y er produktet av sannsynligheten for z relativt til konjunksjonen av x og y multiplisert med sannsynligheten for x relativt til y.

Denne grunnsetningen sammen med andre som er nær forbundet med det blir grundig diskutert og undersøkt ikke bare i den første delen av dette arbeid, men også i den andre delen.

Etter at vi har definert teorien helt eksakt gir vi i §5, §5.1 - §5.6 en rekke utstrakte kommentarer til den. For det første kommenterer vi den teorien om mulige verdener og utsagn som er en del av teorien. Dernest tar vi i forbindelse med akseptanserelasjonen opp en rekke temaer som har med evidens å gjøre og kommer i denne forbindelse inn på det som ofte kalles tesen om teorimangfoldet. Etter dette kommenterer vi det som her kalles for enkelhetsprinsippet og analyserer dette mer utførlig. Dernest nevner og drøfter vi i §5.4 en rekke eksempler på utsagn som det er fornuftig å akseptere relativt til den vitenskapelige evidens som vi er i besittelse av ved det nåværende tidspunkt. I det neste avsnittet går vi så videre og gir en generell definisjon av hva som forstås med en induktiv slutning. I forbindelse med denne definisjonen bør det nevnes at den er av en slik art at den utelukker at en induktiv slutning kan være logisk gyldig. En induktiv slutning kan imidlertid være rasjonelt akseptabel i den forstand at det utsagnet som utgjør konklusjonen i den induktive slutningen beskriver et forhold som det er rasjonelt å akseptere relativt til det utsagn som representeres av konjunksjonen av premissene. Siden predikatet "x er et utsagn som det er fornuftig å

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

akseptere gitt at utsagnet y representerer all tilgjengelig evidens" inngår som et grunnbegrep i vår teori om akseptanse er det svært naturlig å definere en induktiv slutning som akseptabel på den måten vi nettopp har antydet. Dette innebærer at vi i den akseptanseteoretiske delen av vår teori kan utlede en lang rekke satser om hvilke induktive slutninger som er rasjonelt akseptable gitt at andre er det. Dernest formulerer vi det som vi oppfatter som en rimelig versjon av induksjonsproblemet og diskuterer hvorvidt det finnes visse induktive slutninger som det er innlysende at er rasjonelt akseptable. Når det gjelder denne delen med kommentarer til vår hovedteori avsluttes den med et avsnitt der vi gir en noe grundigere motivasjon for de sannsynlighetsteoretiske aksiomene.

Vi har nå gitt en forholdsvis kort oversikt over innholdet i den første delen av dette arbeid. La oss derfor gå over til å gi et riss av innholdet i den andre delen. Som nevnt tidligere er denne av en mer teknisk preget natur.

Vi definerer to typer av rent mengdeteoretisk strukturer. På den ene side har vi en klasse av strukturer som vi kaller *relative sannsynlighetsstrukturer*. En relativ sannsynlighetsstruktur er et trippel <I,R,C> der I er en ikke-tom mengde, R en preordning over I og C er en funksjon som oppfyller alle de krav som sannsynlighetsfunksjonen i vår teori oppfyller med hensyn på mengden av mulige verdener og enkelhetsrelasjonen som vi innfører i forbindelse med akseptanse.

Den andre klassen av strukturer er hva vi kaller for *preordningsstrukturer med assosierte sannsynlighetsrom*. En slik struktur er et trippel <I,R,H> der I er en ikke-tom mengde, R en preordning over I og H er en funksjon som tilordner for hvert element w i I visse av delmengdene i den R-induserte ekvivalensklassen til w sannsynlighetsrom. Vi gir natuligvis helt presise definisjoner av disse to begrepene.

Er nå S=<I,R,C> en relativ sannsynlighetsstruktur definerer vi hva som menes med *den kanoniske preordningsstrukturen med assosierte sannsynlighetsrom bestemt av S*. Vi betegner denne med φ(S). Man kan vise at φ(S) er entydig bestemt og at φ(S) faktisk er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom.

Tilsvarende definerer vi, om S=<I,R,H> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom, hva som menes med *den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av S.* Denne betegner vi med ψ(S). Man kan igjen vise at ψ(S) er entydig bestemt og at ψ(S) faktisk er en relativ sannsynlighetsstruktur. Relasjonen φ er derfor en funksjon som avbilder klassen av relative sannsynlighetsstrukturer inn i klassen av preordningsstrukturer med assosierte sannsynlighetsrom. Tilsvarende er relasjonen ψ en funksjon som avbilder klassen av preordningsstrukturer med assosierte sannsynlighetsrom inn i klassen av relative sannsynlighetsstrukturer.

La nå Γ betegnes mengden av alle relative sannsynlighetsstrukturer og la på tilsvarende vis Φ betegne mengden av alle preordningsstrukturer med assosierte sannsynlighetsrom.

Gitt disse definisjonene kan hovedresultatene i den andre delen av vårt arbeid sammenfattes slik: Man har (a) at funksjonen φ avbilder Γ en-entydig og på Φ, videre (b) at funksjonen ψ avbilder Φ en-entydig og på Γ og endelig (c) at funksjonen φ er omvendingen av funksjonen ψ og at funksjonen ψ er omvendingen av funksjonen φ.

Det meste av innholdet i den andre delen består i å gi detaljerte bevis for disse satsene. I tillegg gjør vi rede for hvordan disse resultatene gjør det mulig å formulere en alternativ

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

aksiomatisering av den teorien om sannsynlighet og akseptanse vi har formulert i den første delen, og hvordan de ellers bidrar til å gi en en dypere innsikt i denne teorien.

DEL A

§2 Forkunnskaper

Det er en rekke arbeider som det vil være en fordel om leseren har satt seg inn i før vedkommende tar fatt på dette skrift. Som en generell redegjørelse for de forkunnskaper som trengs for å lese de arbeidene som denne forfatteren har skrevet kan det være hensiktsmessig å lese igjennom Rognes[8]. Når det gjelder notasjonen som denne forfatteren benytter er det viktig, det er nærmest et uomgjengelig krav, at man studerer Rognes [9], "Om notasjonen som benyttes i mine arbeider". Videre brukes i dette skrift alle de begreper av generell logisk- og mengdeteoretisk art som det er detaljert gjort rede for i Rognes [1], "En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære". Her forklares blandt annet nøyaktig hva vi mener med et predikatlogisk språk med identitet (første-ordens språk) og hva som menes med en predikatlogisk teori (første-ordens teori). Dessuten gis en detaljert beskrivelse og definisjon av det mengdeteoretiske system vi benytter. Dette system kalles "Zermelo - Fraenkel systemet med urindivider", "ZFC;u", fordi det er fullt forenelig med den antagelse at det finnes entiteter som ikke er mengder, såkalte "urindivider". Videre defineres i dette skrift den mengdeteoretiske notasjon som vi uten videre, og uten omstendlige forklaringer benytter i dette arbeidet. Man kan derfor si at Rognes [1] forklarer det man kunne kalle rammeverket for det meste av det vi har skrevet.

Ved siden av disse arbeidene som gjør rede for det logiske og mengdeteoretiske system vi baserer teoriene i dette skrift på er det også viktig at leseren har satt seg inn i Rognes [2], "En teori om presise deskriptive utsagn" og Rognes [3], "En del grunnleggende begreper og setninger i teorien om presise deskriptive utsagn"

I tillegg til de sistnevnte arbeider som utdyper det utsagnsteoretiske grunnlag fordi de teoriene som fremstilles her, er det også viktig at leseren konsulterer de arbeidene vi har skrevet om akseptanse og sannsynlighet. Viktig i denne forbindelse er Rognes [6], "Aksepterbarhet og troverdighetsgrad" samt Rognes [7], "Et notat om preordninger og akseptanserelasjoner".[59]

La oss tilslutt forklare de mest brukte symbolene som benyttes i dette skrift. Uttrykkene "(Ax)" og "(Ex)" brukes som forkortelse for henholdsvis uttrykkene "For alle objekter x er det slik at" og "Det finnes minst et objekt x slik at". Vi bruker "→", "↔", "&", "v", og "¬" for de vanlige setningslogiske konnektivene: kondisjonal, bikondisjonal, konjunksjon, disjunksjon og negasjon. "(ix)" brukes som forkortelse for uttrykket "det objektet x som er slik at", med andre ord betyr "(ix)Fx" det samme som det objektet som har

59 Vi finner det svært viktig å understreke at vi står i stor gjeld til de artiklene av Bengt Hansson som er oppført i referanselisten. Selvom vi etter fattig evne har forsøkt å bidra med egne resultater er hovedideen i den akseptanseteorien som presenteres her i alt vesentlig hentet fra Hansson [3] og de andre artilene av ham som vi har oppført, ie. Hansson [1],[2].

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

egenskapen F. Når det gjelder mengdeabstrakter benytter vi oss av notasjonen "Mg(x: Fx)". Dette uttrykket leses slik: "mengden av alle de objekter x som er slik at Fx". Bestemte beskrivelser, ie. termer av typen "(ix)Fx" og mengdeabstrakter innføres kontekstuelt og elimineres etter de regler som er nøyaktig beskrevet i Rognes [1]. Når det gjelder vanlig brukt mengdeteoretisk notasjon nevner vi at uttrykket "<x,y>" betegner det ordnete par av objektene x og y tatt i denne rekkefølge. Snittet av to mengder x,y og unionen av to mengder x,y betegnes med henholdsvis "xΩy" og "xUy". Komplementet til en mengde x betegnes med "-x", og differansen mellom to mengder x og y betegnes med "x-y". Forøvrig bør det bemerkes at uttrykket "xêy" leses "x er et element i mengden y" og "M(x)" leses "x er en mengde". Videre bør det understrekes at vi bruker uttrykket "x Inkl y" som forkortelse for "mengden x er inkludert i mengden y", og uttrykket "x SInkl y" for det lengere uttrykket "mengden x er strengt inkludert i mengden y". La oss forøvrig nevne at "SN(x)" betegner snittet av alle de mengdene som er med i mengden x og at "UN(x)" betegner unionen av alle de mengdene som er elementer i mengden x. Tilslutt bemerker vi at dersom Δ er en mengde med utsagn (med endelig eller uendelig mange elementer) betegner "SNu(Δ)" det utsagnet som er konjunksjonen av alle utsagnene i Δ og uttrykket "UNu(Δ)" disjunksjonen av alle de utsagnene som er med i Δ.

§3 Den formelle fremstilling og definisjon av teorien.

Vi går nå over til den formelle og eksakte definisjonen av vår teori. Vi finner det imidlertid hensiktsmessig å introdusere noen begreper før vi går over til selve den formelle formuleringen av aksiomene i teorien. Som i tidligere arbeider betegner L;e det vi kaller språket for mengdelære. Dette er det språket av første orden med identitet som inneholder som eneste ikke-logiske predikater de to predikatene "x er en mengde" og " x er et element i mengden y". Disse to predikatene forkorter vi med henholdsvis "M(x)" og "xêy". For øvrig inngår i språket bare de vanlige kvantorene, all-kvantoren og eksistenskvantoren, de vanlige setningslogiske konnektivene og det rent logiske predikatet "x er identisk med y" som vi forkorter med "x=y". Alle setningene i språket L;e er bygd opp fra de nevnte predikater ved hjelp av de setningslogiske konnektivene og kvantorene på vanlig måte. Vi kaller predikatene "M(x)" og "xêy" for de *mengdeteoretiske* predikatene. Teorien ZFC;u(L;e) er den første-ordens teorien hvor språket er L;e og hvor de logiske aksiomene er et vanlig sett for første-ordenslogikk og hvor de ikke-logiske aksiomene er de vanlige ZFC;u- aksiomene som vi har spesifisert tidligere[60]. Anta nå Δ er en mengde med ikke-logiske predikater. Da betegner L;e(Δ) språket L;e utvidet med predikatene i Δ. ZFC;u(L;e(Δ)) er da teorien ZFC;u(L;e) med språket utvidet til L;e(Δ). Dette innebærer at alle instanser av utsondringsaksiomet og substitusjonsaksiomet i L;e(Δ) er med blandt aksiomene i ZFC;u(L;e(Δ)). Er θ en mengde med formler i L;e(Δ) betegner ZFC;u(L;e(Δ))[θ] teorien ZFC;u(L;e(Δ)) utvidet med formlene i θ som nye ikke-logiske aksiomer. Det bør noteres at de eneste slutningsreglene som inngår i våre teorier er modus ponens og regelen om universell generalisering.

Den teorien vi nå skal definere er av typen ZFC;u(L;e(Δ))[θ] der Δ er mengden av de predikater vi nå skal gjøre rede for. Det dreier seg om de følgende tre predikater: For det første predikatet "x er en logisk mulig verden". Dette forkorter vi med " MV(x)". For det

60 Teorien er presist definert i Rognes [1].

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

andre inngår predikatet "w er en mulig verden som har minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som verdenen w' " i mengden Δ. Dette predikatet forkorter vi med "Enk(w,w')". I stedet for å bruke det lengere og mer kompliserte uttrykket "w er en mulig verden som har minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som verdenen w' " skal vi tillate oss å bruke det kortere uttrykket " verdenen w er minst like enkel som verdenen w' " Det er da underforstått at det lengere uttrykket representerer et av selve grunnbegrepene i vår teori. Det kortere uttrykket skal brukes synonymt med dette lengere uttrykket. Selve den relasjon som betegnes av det binære predikatet Enk skal vi kalle for enkelhetsrelasjonen.

Det tredje predikatet som inngår i predikatmengden Δ er det følgende uttrykk: "z er den sannsynlighet som det forholdet utsagnet x beskriver har gitt at utsagnet y representerer all den evidens som foreligger". Dette predikatet forkorter vi med "Cd(z,x,y)". Alternative lesemåter av dette predikatet er: "z er sannsynligheten til utsagnet x gitt at utsagnet y representerer all den evidens man har", "z er den grad av rasjonell troverdighet som kan tilskrives utsagnet x gitt at utsagnet y representerer all den evidens man har", "z er sannsynligheten til utsagnet x relativt til utsagnet y" eller " z er den rasjonelle grad av troverdighet til utsagnet x relativt til utsagnet y". Disse uttrykkene og varianter av dem vil, om de brukes senere, alltid bli brukt synonymt med det uttrykket som offisielt forkortes av "Cd(z,x,y)". Ingen andre predikater enn de tre vi nå har nevnt inngår i predikatmengden Δ.

La oss på dette punkt bemerke at vi innfører mengdeabstrakter og bestemte beskrivelser i L;e og L;e(Δ) på den måten som det er detaljert redgjort for i Rognes [1]. Dette innebærer at vi fritt vil bruke den mengdeteoretiske notasjon som er innført i Rognes [1] uten alltid å gjøre rede for dette. Vi minner imidlertid om følgende. Er α en åpen setning betegner Mg(x: α) mengden av alle de objekter x som oppfyller setningen α. Videre brukes "xΩy" for snittet av mengdene x og y, "xUy" betegner unionen av mengdene xog y. Videre betegner "Pt(x)" potensmengden til x, "UN(x)" betegner unionen av alle de elementene som er med i x. Tilsvarende betegner "SN(x)" snittet av alle de mengdene som er med i x. I begge disse to tilfellene forutsettes det at x er en mengde av mengder og at x derfor ikke inneholder urindivider, dvs. entiteter som ikke er mengder. Komplementet til mengden x med hensyn på mengden y betegner vi med "y-x" og inklusjonsrelasjonen mellom mengder betegnes med "Inkl". "x Inkl y" innebærer derfor at mengden x er inkludert i mengden y. Videre innebærer "Func(f)" at f er en funksjon, Rel(f) at f er en relasjon. Domenet til en relasjon f betegnes med "Dom(f)" og verdiområdet til relasjonen med "Rgn(f)". Hvis notasjon og mengdeteoretiske begreper brukes som ikke er eksplisitt definert i dette arbeidet kan man alltids finne formelle definisjoner i Rognes [1].

Vi har nå spesifisert språket til vår teori. Som man ser er dette L;e(Δ), det vil si språket for mengdelære, L;e, utvidet med de tre predikatene som inngår i Δ. Det som nå må gjøres er å spesifisere de aksiomene som inngår i vår teori, kort sagt de setningene i L;e(Δ) som inngår i den aksiommengden θ som vi vil utvide ZFC;u(L;e(Δ)) med.

La oss først starte med predikatet "MV(w)" ie. "w er en logisk mulig verden". Mengden av alle mulige verdener betegner vi med I. Vi setter med andre ord per definisjon at I = Mg(w: MV(w)). Når det gjelder mengden I postulerer vi bare to ting som begge virker intuitivt sett ytterst rimelige, nemlig for det første at I faktisk er en mengde - dette kan ikke utledes i ZFC;u(L;e(Δ)). med andre ord fra de rent logiske og mengdeteoretiske aksiomene

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

som inngår i vår teori - og for det andre at I, mengden av mulige verdener , er minst tellbart uendelig. At det bare skulle finnes et endelig antall mulige verdener virker naturligvis temmelig eiendommelig. I dette skrift skal vi betegne disse to aksiomene med hendholdsvis W1 og W2. De kan formuleres slik:

W1	(Ey)(M(y) & y= I)
W2	Card(I) >= Aleph;0

Den siste formelen uttrykker at kardinaltallet til mengden av logisk mulige verdener I er større eller lik det minste alephtallet, med andre ord at I er minst tellbart uendelig.

La oss nå gå over til de logiske lovene, de ikke-logiske aksiomene, som vi vil ta i betraktning i forbindelse med enkelhetspredikatet, dvs. predikatet "Enk(w,w')"

Er w en mulig verden med minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som verdenen w' skulle det være åpenbart at w og w' er mulige verdener, ie. at w,w' êI. Vi oppfører dette som et nytt ikke-logisk aksiom, siden det ikke kan utledes fra noen av de aksiomene vi har nevnt så langt:

E1	Enk(w,w') → w,w' êI

Dette aksiomet skulle være fullstendig opplagt. Det er imidlertid to andre aksiomer om enkelhetsrelasjonen som vi også legger til. Det første sier at enhver logisk mulig verden har minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som seg selv. Det andre aksiomet sier at enkelhetsrelasjonen er transitiv, det vil si at dersom w har minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som verdenen w' og denne har minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som verdenen w" så vil w ha minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som w". Disse to påstandene, som også virker fullstendig opplagte, kan formaliseres slik:

E2	(Aw)(wêI → Enk(w,w))
E3	Enk(w,w') & Enk(w',w") → Enk(w,w")

Det er nødvendig å introdusere noen definisjoner i forbindelse med predikatene og grunnsetningene som vi har nevnt ovenfor. I dette skrift er ikke begrepet utsagn noe primitivt begrep, med andre ord er ikke predikatet "x er et presist deskriptivt utsagn" noe primitivt predikat. Vi skal her identifisere mengden av utsagn med mengden av alle mengder av logisk mulige verdener. Med andre ord er enhver mengde som utelukkende inneholder mulige verdener et utsagn og omvendt. I det følgende betegner U mengden av utsagn og vi identifiserer U med potensmengden til mengden av mulige verdener, ie. Pt(I). Vi gir den følgende formelle definisjon:

Definisjon 3.1	U = Pt(I)

hvor I naturligvis er definert som ovenfor. Gitt denne definisjonen av utsagn skulle det være klart at nullmengden, ø, representerer det kontradiktoriske utsagn og mengden av alle mulige

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

verdener, I, representerer det nødvendig sanne utsagn. Vi sier at et utsagn x er sant i verdenen w hvis og bare hvis wêx. Man ser at ethvert utsagn som ikke er kontradiktorisk eller nødvendig sant er sant i noen verdener og usant i andre. Et slikt utsagn er derfor kontingent.

Vi skal i det følgende betegne enkelhetsrelasjonen Mg(<w,w'> : Enk(w,w')) med "R". Vi gir derfor den følgende definisjon:

Definisjon 3.2 R = Mg(<w,w'> : Enk(w,w'))

Fra E2 og E3 følger da at R er en refleksiv og transitiv relasjon over I og derfor at R er det som kalles en preordning. Videre har vi ved hjelp av definisjonen og E1 at R Inkl IxI. Siden I er en mengde ifølge aksiom W1 følger det på grunnlag av de mengdeteoretiske aksiomene at R også er en mengde.

I forbindelse med R det to avledete relasjoner som må defineres, nemlig R* og Ekv;R. Disse er definert slik:

Definisjon 3.3

(i) R* = Mg(<w,w'>: R(w,w') & ¬ R(w',w))

(ii) Ekv;R = Mg(<w,w'>: R(w,w') & R(w',w))

Er derfor w og w' to mulige verdener har man følgelig at R*(w,w') holder hvis og bare hvis verdenen w har større grad av indre koherens, harmoni og enkelhet enn w'. Ekv;R(w,w') holder hvis og bare hvis w har nøyaktig den samme grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som w'

Er x et utsagn betegner "Max(R,x)" mengden av de R-maksimale verdenene i x. Formelt sett er uttrykket "Max(R,x)" definert slik:

Definisjon 3.4 Max(R,x) = Mg(y: yêx & (Az)(zêx → R(y,z)))

Er yê Max(R,x) ser man at dette holder hvis og bare hvis y er et element i x og enhver verden z der utsagnet x er sant er slik at verdenen y er minst like enkel som verdenen z. Vi skal derfor om xêU, kalle Max(R,x) for de enkleste, mest koherente og harmoniske verdenene i utsagnet x. Mengden av alle de verdenene som er med i et utsagn skal vi kalle for utsagnets sannhetsmengde. Det følger fra dette og den definisjonen av utsagn som vi tidligere har gitt at et utsagn er identisk med sin egen sannhetsmengde. Er x et utsagn er derfor de enkleste verdenene i sannhetsmengden til x identisk med de R-maksimale elementene i x.

Fra definisjonene vi har gitt ovenfor samt det faktum at R er en preordning følger det at den avledete relasjonen Ekv;R er en ekvivalensrelasjon over I. Dette innebærer at den inndeler mengden av mulige verdener i en mengde av innbyrdes uforenelige og ikke-tomme ekvivalensmengder som samlet uttømmer I. Er w en mulig verden, ie. wêI, betegner vi den ekvivalensmengden som inneholder w med [w];R. Er to elementer i I, la oss si w og w', like enkle har vi derfor at [w];R = [w'];R. Er w blandt de enkleste verdenene i sannhetsmengden til utsagnet x, med andre har vi wêMax(R,x), har man også at Max(R,x) Inkl [w];R. Vi skal kalle de ekvivalensmengdene som er bestemt av enkelhetsrelasjonen R for *enkelhetsnivåene* over mengden av mulige verdener.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Det bør bemerkes at vi i det følgende vil bruke uttrykket "κ(x)" som forkortelse for uttrykket "Max(R,x)". Dette innebærer at vi ikke alltid eksplisitt refererer til den underliggende preordningsrelasjonen R. Dette vil i de aller fleste tilfelle ikke skape noen problemer fordi det fra konteksten lett vil fremgå hvilken underliggende relasjon det dreier seg om.

Vi innfører nå predikatet "x er et utsagn som det er rasjonelt å akseptere gitt at utsagnet y representerer alt som kan tas for gitt"[61]. Vi forkorter dette predikatet med "Ba(x,y)". Dette predikatet er intet primitivt predikat i den teorien vi her gir en beskrivelse av, men innføres ved den følgende definisjon:

Definisjon 3.5 $Ba(x,y) \leftrightarrow (x,y \hat{e} U \ \& \ \emptyset \neq Max(R,y) \ \& \ Max(R,y)$ Inkl x)

Gitt definisjonen av κ som vi ga ovenfor kan definiens i denne definisjonen formuleres med konsist som x,yêU & ø≠κ(y) Inkl x. Fra definisjonen fremgår det at utsagnet x er et utsagn som det er rasjonelt å akseptere gitt at utsagnet y representerer alt som kan tas for gitt hvis og bare hvis det finnes en ikke-tom delmengde av sannhetsmengden til y med verdener som har maksimal grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som også er inkludert i sannhetsmengden til x.

Hvilke lover som kan utledes om relasjonen Ba på basis av denne definisjonen og de aksiomene vi har oppført om enkelhetsrelasjonen og mulige verdener skulle man få et relativt godt innblikk i om man studerer to av våre tidligere arbeider, "Et notat om preordninger og akseptanserelasjoner" samt "Akseptanse og troverdighetsgrad".[62] Det bør understrekes at det ikke er noe spesielt nytt og oppsiktsvekkende ved den definisjonen som vi har nevnt ovenfor og de grunnsetningene i teorien vi så langt har angitt. De er i vesentlige hentet fra en helt tilsvarende teori i deontisk logikk som er utarbeidet av den svenske logikeren Bengt Hansson.[63] Det eneste vi har gjort er å "omplante" den til mer vitenskapsteoretiske omgivelser, kort sagt vi gir en vitenskapslogisk fortolkning av den opprinnelige deontiske teori. Den sammenheng som teorien forøvrig står i i dette skrift står for vår egen regning.

Hva slags sanne setninger av typen Ba(x,y) kan man gi eksempler på? Vi skal senere, i §5.4 gi en rekke slike eksempler som intuitivt kan virke plausible. Vi tillater oss likevel å nevne noen av eksemplene her. La for eksempel utsagnet y representere alle de data som forskerere innen alle felt av naturvitenskapen har kjennskap til nå. La oss kalle dette utsagn for den totale fysiske evidens man har ved det nuværende tidspunkt. Da virker det ytterst rimelig å si at det er rasjonelt å akeptere, relativt til denne evidens, at Newtons lover holder tilnærmelsesvis, at Einsteins generelle relativitetsteori holder og at tall-løse andre fysiske og kjemiske lover holder. Med andre ord er det for eksempel fornuftig å akseptere utsagnet at Newtons lover

61 Alternative lesemåter til dette predikatet som vil bli brukt her: "Utsagnet x bør aksepteres gitt at y representerer all evidens", "Utsagnet x bør aksepteres relativt til y", "Det er rasjonelt å akseptere utsagnet x relativt til utsagnet y", "Det er rasjonelt å akseptere utsagnet x gitt at utsagnet y representerer all evidens". Alle disse konstruksjonene vil bli brukt synonymt med det predikatet som vi nettopp har nevnt. Konstruksjonen "x er et utsagn som det er rasjonelt å akseptere gitt at utsagnet y representerer alt som kan tas for gitt" er det offisielle predikatet.

62 Se Rognes [7] og Rognes [6]

63 Se Hansson [3], side 394 - 396 som inneholder den mest vesentlige sammenfatningen av Hanssons teori. Dette innebærer ikke at ikke også de andre sidene i Hanssons artikkel inneholder utmerket stoff.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

holder tilnærmelsesvis relativt til den totale fysiske evidens man har ved det nuværende tidspunkt.

Fra dette kan man ikke slutte at det vil være fornuftig å akseptere disse lovene relativt til den totale fysiske evidens man har om for eksempel to hundrede år. Fra det at Ba(x,y) holder kan man slett ikke logisk slutte at Ba(x,z) holder om z er et utsagn som strengt impliserer utsagnet y. Det eneste som påstås her at det er fornuftig å akseptere disse lovene relativt til den totale fysiske evidens man har *nå*.

Vi vil i denne sammenheng ytterligere omtale et prinsipp som har blitt omtalt tidligere i innledningen. Forholdet er at *dersom det er foruftig å akseptere et utsagn x relativt til et annet utsagn y og det finnes utsagn som har en viss sannsynlighet relativt til y så er det slik at sannsynligheten til utsagnet x relativt til y er lik 1*. Grovere uttrykt, og uten at vi tar med forbeholdet som er nevnt, er det altså slik at dersom det er fornuftig å akseptere et utsagn x relativt til y så er sannsynligheten til dette utsagnet x relativt til y lik 1. Fra dette og det vi tidligere har nevnt følger at dersom et eller annet utsagn kan tilskrives en sannsynlighet relativt til den totale fysiske evidens man har nå så må alle de teoriene og lovene som vi har nevnt tilskrives en sannsynlighet lik 1 relativt til denne evidens. Dette innebærer videre at for eksempel Einsteins generelle relativitetsteori, eller Ohms lov for den saks skyld, bør tilskrives sannsynligheten 1 relativt til den totale fysiske evidens man har nå. Man kan si at dette er som seg hør og bør. Hvilken mening gir det å tilskrive denne slags generelle teorier en sannsynlighet som f.eks. 0.95 eller 0.5? Ethvert tall mellom null og én virker ikke bare vilkårlig, men også umulig å begrunne på noe rimelig vis. Til enhver normal mengde med evidens vil det ikke bare finnes tellbart uendelig mange teorier som er forenelige med den, antallet må være overtellbart. Dette innebærer at dersom man ser på mengden av alle disse teoriene som et utfallsrom over hvilket man kan innføre en sannsynlighetsfunksjon må en uendelig mengde av dem tilordnes sannsynligheten 0. Men hvordan gjør man dette på en måte som ikke er totalt vilkårlig eller leder til uintuitive resultater?

Vi skal nå se på de grunnsetningene i teorien som har å gjøre med predikatet "Cd(z,x,y)", det vil si predikatet " z er den sannsynlighet som det forholdet utsagnet x beskriver har gitt at utsagnet y representerer all den evidens som foreligger".

For det første skulle det være klart at dersom Cd(z,x,y) holder så har man at z er et reell tall mellom 0 og 1 og at x og y er utsagn Dette kan formaliseres slik:

D1 $\quad Cd(z,x,y) \rightarrow x,y \hat{e} U \ \& \ z \hat{e} Reell \ \& \ z \hat{e} [0,1]$

I denne formelen betegner uttrykket "Reell" mengden av de reelle tall. Det er velkjent at denne mengden kan defineres presist, og på en adekvat måte, ved hjelp av grunnbegrepene innenfor den mengdeteoretiske del av vår teori. Det samme gjelder uttrykket "[0,1]" som betegner det lukkede intervall begrenset av tallene 0 og 1. Sannsynligheten til et utsagn x relativt til et utsagn y vil følgelig alltid være et tall som er mindre eller lik 1 og større eller lik 0. Med andre ord har vi at dersom Cd(z,x,y) så gjelder det at $0 =< z =< 1$.

Finnes det z som er sannsynligheten til utsagnet x relativt til utsagnet y finnes det ett og bare ett slikt reelt tall z. Dette er også en grunnsetning. Setningen kan formaliseres slik:

D2 $\quad Cd(z,x,y) \rightarrow (E!z)\ Cd(z,x,y)$

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Man ser at denne grunnsetningen impliserer at Cd kan oppfattes som en funksjon som har Mg(<x,y>: (Ez) Cd(z,x,y)) som domene og der verdiområdet er inkludert i intervallet [0,1]. Vi definerer funksjonen C ved:

Definisjon 3.6 C = Mg(<<x,y>,z>: Cd(z,x,y))

Gitt denne definisjonen og grunnsetningene D1 og D2 er det lett å vise at Dom(C) = Mg(<x,y>: (Ez) Cd(z,x,y)) og at Rgn(C) Inkl [0,1]. Merk at "Dom(C)" betegner domenet til funksjonen C og at "Rgn(C)" betegner verdiområdet til C. Man ser også lett at følgende holder: Er x,yêU → (<x,y>êDom(C) ↔ (Er)(r=C(x,y)) ↔ (Ez) Cd(z,x,y))

Mengen av alle de x der man har at at <x,y>êDom(C) skal vi kalle for domenet bestemt av y med hensyn på C. De følgende grunnsetninger sier at for ethvert utsagn y utgjør domenet bestemt av y med hensyn på C - dersom det er ikke-tomt- en mengde med utsagn som er lukket under negasjon og disjunksjon. Dette innebærer selvfølgelig også at området er lukket under de andre vanlige (endelige) boolske operasjoner som konjunksjon, kondisjonal og bikondisjonal:

D3 <x,y>êDom(C) → <Neg(x),y>êDom(C)
D4 <x1,y>, <x2,y>êDom(C) → <x1 U x2, y>êDom(C)

Vi har også at y er med i domenet til y med hensyn på C og at sannsynligheten til det nødvendige utsagn I relativt til y er lik 1, begge dele under forutsetning av at <x,y>êDom(C):

D5 <x,y>êDom(C) → <y,y>êDom(C)
D6 <x,y>êDom(C) → C(I,y) =1

Aksiomene D1 - D6 virker alle rimelige og uimotsigelige når man tenker nøye igjennom det betydningsinnhold som det er rimelig å tillegge predikatet "Cd(z,x,y)". Dette synes også å være tilfelle med den følgende grunnsetning:

D7 <x,y>êDom(C) → C(xΩy, y) = C(x,y)

Dette aksiomet sier at dersom et utsagn kan tilskrives en sannsynlighet relativt til y så er sannsynligheten til x relativt til y lik sannsynligheten til konjunksjonen av x og y relativt til y. Det er vanskelig å se at det skulle finnes noen som helst holdbare innvendinger mot denne påstanden.

Vårt siste aksiom i denne gruppen er den følgende setning som har en usøkt likhet med Kolmogorofs tredje aksiom og som sier at dersom utsagnenen x1 og x2 er logisk sett uforenelige og begge kan tilskrives en sannsynlighet relativt til y så er sannsynligheten av disjunksjonen av x1 og x2 relativt til y lik summen av sannsynligheten til x1 relativt til y og sannsynligheten til x2 relativt til y. Grunnsetningen kan formaliseres slik:

D8 <x1,y>,<x2,y>êDom(C) & x1 Ω x2=ø. → C(x1 U x2,y) = C(x1,y)+C(x2,y)

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Det kan også noteres at det som svarer til Kolmogoroffs første aksiom innenfor den rammen vi har satt opp her er grunnsetningen D1 og at det som svarer til hans andre sannsynlighetsteoretiske aksiom er grunnsetningen D6.

Vi har nå angitt en rekke aksiomer, nemlig de utsagnsteoretiske aksiomene W1 og W2, aksiomene for enkelhetsrelasjonen E1 - E3 og de grunnleggende aksiomene for den relative sannsynlighetsfunksjonen, nemlig D1 - D8. Transformerer man disse formlene ved hjelp av de definisjonene vi har gitt slik at de utelukkende er formulert ved hjelp av de primitive predikatene i L;e(Δ) ser man at følgende holder: De ikke-logiske predikatene som inngår i formlene W1 og W2 når disse ekspanderes til formler i primitiv notasjon inneholder utelukkende de mengdeteoretiske predikatene og predikatet "x er en mulig verden". Når det gjelder grunnsetningene E1 - E3 er de ikke-logiske predikatene som inngår i disse formlene, ekspandert til formler i primitiv notasjon, utelukkende de mengdeteoretiske predikatene pluss predikatene "x er en mulig verden" og predikatet "w er en mulig verden som har minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som verdenen w' ". Endelig, når det gjelder grunnsetningene D1 - D8 er de ikke-logiske predikatene som inngår i disse formlene, ekspandert til formler i primitiv notasjon, utelukkende de mengdeteoretiske predikatene pluss predikatene "x er en mulig verden" og " z er den sannsynlighet som det forholdet utsagnet x beskriver har gitt at utsagnet y representerer all den evidens som foreligger". Det følger fra dette at ingen av aksiomene vi så langt har formulert inneholder både det sannsynlighets-teoretiske predikatet "Cd(z,x,y)" og enkelhetspredikatet "Enk(w,w')".

Vi skal nå betrakte en rekke aksiomer som innholder begge disse predikatene (når de ekspanderes til primitiv notasjon) og som derfor forbinder den akseptanseteoretiske delen av teorien vi så langt har spesifisert med den sannsynlighetsteoretiske delen.

Før vi angir disse grunnsetningene skal vi tillate oss å innføre en viss terminologi som vi finner hensiktsmessig. Vi skal si at et utsagn y utgjør en *sannsynlighetsbasis* hvis og bare hvis det er slik at det finnes utsagn x som kan tilskrives en sannsynlighet relativt til y. Med andre ord vil utsagnet y utgjøre en sannsynlighetsbasis hvis og bare hvis $(Ez)(Ex)(z = C(x,y))$. Videre skal vi si at et utsagn y utgjør en *akseptansebasis* hvis og bare hvis det finnes et utsagn x slik at Ba(x,y), med andre ord hvis og bare hvis det finnes et utsagn som det er fornuftig å akseptere relativt til y.

Den første grunnsetningen sier at dersom et eller annet utsagn har en viss sannsynlighet relativt til utsagn y, med andre ord at utsagnet y utgjør en sannsynlighetsbasis så må det også finnes et utsagn som det er fornuftig å akseptere relativt til utsagnet y, med andre ord må utsagnet y være en akseptansebasis. Kortere formulert: dersom et utsagn utgjør en sannsynlighetsbasis må det også være en akseptansebasis. Grunnsetningen kan formaliseres slik:

F1 $\quad <x,y> \hat{e} Dom(C) \rightarrow (Ez)Ba(z,y)$

La oss se på et eksempel. La y være konjunksjonen av alle de utsagn som forfatteren vet ved det nuværende tidspunkt. Blandt de forhold som vites å være tilfelle er at en person i min nærhet, Ole, nettopp har sittet med en terning i hånden og at han så har kastet den opp i været. Terningen har dernest dettet ned på gulvet og rullet inn under en kommode slik at det

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

nå er umulig å se hva den viser. Dette innebærer at for eksempel påstanden, la oss kalle den x, at terningen viser en toer så vel som negasjonen av denne påstand, nemlig at den ikke viser en toer, er fullt ut forenelige med utsagnet y som representerer all den evidens forfatteren har i dette øyeblikk. Vi har altså at konjunksjonen av utsagnet x og utsagnet y er konsistent, men også at konjunksjonen av negasjonen av x og y er konsistent. La oss anta at vi påstår at sannsynligheten for at x er tilfelle, gitt at utsagnet y representerer all evidens, er 1/6. Hvis dette skal ha noen objektiv mening, og ikke bare skal være en subjektiv påstand som er grepet ut av løse luften, virker det ytterst rimelig å hevde at utsagnet y, som representerer totaliteten av det jeg vet i øyeblikket, impliserer en rekke utsagn som kan utgjøre evidens for denne sannsynligheten på 1/6. Ved ettertanke viser dette seg å være tilfelle. Jeg har kastet en terning tusenvis av ganger og aldri sett at det har vært mulig å forutse hva resultatet av neste eller de neste kastene vil bli, men jeg har iaktatt at den relative frekvens av det å få en toer ligger i nærheten av 1/6. Men det er ikke bare på grunn av dette at det er rimelig og gir objektiv mening å aksepetere at sannsynligheten til utsagnet x relativt til y er 1/6, men fordi det relativt til y, det vil si all den kunnskap jeg har nå, er fornuftig å akseptere som en generell statisk lov at dersom dersom man kaster en velbalansert terning et tilstrekkelig stort antall ganger vil den relative frekvens av de tilfelle der terningen viser en toer være ganske nært opp til (1/6). Generaliserer man fra dette eksemplet kan man si at dersom sannsynligheten til utsagnet x relativt til y er tallet a, så må x representere en instans av et mulig utfall i en statistisk lov som det er fornuftig å aksepetere relativt til utsagnet y, videre må x og negasjonen av x være forenelige med utsagnet y og endelig må det være fornuftig å aksepetere relativt til y at en instans av initialbetingelsene i den statistiske loven som svarer til x. Men dette innebærer at dersom C(x,y)=a for noe a så må det finnes utsagn som bør aksepteres relativt til y. Som man ser er dette nøyaktig hva grunnsetningen F1 uttrykker.

Den neste grunnsetningen har allerede blitt antydet og kommentert. Den sier at dersom et utsagn y utgjør en sannsynlighetsbasis så har ethvert utsagn som bør aksepteres relativt til y en sannsynlighet lik 1 relativt til y. Setningen kan formaliseres slik:

F2 $(Ez)(\langle z,y\rangle \hat{e} Dom(C)). \rightarrow (Ba(x,y) \rightarrow C(x,y)=1)$

Vi har kommentert denne setningen tidligere og argumentert for dens plausibilitet. Det kan ikke være nødvendig å gjenta akkurat her de forhold som taler til fordel for denne påstanden. Vi går derfor videre med de tre andre grunnsetningene i denne gruppen som forbinder akseptanse og sannsynlighet.

Det følgende aksiom uttrykker at dersom utsagnet x kan tilskrives en sannsynlighet relativt til utsagnet y så er sannsynligheten til x relativt til y identisk med sannsynligheten til x relativt til sannsynligheten av konjunksjonen av alle de utsagn som bør aksepteres relativt til y. Formalisert kan dette uttrykkes slik:

F3 $\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C) \rightarrow C(x,y) = C(x,\kappa(y))$

I forbindelse med denne formelen minner vi om at $\kappa(y)$ er mengden av alle de enkleste verdenene i y, mao. at $\kappa(y) = Max(R,y)$. Det bør også bemerkes at det er lett å vise at dersom y utgjør en akseptansebasis så har man at Max(R,y) er konjunksjonen av sannhetsmengdene til alle de utsagn som bør aksepteres relativt til y, med andre ord at:

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Max(R,y) = SN(Mg(z: Ba(z,y)))

Hvis derfor utsagnet x kan tilordnes en sannsynlighet relativt til utsagnet y har derfor ethvert ethvert utsagn som det er fornuftig å akseptere relativt til y sannsynlighet lik 1 relativt til y. Dette gjør det rimelig å tro at konjunksjonen av alle disse utsagnene κ(y) har sannsynlighet lik 1 relativt til y. I lys av dette synes det ytterst plausibelt at sannsynligheten til x relativt til y bør være den samme som sannsynligheten til x relativt til κ(y). Det er litt løse overveielser av denne natur, og dessuten det forhold at det er vanskelig å se at at F3 kan utledes fra våre tidligere aksiomer, som ligger til grunn for at vi fremsetter F3 som et eget aksiom.

Vårt neste aksiom sier at dersom utsagnet x har en viss sannsynlighet relativt til konjunksjonen av alle de utsagn som det er fornuftig å akseptere relativt til y så har utsagnet x også en sannsynlighet relativt til utsagnet y. Dette er et aksiom som bare sier noe om hva som er med i domenet til sannsynlighetsfunksjonen C gitt at noe annet er med. Det kan formaliseres slik:

F4 $<x,\kappa(y)>\hat{e}Dom(C) \rightarrow <x,y>\hat{e}Dom(C)$

Det er vanskelig å innse hvordan man kan gi noe moteksempel eller på annen måte motbevise denne påstanden.

Den siste grunnsetningen i denne gruppen sier at dersom konjunksjonen av utsagnet x og konjunksjonen av alle de utsagn som det er fornuftig å akseptere gitt y kan tilskrives en hvis sannsynlighet relativt til y så kan også x tilskrives en sannsynlighet relativt til y. Denne setningen kan formuleres mer formelt slik:

F5 $<x\Omega\kappa(y),y> \hat{e}Dom(C) \rightarrow <x,y>\hat{e}Dom(C)$

Også denne grunnsetningen synes å være av en ganske harmløs karakter. Den trengs i forbindelse med bevisene for de satser vi skal vise i den neste hoveddelen, dvs. Del II, av dette arbeid.

Før vi går videre og angir den siste gruppen av aksiomer i vår teori, som har med det multiplikative aksiom å gjøre, skal vi gi bevis for en sats som kan kaste noe lys over aksiomene F1 - F5. I den teorien som vi så langt har beskrevet og som har som ikke-logiske aksiomer, i tillegg til de rent mengdeteoretiske aksiomene, de vi så langt har nevnt, nemlig W1, W2, E1- E3, D1- D8 og F1 - F5 kan man utlede den følgende sats:

Teorem 3.1 Man har:

(a) $<x,y>\hat{e}\ Dom(C) \rightarrow <\kappa(y),y> \hat{e}\ Dom(C)$

(b) $<x,y>\hat{e}\ Dom(C) \rightarrow C(\kappa(y),y)=1$

(c) $<x,y>\hat{e}\ Dom(C) \leftrightarrow <x\Omega\ \kappa(y),\ \kappa(y)> \hat{e}\ Dom(C)$

(d) $<x,y>\hat{e}\ Dom(C) \leftrightarrow <x,\kappa(y)>\hat{e}\ Dom(C)$

(e) $<x,y>\hat{e}\ Dom(C) \leftrightarrow <x\Omega\kappa(y),y>\hat{e}\ Dom(C)$

Bevis: Ad (a): Anta (1) $<x,y>\hat{e}\ Dom(C)$. Da har vi ved hjelp av F1 at (2) (Ez)Ba(z,y). Ved hjelp av definisjonen av Ba og definisjonen av κ kan man slutte at (3) Ba(κ(y),y). Fra (1), (3)

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

og F2 følger C(κ(y),y)=1. Men fra dette følger åpenbart at <κ(y),y> ê Dom(C). Dette viser at ikke bare punkt (a) holder, men også punkt (b).

Ad (d): Kondisjonalen mot venstre følger fra F4. Anta <x,y> ê Dom(C). Da har vi ved hjelp av F3 at C(x,y)= C(x,κ(y)). Fra dette følger (Er)(r = C(x,κ(y))) og herav har vi i sin tur ved hjelp av definisjonene av C og Dom(C) at <x,κ(y)> ê Dom(C).

Ad (e): Kondisjonalen mot venstre følger fra F5. Anta (1) <x,y> ê Dom(C). Da har vi ved hjelp av punkt (a), som vi har bevist ovenfor, at (2) <κ(y),y>êDom(C). Fra (1) og (2) og aksiomene D3 og D4 følger så <x Ω κ(y),y> ê Dom(C).

Ad (c): Her er det nødvendig å bevise kondisjonalene begge veier. Vi tar først for oss kondisjonalen mot høyre: Anta (1) <x ,y>ê Dom(C). Da har man at (2) C(x,y)=r for noe r. Fra (1), aksiom F3 og (2) følger (3) C(x,y) = C(x,κ(y)) =r. Fra (1) og punkt (d) som vi har bevist ovenfor, følger (4) <x,κ(y)>ê Dom(C). Fra dette og D7 kan man slutte:

(5) C(x,κ(y)) = C(xΩκ(y),κ(y)). Herav har man så ved hjelp av (3) at C(xΩκ(y),κ(y)) = r og derfor <xΩ κ(y), κ(y)> ê Dom(C).

Vi viser så kondisjonalen mot venstre: Anta (1) <xΩ κ(y), κ(y)> ê Dom(C).Ved hjelp av F4 har vi da <xΩ κ(y), y> ê Dom(C). Fra dette og F5 følger så <x,y> ê Dom(C).

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Vi kommer nå til den siste gruppen av aksiomer i vår teori, nemlig de multiplikative aksiomene. Det dreier seg om de følgende påstander:

M1	<z,y>,<x,y> ê Dom(C) & C(x,y) > 0 → <z,xΩy> ê Dom(C)
M2	<x,y>ê Dom(C) & C(x,y)> 0 → (<z,xΩy>êDom(C) → <zΩx,y>ê Dom(C)
M3	<z,y>,<x,y> ê Dom(C) & C(x,y) > 0 → C(zΩx,y) = C(z,xΩy)*C(x,y)

Det siste av disse tre aksiomene, grunnsetningen M3, kaller vi for det *multiplikative* aksiomet. Selve gruppen som består av disse tre aksiomene skal vi kalle for *de multiplikative aksiomene*.

Vi skal kalle et utsagn y0 for multiplikativt hvis og bare hvis det (a) utgjør en sannsynlighetsbasis - det er med andre ord slik at (Ez)(<z,y0> ê Dom(C) - og (b) y0 oppfyller kravene M1 - M3 om "y0" innsettes overalt for variabeltegnet "y".

Vi skal tillate oss å bruke uttrykket "Mult(y)" som en forkortelse for "y er et multiplikativt utsagn". Fra disse definisjonene følger at dersom ethvert utsagn som utgjør en sannsynlighetsbasis er multiplikativt så holder M1 - M3 for alle y. Omvendt kan man slutte at dersom M1 - M3 holder allment så er ethvert utsagn som utgjør en sannsynlighetsbasis et multiplikativt utsagn.

Dette kan formuleres som et eget teorem:

Teorem 3.2 Man har at (Ay)((Ez)(<z,y>êDom(C)) → Mult(y)) er ekvivalent med konjunksjonen av grunnsetningene M1 -M3.

Vi kan nå gi en presis definisjon av formell art av den teorien vi har beskrevet ovenfor. Vi har utvidet språket for mengdelære, L;e, med de tre predikatene "x er mulig verden", "w er en verden med minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som verdenen w' ", samt det ternære sannsynlighetspredikatet " z er sannsynligheten til det forhold som utsagnet x beskriver gitt at utsagnet y representerer all tilgjengelig evidens". Kaller vi mengden av

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

predikater som inneholder disse tre predikatene og bare dem for Δ, er språket til vår teori L;e(Δ). I dette språket har vi spesifisert og presist formulert aksiomene for mulige verdener W1 og W2, aksiomene for enkelhetsrelasjonen E1 - E3, de grunnleggende aksiomene for sannsynlighetspredikatet D1 - D8, aksiomene som forbinder enkelhetsrelasjonen og sannsynlighetspredikatet F1 - F5 og endelig de multiplikative aksiomene M1 - M3. Vi betegner mengden av alle de formlene i L;e(Δ) som inneholder W1,W2, E1-E3, D1-D8, F1 -F5 og bare dem med θ;1. Utvider vi θ;1 med de multiplikative aksiomene betegner vi den mer omfangsrike mengden med θ;2. Man har altså at θ;2 = θ;1 U {M1, M2, M3}. Den teorien vi får når vi utvider ZFC;u(L;e(Δ)) med θ1, ie. ZFC;u(L;e(Δ))[θ;1] kaller vi for den *svake teorien om akseptanse og sannsynlighet*. Den teorien man får når ZFC;u(L;e(Δ)) utvides med θ;2 ie ZFC;u(L;e(Δ))[θ;2] kaller vi for den *fulle, eller sterke, teorien om akseptanse og sannsynlighet*.

§4 Formell definisjon av begrepet relativ sannsynlighetsstruktur

Vi er nå istand til å gi en definisjon av den klassen av abstrakte mengdeteoretiske strukturer, nemlig det vi skal kalle for *relative sannsynlighetsstrukturer*, som vi nevnte i innledningen til dette essay. I begynnelsen av den neste hoveddelen skal vi definere en annen klasse av strukturer, nemlig klassen av *preferansestrukturer med assosierte sannsynlighetsrom*. Hoveddelen av denne andre delen vil da bestå i å vise hvordan disse to strukturklassene er relatert til hverandre.

Definisjon 4.1 Med en relativ sannsynlighetsstruktur fortår vi et triple <I,R,C> som oppfyller de følgende krav:

(i) I er en ikke-tom mengde

(ii) R er en preordning over I

(iii) C er en funksjon der vi har at Dom(C) Inkl Pt(I)xPt(I) og Rgn(C) Inkl [0,1] og hvor vi har at C oppfyller kravene D3 - D8 og F1 -F5 som vi har omtalt ovenfor.

I tilknytning til denne definisjonen må det understrekes at vi vil bruke den notasjonen vi har definert tidligere: Er <I,R,C> en relativ sannsynlighetsstruktur betegner uttrykket "κ(x)" de R-maksimale elementene i mengden x, med andre ord Max(R,x) og det forutsettes da at xêPt(I), med andre ord at x er en eller annen delmengde av domenet i strukturen I. Videre er Ba(x,y) der x,yêPt(I) definert som tidligere: Ba(x,y) ↔ (x,yêPt(I) & ø ≠ Max(R,y) Inkl x). Omtales derfor en bestemt relativ sannsynlighetsstruktur <I,R,C>, og bruker vi uttrykkene "κ(x)" og "Ba(x,y)" i forbindelse med denne, er preordningsrelasjonen R underforstått. Man må altså av sammenhengen finne ut nøyaktig hva disse uttrykkene refererer til. Imidlertid skulle dette neppe by på vanskeligheter i praksis. Videre nevner vi at U, mengden av utsagn i en slik struktur, er Pt(I).

Vår neste definisjon er denne:

Definisjon 4.2 Anta <I,R,C> er en relativ sannsynlighetsstruktur og at yêU = Pt(I). Da kaller vi utsagnet y for multiplikativt hvis og bare hvis <z,y>êDom(C) for noe z og utsagnet y oppfyller kravene M1- M3 for alle z,x.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Denne definisjonen er, som man ser, helt analog med den definisjonen vi tidligere ga av et multiplikativt utsagn.

§5 Kommentarer til teorien

Vi har ovenfor definert helt presist en bestemt teori. Som det fremgår av denne definisjonen dreier det seg om en første-ordens teori som inkluderer systemet ZFC;u, det vil i praksis si hele mengdelæren, og som videre inneholder grunnsetninger om mengden av mulige verdener, enkelhetsrelasjonen og sannsynlighetsfunksjonen C. Man bør bemerke at denne teorien, selvom den er presentert i en helt formalisert form, ikke er noe såkalt uintepretert formalt system. De lukkede formlene i teorien uttrykker genuine påstander som enten er sanne eller usanne. Grunnsetningene i teorien må tas bokstavelig. Teorien impliserer for eksempel at det faktisk finnes logisk mulige verdener, videre at mengden av disse mulige verdenene eksisterer og at den er minst tellbart uendelig. Tilsvarende bemerkninger kan gjøres om de andre grunnsetningene i teorien.

Det er to momenter som bør nevnes før vi går videre. For det første er teorien formulert helt eksplisitt på samme måte som en hvilken som helst matematisk teori. Dette gjør den selvfølgelig ikke til matematikk, men det gjør det enkelt for den som vil kritisere teorien. På den ene side kan man for eksempel rette kritikken mot selve grunnbegrepene i teorien, predikatene "w er en logisk mulig verden", " w er en verden med minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som verdenen w' ", og så videre, og fremsette argumenter for at disse predikatene er for vage og ubestemte og derfor uegnet som grunnlag for noe som kan regnes som en vitenskapelig preget teori. Eller man kan sogar forsøke å fremsette argumenter for at de er kognitivt meningsløse, hvis noen tvingende argumenter av denne art overhodet finnes. På den annen side kan man, om man aksepterer at de grunnleggende predikatene gir mening, rette kritikken mot de grunnsetningene som er formulert ved hjelp av dem, for eksempel ved å forsøke å vise at de har uintuitive konsekvenser, eller ved å argumentere for at de rett og slett er gale, feilaktige eller usanne.

Det andre moment som bør nevnes, og som åpenbart er riktig, er at teorien i visse henseende er ganske svak og meget generell. Fra dette i seg selv kan man imidlertid ikke slutte at teorien på noen måte er usann eller feilaktig.

Vi skal i de følgende avsnitt, §5.1 - §5.6, drøfte forskjellige sider ved den teorien vi har presentert. Den delen av teorien som først vil bli kommentert er den delen som har med mulige verdener å gjøre. Dette skjer i neste paragraf. Dernest følger et avsnitt om evidens, teorimangfoldet og hvilke teorier det er fornuftig å akseptere. I §5.3 kommenterer vi vår akseptanseteori og utdyper det vi ovenfor har kalt enkelhetsprinsippet og drøfter muligheten av å gi en dypere analyse av enkelhetsrelasjonen. I §5.4 gir vi en lang rekke med eksempler på påstander som det er fornuftig å akseptere relativt til all den evidens vi har ved det nåværende tidspunkt. Det gjøres for å konkretisere teorien. Dernest, i §5.5, definerer vi hva vi mener med induktive slutninger og diskuterer i hvilken grad den akseptanseteoretiske delen av vår teori belyser induksjonsproblemet. I den siste paragrafen, §5.6 gir vi en mer utførlig vurdering av de aksiomene i teorien som har med sannsynlighet å gjøre, spesielt de aksiomene som forbinder akseptanserelasjonen Ba med sannsynlighetsfunksjonen C.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

§5.1 Mulige verdener og det utsagnsteoretiske grunnlag

I teorien om akseptanse og sannsynlighet er naturligvis, som man har sett, predikatet "er en logisk mulig verden" et primitivt predikat. Det innebærer at predikatet ikke er definert ved hjelp av noen av de andre predikatene som inngår i det ikke-logiske vokabularet til teorien. Når det gjelder dette predikatet tok vi bare med to grunnsetninger som bare inneholder dette og rent mengdeteoretiske predikater, nemlig W1, som uttrykker at det finnes en mengde som kun inneholder mulige verdener og som dessuten inneholder alle, og grunnsetningen W2 som sier at mengden av mulige verdener er minst tellbart uendelig.

Ved hjelp av begrepet mulig verden definerte vi predikatene "x er et utsagn" og "w er en verden hvor utsagnet x er sant". Et utsagn ble identifisert med en mengde av mulige verdener, det vil si vi identifiserte mengden av utsagn med mengden av alle delmengder av mengden av mulige verdener. Sannhetsrelasjonen "w er en verden hvor utsagnet x er sant", vi skal bruke uttrykket "w ⊨x" som forkortelse for dette lengere uttrykket, ble definert slik:

$$w \models x \leftrightarrow (w \hat{e} I \ \& \ w \hat{e} x \ \& \ x \hat{e} Pt(I))$$

Det bør nevnes at denne fremgangsmåten ble innført her utelukkende av bekvemmelighetsgrunner. I stedet for å velge denne metoden kunne vi ha innført, i tillegg til predikatet "w er en mulig verden", de to predikatene "x er utsagn" og "w er en mulig verden hvor utsagnet x er sant" som primitive predikater. La oss bruke uttrykket "Ut(x)" som forkortelse for det første av disse to predikatene. For det siste har vi allerede nevnt at vi bruker "w ⊨x" som forkortelse. Hvis man går frem på denne måten blir det et spørsmål om hva slags grunnsetninger man skal legge til fordi to sistnevnte predikatene. Man kunne naturligvis bruke de definisjonene vi tidligere har gitt som definerende aksiomer, men poenget er at det ikke uten videre er gitt, eller er på noen måte evident, at utsagn nødvendigvis er mengder av mulige verdener.

Det er i denne forbindelse nærliggende å ta i betraktning de følgende aksiomer som vi har presentert i tidligere arbeider:

U1	$w \models x \rightarrow MV(w) \ \& \ Ut(x)$
U2	$Ut(x) \ \& \ Ut(y) \rightarrow .\ x=y \leftrightarrow (Aw)(MV(w) \rightarrow (w \models x \leftrightarrow w \models y))$
U3	$M(x) \ \& \ x \ Inkl \ I \rightarrow (Ey)(Ut(y) \ \& \ x= Mg(w: w \models y)$

Det første av disse aksiomene er trivielt og sier at dersom w er en mulig verden der utsagnet x er sant så er w en mulig verden og x et utsagn. Den andre grunnsetningen, U2, sier at to utsagn er identiske hvis og bare hvis de er sanne i nøyaktig de samme verdenene. Kaller vi mengden av alle de verdenene der utsagn y er sant for sannhetsmengden til y sier det siste aksiomet dersom x er en mengde med mulige verdener finnes det alltid et utsagn som har x som sin sannhetsmengde. Vi skal kalle predikatet "w ⊨ x" for sannhetspredikatet. Predikatet "Ut(x)" kalles for utsagnspredikatet. Utvider vi nå språket med utsagns- og sannhetspredikatet og legger til setningene U1 - U3 som nye ikke-logiske aksiomer i tillegg til W1 og W2 får vi en teori med et mer omfattende ikke-logisk vokabular. Denne teorien har følgende trekk:

For det første kan man ikke i denne teorien vise at utsagn er identiske med mengder av mulige verdener. For det andre kan man vise, dersom man definer funksjonen μ ved å sette:

$$\mu = Mg(\langle x, Mg(w: w \models x)\rangle : Ut(x))$$

at μ avbilder mengden av utsagn $U = Mg(x:Ut(x))$ en-entydig og på mengden av alle mengder av mulige verdener, med andre ord kan man vise:

$$\mu : U \ \text{-(1-1,på)}\rightarrow Pt(I)$$

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Hvis man enn mer definerer definerer konjunksjon og negasjon som operationer på utsagn ved:

K = Mg(<<x,y>,z>: x,yêU & z = μ;-1(μ(x)Ωμ(y)))

Neg = Mg(<x,y>: x,yêU & y =μ;-1(I - μ(x)))

og ytterligere setter:

c;I = Mg(<x,y>: xêPt(I) & y=(I - x))

Ω;I = Mg(<<x,y>,z>: x,yêPt(I) & z=xΩy)

kan man vise at μ ikke bare en-entydig avbilder U på Pt(I), men at denne funksjonen er en isomorfi mellom strukturene <U, K, Neg> og <Pt(I), Ω;I, c;I>.

Det er naturligvis dette faktum som er rasjonalen bak identifikasjonen av utsagn med mengder av mulige verdener som vi av tekniske grunner har funnet det hensiktsmessig å arbeide med her.

Som man ser kan grunnsetningen U2 oppfattes som et identitetskriterium for utsagn: To utsagn er identiske om de er sanne i nøyaktig de samme mulige verdenene. Dette er naturlig nok et kriterium som er av begrenset verdi om man i praksis ønsker å avgjøre om et utsagn er identisk med et annet, men det kan av og til gi en ett hint om at to utsagn er forskjellige ved at man kan spesifisere en situasjon der det ene utsagn er sant, mens det andre utsagnet er usant.

Det er i denne sammenheng naturlig å nevne at man på grunnlag av grunnsetningene W1,W2 og U1 - U3 kan utlede et lignende identitetskriterium for mulige verdener, nemlig:

(+) MV(w) & MV(w') →. w=w' ↔ (Ax)(Ut(x) → (w ⊨ x ↔ w' ⊨ x))

Hva (+) sier er at to mulige verdener er identiske hvis og bare hvis det gjelder for et hvert utsagn at det er sant i den ene verdenen hvis og bare hvis det er sant i den andre.

I forbindelse med det faktum at (+) og U2 representerer en slags identitetskritier for henholdsvis mulige verdener og utsagn kan man også nevne et mer generelt "identitetskriterium" som følger fra de rent mengdeteoretiske aksiomene i vår teori. Dette gjelder som et identitetskriterium for alle entiteter x og y hva enten de er mengder eller ikke- mengder. Kriteriet er det følgende:

(++) x=y ↔ (Az)(M(z) → (xêz ↔ yêz))

Som man ser uttrykker (++) at to entiteter x og y er identiske hvis og bare hvis de er med i nøyaktig de samme mengder, med andre ord hvis og bare hvis det er slik for enhver mengde z at x er med i z hvis og bare hvis y er med i z. Fra dette følger naturligvis at to mulige verdener er identiske om de er med i nøyaktig de samme mengder og at to utsagn er identiske om det samme kan sies om dem, det vil si at de oppfyller det krav som står til høyre i (++).

Er de formlene som vi har nevnt ovenfor under merkelappen "identitetskriterier" hva man kunne kalle *tilfredstillende* identitetskriterier?

Hvis man med et tilfredstillende identitetskriterium for de entiteter som oppfyller et predikat F mener en sann setning av typen:

F(x) & F(y) → . x= y ↔ R(x,y)

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

der setningen selv ikke er noen predikatlogisk eller identitetsteoretisk sannhet, og hvor den åpne setningen "R(x,y)" utelukkende er bygd opp ved hjelp av meningsfulle, eller vitenskapelig meningsfulle, predikater, virker dette rimelig. For det første er det ikke urimelig å anse predikatene "x er en mulig verden", "x er et utsagn" og relasjonsuttrykket "x er en verden hvor utsagnet y er sant" for vitenskapelig meningsfulle. Er man så av denne oppfatning virker også de grunnsetningene vi har nevnt i forbindelse med disse predikatene uimotsigelige og nødvendig sanne. Det følger i sin tur at setningene U2, (+) og (++) er nødvendig sanne. Siden de oppfyller kriteriene til et tilfredstillende identitetskriterium som definert ovenfor må de derfor anses som sådanne om denne definisjonen kan tilskrives en viss plausibilitet. Vi skal imidlertid ikke gå dypere inn på individuasjonsprinsippene for mulige verdener og utsagn enn det vi nå har gjort.[64]

64 At de kriteriene vi har oppført er tilfredstillende bestrides, som alle vet, av Quine. I Quine [1], "Theories and Things", side 101 til 104 forklarer Quine detaljert hvorfor f.eks. (++) av ham oppfattes som et intenst irriterende svar på individuasjonsproblemet for mulige verdener. (Quine drøfter attributter, men alt han sier gjelder også ubetinget for mulige verdener og utsagn.) Grunnen er at dersom mulige verdener skal kunne sammenfattes i mengder må de allerede være tilfredstillende individuert på forhånd. Dette kan ikke direkte anvendes på (+) om man anser at utsagn er tilfredstillende individuert. Men sier man at utsagn er tilfredstillende individuert ved å henvise til U2 går man tilsynelatende, om ikke åpenbart, i sirkel. Nåvel. Mengder og attributter oppfattes av Quine som "epifrastiske". Dette innebærer at dersom man for eksempel vil spesifisere en mengde, la oss si mengden av Oslo-borgere, kan man ikke gjøre dette på annen måte enn ved at man innfører predikatet "x er en Oslo-borger" og danner uttrykket "mengden av de x som er slik at x er en Oslo-borger". To mengder er naturligvis identiske om de har de samme medlemmer. Mengden av Oslo-borgere er derfor identisk med mengden av borgere i Norges hovedstad hvis og bare hvis alle borgere i Norges hovedstad er Oslo-borgere og omvendt. Med andre ord har man:

(1) $Mg(x:F(x)) = Mg(x:G(x)) \leftrightarrow (Ax)(F(x) \leftrightarrow G(x))$

Kriteriet for når to mengdeabstrakter betegner den samme mengden er nettopp (1) og derfor krystallklart. Bruker man nå "$\lambda x(F(x))$" som forkortelse for "Egenskapen å være en x slik at F(x)" og "Nec(α)" som forkortelse for "Det er logisk nødvendig at α" kan man formulere et identitetskriterium for de egenskaper som betegnes av egenskapsabstrakter på følgende vis i analogi med (1):

(2) $\lambda x(F(x)) = \lambda x(G(x)) \leftrightarrow Nec((Ax)(F(x) \leftrightarrow G(x)))$

Tilsvarende for utsagnsabstraksjon, i det vi benytter "u(p)" som forkortelse for "utsagnet som uttrykker at p":

(3) $u(p) = u(q) \leftrightarrow Nec(p \leftrightarrow q)$

Hvis man aksepterer modaloperatoren Nec som et vitenskapelig meningsfullt begrep har man her i det minste et identitetskriterium for de utsagn som kan uttrykkes ved setninger og de egenskaper som kan betegnes ved egenskapsabstrakter. Dette er naturligvis ikke akseptabelt for Quine som må karakteriseres som intens kritiker av alt som heter modallogikk. (Se Quine[2] side 20-46, s 139-159 og Quine [3] f.eks s 206 -222) Det foreligger ikke fra Quines side noe direkte forsøk på å gjendrive teorien bestående av W1,W2 og U1 - U3. Det er også vanskelig å skjønne hvordan man skal kunne gjendrive denne teorien fordi de nevnte grunnsetningene virker nærmest selvinnlysende om man antar at predikatene "mulig verden" og "utsagn" gir mening og man tilskriver dem den betydning som det er intuitivt rimelig å gjøre. Den eneste mulighet synes derfor å være at man forsøker å vise at de primitive predikatene ikke gir noen vitenskapelig mening. Hvis dette skal gjøres ad argumentativ vei synes det å forutsette at man i det minste angir et kriterium (f.eks. en nødvendig betingelse) for at et predikat klart skal være i besittelse av vitenskapelig mening og hvor kriteriet selv er mer opplagt enn at de nevnte predikater er vitenskapelig meningsfulle. Ikke i noen arbeider av Quine finner man noe slikt kriterium eksplisitt formulert. Man kan derfor bare ty til den høyest usikre metode som består i "å lese mellom linjene". Det nærmeste man tilsynelatende kan komme i denne forbindelse synes å være følgende prinsipp som vi ikke direkte kan tilskrive Quine, langt mindre dytte på ham: *Et predikat gir klar vitenskapelig mening bare hvis det kan defineres på tilfredstillende måte ved hjelp av logiske, mengdeteoretiske og matematiske termer, samt termer og predikater som er gangbare i naturvitenskapelige teorier av fysisk og kjemisk art*. I så fall virker det ganske innlysende at de predikater vi har nevnt, "utsagn", "mulig verden", "egenskap" etc. ikke oppfyller de krav som stilles i kriteriet, og hvis kriteriet er korrekt må avvises som uten klar vitenskapelig mening. Men kriteriet selv synes å være alt annet enn evident og synes å implisere en form for (dogmatisk) naturalistisk panfysikalisme, et standpunkt som er like usmakelig for oss

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

La oss avslutte denne paragrafen med å bemerke at man ved hjelp av predikatene "x er en mulig verden", "x er et utsagn" og relasjonsuttrykket "x er en verden hvor utsagnet y er sant", (eller om man begrenser seg til "x er en mulig verden" og definerer de andre ved hjelp av dette) kan definere en lang rekke begreper som det er naturlig å studere i forbindelse med utsagn og utsagnsmengder. Ved hjelp av disse grunnbegrepene kan man for eksempel definere hva som menes med en konsistent utsagnsmengde, en maksimalt konsistent utsagnsmengde og en fullstendig utsagnsmengde. Videre kan man definere hva som menes med at et utsagn impliserer et annet og hva som menes med at en mengde med utsagn impliserer et utsagn. Man kan videre definere ekvivalens mellom utsagnsmengder og utsagn. Ytterligere kan man definere hva som menes med konsekvenssystemet til en mengde, hva som menes med en uavhengig og strengt uavhengig utsagnsmengde og en rekke andre begreper. Ikke bare kan man definere disse begrepene ved hjelp av grunnbegrepene vi har nevnt. Innenfor den teorien vi har satt opp kan man også utlede en lang rekke satser som viser hvordan disse begrepene er relatert innbyrdes. Man kan med andre ord utvikle en generell teori om utsagnsmengder, det vil en teori som har sin naturlige plass innenfor vitenskapslogikken og dermed vitenskapsteorien.

§5.2 Om evidens, teorimangfoldet og hvilke teorier det er fornuftig å akseptere

Vi har i §3 innført predikatet "x er utsagn som det er fornuftig å akseptere gitt at utsagnet y representerer alt som kan tas for gitt". Den siste delen av dette uttrykket "alt som kan tas for gitt" kan reformuleres som "all tilgjengelig evidens". Som nevnt tidligere bruker vi "Ba(x,y)" som forkortelse for dette predikatet. La oss på dette punkt nevne at man også kan innføre et litt annet predikat, nemlig "x er et utsagn som det er fornuftig å akseptere gitt at utsagnsmengden Δ representerer all tilgjengelig evidens". Vi skal forkorte dette predikatet med "Ba;m(x,Δ)" og vi kan definere det ved hjelp av predikatet "Ba(x,y)" på følgende måte:

$$Ba;m(x,\Delta) \leftrightarrow Ba(x, SNu(\Delta)).$$

Vi minner om at SNu(Δ) er konjunksjonen av alle utsagnene i Δ om Δ er en mengde med utsagn, og at SNu(Δ) er et utsagn om Δ er en utsagnsmengde. Siden vi i dette skrift offisielt identifiserer utsagn med mengder av mulige verdener følger det at SNu(Δ) = SN(Δ).

Med en "evidensmengde" forstår vi en mengde med utsagn som fremsettes til støtte for, eller som begrunnelse for, et eller flere utsagn.

La oss nå spesifisere forskjellige utsagnsmengder som rimeligvis kan fremsettes som støtte for påstander av vitenskapelig natur. Anta p er en bestemt person. Man kan da betrakte snittet av alle de utsagn som logisk sett følger fra alt det personen p vet ved tidspunktet t. Dette vil være et utsagn. Siden alt det en person ser, merker, kjenner ved tidspunktet t vil være en del av det p vet ved tidspunktet t følger det at ethvert utsagn som for eksempel følger fra alt det p ser ved tidspunktet t vil være et utsagn som som også følger fra alt det x vet ved tidspunktet t. Vi skal kalle det utsagnet som er snittet av alle de utsagn som logisk sett følger fra alt det personen vet ved tidspunktet t for *den totale evidens p er i besittelse av ved tidspunktet t*.

som Aristotelsk essensialisme er for Quine. I det minste kan kriteriet ikke begrunnes utfra naturvitenskapelige teorier supplert med logiske, mengdeteoretiske og matematiske prinsipper. Dessuten virker det som om predikatet "vitenskapelig meningsfullt predikat" ikke selv oppfyller betingelsen i kriteriet slik at det slår grunnen under seg selv. Dette er ytteligere en grunn til at vi finner det uberettiget å "dytte" det på Quine.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Det er visse forhold som bør bemerkes når det gjelder det utsagnet som representerer den totale evidens som en person besitter ved et gitt tidspunkt.

For det første må det påpekes at dette utsagnet er sant og derfor konsistent. For det andre er det viktig å notere at den totale evidens som personen p besitter varierer med tiden, men ikke nødvendigvis på noen kumulativ måte. Alt det personen p ved ved tidspunktet t behøver ikke nødvendigvis være inkludert i det vedkommende vet ved tidspunktet t' der t' er et tidspunkt som kommer etter t. Noe av det p vet ved tidspunktet t kan han ha glemt ved det senere tidspunktet t', og noe av det p vet ved tidspunktet t' kan være noe helt nytt og noe han absolutt ikke visste ved t. Forøvrig kan det være en varierende grader av overlapping. For det tredje må det nevnes at om man tar snittet av den totale evidens en person har ved tidspunktet t og den totale evidens vedkommende har ved t' (eller konjunksjonen av disse to utsagn) så er også dette et sant og konsistent utsagn. Det samme gjelder om man tar konjunksjonen av den totale evidens til personen p ved tidspunktet t og den totale evidens til personen p' ved tidspunktet t' der p og p' er forskjellige personer og t og t' er forskjellige tidspunkter. Dette gjelder generelt og uavhengig av tidsavstanden mellom tidspunktene t og t'.

Vi skal i det følgende bruke uttrykket "e;(p,t,w)" som forkortelse for det lengere uttrykket "den totale evidens som personen p er i besittelse av ved tidspunktet t i verdenen w". Uttrykket "e(p,t)" bruker vi for å betegne den totale evidens som personen p har ved tidspunktet t i den aktuelle verden, dvs. den totale evidens som p *faktisk* har ved tidspunktet t. Med andre ord har vi at e(p,t) = e(p,t,a0) hvor uttrykket "a0" betegner den aktuelle verden. (Det bør noteres at vi ikke har innført predikatet "x er den aktuelle verden" som et primitivt predikat i vår teori.)

La oss nå se på SNu/pêP/(e(p,t)), der "P" betegner mengden av personer.[65] Dette vil være konjunksjonen av de diverse e(p,t) ettersom p gjennomløper mengden av alle personer. Siden e(p,t) representerer snittet av alt det personen p vet ved tidspunktet t (i den aktuelle verden), vil konjunksjonen av de diverse e(p,t) ettersom p gjennomløper P representere konjunksjonen av alle de påstander som hele menneskeheten vet ved tidspunktet t. Populært og grovt uttrykt representerer SNu/pêP/(e(p,t)) menneskehetens totale kunnskap ved tidspunktet t. Hvis vi nå lar t0 være det nåværende tidspunkt og betrakter konjunksjonen av alle de diverse SNu/pêP/(e(p,t)) ettersom t gjennomløper mengden av alle de tidspunkter som kommer før eller er identisk med t0, med andre ord betrakter SNu/t=<t0/(SNu/pêP/(e(p,t)) vil dette være konjunksjonen av alle de påstander som hele menneskeheten vet fra de tidligste tider og frem til og inkludert det nuværende tidspunkt. Vi skal betegne dette utsagnet med Te(t0) og setter mer generelt:

$$Te(t) = SNu/t'=< t/(SNu/pêP/(e(p,t'))$$

Uttrykket "Te(t)" kan i lys av våre redegjørelser ovenfor leses "summen av all den evidens menneskeheten besitter frem til og inkludert tidspunktet t". La nå t1 være et tidspunkt i Platons liv. Da vil t1 < t0. Vi betegner Platon med "p0". e(p0,t1) vil da være all den evidens

65 SNu/xêA/(f(x)) er definert slik: SNu/xêA/(f(x)) = Mg(w: wêI & (Ax)(xêA → wêf(x))). Med andre ord er SNu/xêA/(f(x)) konjunksjonen av de diverse utsagnene f(x) ettersom x gjennomløper mengden A. Vi gjør også oppmerksom på at uttrykket "SNu(Δ)" er definert slik: SNu(Δ)= Mg(w: wêI & (Ax)(xêΔ → wêx)). Fra den siste definisjonen kan man utlede at SNu(Δ) alltid er et utsagn, dvs. en mengde med mulige verdener. Dessuten fremgår det også fra definisjonen at SNu(Δ)=I om Δ er den tomme mengden, det vil si om Δ=ø. Tilsvarende bemerkninger kan gjøres om SNu/xêA/(f(x)). Man ser fra de definisjonene vi har gitt at SNu/xêA/(f(x)) = SNu(Mg(f(x): xêA)). Leseren skulle ikke ha noen store problemer med å bevise dette.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Platon er i besittelse av ved t1. Det skulle da være klart at Te(t0) impliserer e(p0,t1). Det samme gjelder om vi lar p0 være for eksempel Aristoteles (eller Evklid) og tenker oss at t1 er et tidspunkt i Aristoteles (eller Evklids) liv.

La oss bemerke endel ting i forbindelse med Te(t). For det første bør det påpekes at Te(t) er et utsagn og at det må være et sant utsagn. Dette impliserer naturligvis at Te(t) er et konsistent utsagn. For det andre kan det nevnes at sekvensen <Te(t)>/têT/ er kumulativ i den forstand at dersom t,t' er tidspunkter der t <t' har vi at utsagnet Te(t') impliserer Te(t). Dette innebærer atmengden av alle de utsagn som er implisert av Te(t) er inkludert i mengden av alle de utsagn som er implisert av utsagnet Te(t'). Med andre ord er representerer sekvensen <Te(t)>/têT/ et stadig ekspanderende system av hovedsakelig empiriske sannheter. For det tredje kan det nevnes at Te(t0) er et utsagn som går langt utover det som følger fra den totale evidens som noen enkelt person p har ved tidspunktet t om t kommer før t0. Platon kunne ikke på noen måte forutsi noe om hva slags observasjoner man ville gjøre tusen år etter at han var død.

Nåvel. La oss nå gå over til det som ofte kalles tesen om teorimangfoldet. Denne tesen sier at uansett hvor mange data man har samlet inn, eller observasjoner man har gjort, før og inntil et visst tidspunkt vil det finnes uendelig mange konsistente teorier som er innbyrdes uforenelige, men som alle er forenelige med de data man har samlet inn og faktisk impliserer dem. Tar vi for eksempel utgangspunkt i utsagnet Te(t0), summen av all den evidens som menneskeheten er i besittelse av frem til og inkludert det nuværende tidspunkt t0, vil det derfor finnes uendelig mange innbyrdes uforenelige teorier som alle er forenelige med Te(t0). Siden de er innbyrdes uforenelige kan ingen av dem være implisert av utsagnet Te(t0) de må alle gå utover t0.

La oss på dette punkt avklare hva vi mener med en teori. Med en teori mener vi her intet annet enn en mengde med utsagn. Denne mengden kan være konsistent, dvs. det kan finnes en verden der alle utsagnene er sanne, eller inkonsistent. Videre kan en teori inneholde endelig eller uendelig mange utsagn. Videre kan den være lukket under logisk konsekvens eller ikke. La oss også notere at mengden av alle de utsagn som er sanne i en mulig verden w er en teori. Denne teorien er ikke bare konsistent, den er også fullstendig i den forstand at man ikke kan legge til utsagn som ikke er med i den uten at man som resultat får en inkonsistent teori. Fra tesen om teorimangfoldet anvendt på Te(t0) følger det at sannhetsmengden til Te(t0), ie mengden av alle de verdener der utsagnet Te(t0) er sant, inneholder minst tellbart uendelig mange verdener. Med andre ord har man:

(1) Card(Te(t0)) >= Aleph;0

Dette er naturligvis en singulær påstand. Den kan generaliseres noe. Vi bruker T for å betegne mengden av alle tidspunkter som vi for enkelhetens skyld tenker oss ordnet lineært og at er uendelig i begge retninger. Videre forutsetter vi også at T er tett og kontinuerlig, med andre ord at mengden av tidspunkter kan representeres ved punktene på den reelle tallinjen. I så fall kan man generalisere (1) til:

(2) (At)(têT → Card(Te(t)) >= Aleph;0)

med andre for et hvilket som helst tidspunkt t gjelder det at summen av all den evidens menneskeheten besitter frem til og inkludert tidspunktet t er et utsagn hvis sannhetsmengde er

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

minst tellbart uendelig. Det bør bemerkes at (2) er ekvivalent med (3) den påstand at det finnes en minst tellbart uendelig mengde med ikke-maksimalt konsistente teorier som er forenelige med Te(t) og som impliserer dette utsagn og som videre er innbyrdes uforenelige og at dette gjelder for alle têT.

Ikke bare er alle disse teoriene konsistente med Te(t), de er også sterkere enn Te(t), dvs. impliserer strengt Te(t). Dette innebærer naturligvis at de "går utover" Te(t) og ikke kan logisk utledes fra den evidens som Te(t) representerer. Utelukker man noen av disse teoriene kan det bare skje ved overveielser av en rent logisk, aprioristisk natur, kort sagt av aprioriske grunner. Fra det at disse teoriene ikke alle kan være sanne samtidig kan man i og for ikke slutte at noen av dem er mer "fornuftige" enn andre. Men dersom det finnes et enkleste totalsystem av kausallover hvis sannhetsmengde er forenelig med Te(t) virker det rimelig å si at alle utsagn som følger fra dette system, eventuelt fra dette system sammen med Te(t) er utsagn som det fornuftig å akseptere relativt til Te(t).

La oss nå se på noen andre eksempler av en noe annen natur. Vi tar utgangspunkt i Te(t0) der t0 er det nåværende tidspunkt. Vi minner om at Te(t0) er summen av all den evidens som menneskeheten besitter frem til og inkludert dette tidspunkt. Den følgende påstand, nemlig *"Ethvert egg blir hårdkokt etter ti minutter i kokende vann"*[66] skal vi betegne med H1. Det virker rimelig å hevde at denne påstanden er konsistent med Te(t0), med andre ord at den ikke strider mot noen data eller observasjoner som så langt har blitt gjort. Dessuten er det meningen at H1 skal oppfattes som en universell påstand, dvs. uansett hvor man befinner seg i universet og uansett ved hvilket tidspunkt man befinner seg, vil det være slik at et egg blir hårdkokt etter ti minutter i kokende vann.[67] Det virker nå rimelig å si at H1 ikke bare er konsistent med Te(t0), men også er, i likhet med en mengde lignende påstander, en påstand som det er *fornuftig å akseptere* om Te(t0) representerer all tilgjengelig evidens. Naturligvis er dette fordi alle i talløse tilfelle har iaktatt at egg som kokes i ti minutter eller litt mer blir hardkokte og at dette har vært tilfelle under varierende omstendigheter. Dette er en påstand som det er nærmest absurd å benekte om man bruker ordet "fornuftig" slik det vanligvis brukes.

I forbindelse med H1 kan det være av interesse å se på en annen påstand, nemlig den følgende: *"For alle tidspunkter som kommer før tidspunktet t blir et egg hårdkokt etter ti minutter i kokende vann, og for alle tidspunkter etter t eller identisk med tidspunktet t blir det først hårdkokt etter femten minutter i kokende vann"*. Strengt tatt er dette en åpen setning og uttrykker ikke en påstand før man har tilordnet variabeltegnet "t" en bestemt verdi. Vi skal forkorte denne åpne setningen med "H2(t)". Hvis man lar t1 betegne det tidspunkt som kommer hundre år etter det nuværende tidspunkt uttrykker naturligvis H2(t) en helt bestemt påstand.

Det virker plausibelt å hevde at utsagnet H2(t), der t er et tidspunkt som kommer la oss si ti år eller mer etter det nuværende tidspunkt, er en påstand som logisk sett er kompatibel med all den evidens vi har nå. Man motsier følgelig ikke seg selv om man hevder at begge utsagnene Te(t0) og H2(t) der t>t0 begge er sanne. Det bør også noteres at H1 og H2(t) ikke strengt tatt er logisk uforenelige: Anta t' er et tidspunkt som kommer etter t. Anta at et egg blir lagt i kokende vann ved t' og blir liggende der i ti minutter. Ifølge H1 vil egget da være hardkokt etter disse ti minuttene. Ifølge H2(t) vil det først være hårdkokt etter femten minutter og kan derfor ikke være hårdkokt etter ti minutter. Men fra dette følger ikke at H1 og H2(t)

66 Vi forutsetter at egget kokes ved havoverflaten og under omstendigheter som er vanlige på jorden.
67 Igjen må vi minne om forutsetningene som ble nevnt i forrige fotnote.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

direkte motsier hverandre. Det følger bare at for ethvert tidspunkt t' som kommer etter t vil ikke noe egg befinne seg i kokende vann i ti minutter regnet fra t' (eller i lengere tid enn dette). Det man derimot kan si er at de to påstandene gir logisk uforenelige forutsigelser angående hva som vil skje under nærmere angitte betingelser.

Det samme gjelder H2(t1) og H2(t2) om vi forutsetter at t0 <t1 og t1 < t2. Er da t' et tidspunkt som ligger mellom t1 og t2 og legges et egg i kokende vann ved t' og blir liggende der i minst ti minutter, vil man ifølge H2(t1) ha at egget ikke er hårdkokt etter disse ti minuttene, mens det ifølge H2(t2) vil være hårdkokt. Også H2(t1) og H2(t2) gir under visse betingelser uforenelige forutsigelser, men er strengt tatt ikke logisk uforenelige.[68]

Vi fant ovenfor at det var rimelig å hevde at det er foruftig å akseptere H1 relativt til all den evidens vi besitter ved det nåværende tidspunkt, dvs. Te(t0). Gitt denne evidens og at dette er all den evidens som foreligger virker det imidlertid eiendommelig å hevde at det er foruftig å akseptere for eksempel H2(t1), der t1 er et tidspunkt som kommer hundre år etter t0, relativt til Te(t0). Tilsvarende om man betrakter H2(t) for et eller annet tidspunkt som ligger mellom t0 og t1, eller som kommer etter t1 i tid.

Hvordan innser man så at det er fornuftig å akseptere H1 relativt til Te(t0), eller en mindre omfattende evidensmengde e og at det ikke er fornuftig å akseptere H1(t) for noe tidspunkt t som kommer etter t0 det vil si det nåværende tidspunkt? Det første man kan påpeke er at dette ikke kan begrunnes på basis av den evidens vi faktisk har nå, f.eks Te(t0), i alle fall ikke på grunnlag den rent empiriske del av denne evidens. Man kan neppe utføre eksperimenter for å bringe på det rene om det er fornuftig å akseptere H1 relativt til Te(t0). Heller ikke er den påstand at H1 er fornuftig å akseptere relativt til den totale evidens vi har nå en empirisk hypotese fra hvilken man kan utlede predikasjoner som kan kontrolleres i fremtiden, og det virker åpenbart søkt å si at det er en påstand som kan styrkes eller svekkes av fremtidig evidens. Man synes derfor bare å stå tilbake med det følgende: En påstand av denne type kan bare innses ved at man nøye reflekterer over hva den evidens man har innebærer logisk sett, hva det utsagn man hevder at er fornuftig å akseptere logisk sett innebærer og hva man legger i ordet "fornuftig", spesielt hva man legger i uttrykket "Det er fornuftig å akseptere at α gitt at β representerer all tilgjengelig evidens". En person som derfor benekter at det for eksempel er fornuftig å akseptere den universelle sats at egg blir hårdkokt etter ti minutter i kokende vann på basis av all den evidens vi har nå kan ikke være annet enn en person som ikke skjønner hva fornuft er, som ikke skjønner betydningen til ordet "fornuftig", som ikke skjønner hvordan det er rimelig å bruke ordet "fornuftig", som kort sagt ikke har lært å tale og skrive det språket han bruker skikkelig, og hvis dette mot formodning ikke er tilfelle er en person som må karakteriseres som tankeløs og forvirret.[69]

68 Situasjonen her er analog med denne. Man har to teorier T1, T2 som hver er konsistente. Fra T1 kan man utlede p→q og fra T2 kan man utlede p→¬q. T1&T2 følger da ¬p. Men fra dette kan man ikke slutte at konjunksjonen T1& T2 er inkonsistent. Derimot er konjunksjonen av T1&T2 og p kontradiktorisk.

69 I lys av det vi har sagt om enkelhetsprinsippet bør det gjøres helt klart at et utsagn av typen Ba(x,y) impliserer at det finnes visse enkleste verdener i sannhetsmengden til y. Dette er ingen helt opplagt sak og gjør at aksiomet (eller definisjonen) (1) Ba(x,y) ↔ (x,yêU & ø≠Max(R,y) & Max(R,y) Inkl x) får en noe annen karakter enn de svært enkle, og skulle man tro, fullstendig innlysende aksiomene E1 - E3. Hvis man derfor hevder at det generelle utsagnet H1 er fornuftig å akseptere relativt til all den evidens vi har nå følger det at det finnes noen enkleste verdener blandt alle de verdenene hvor all den evidens vi har nå er sann. Det kan i denne forbindelse være naturlig å nevne at ingen enkeltsetning av typen Ba(x,y) strengt tatt er noe teorem i den akseptanseteorien vi har formulert. En annen ting er dette: Man ser lett fra (1) at (Ez)(zêU &Ba(z,y)) er ekvivalent med ø≠Max(R,y). Hvis man derfor hevder at (Ex)(xêU & Ba(x,I)) er dette ekvivalent med at Max(R,I)≠ø. Dette er i sin tur ekvivalent med å hevde at det i mengden av alle mulige verdener

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Vi har altså sett at det er fornuftig å akseptere H1 relativt til all den evidens vi har ved det nuværende tidspunkt. Men hvorfor er det ikke fornuftig H2(t1) relativt til denne evidens? La oss betegne den evidens vi har ved det nuværende tidspunkt med e. Forutsetter vi dette virker det rimelig å hevde at de enkleste verdenene der konjunksjonen av e og H1 holder, må være enklere enn de enkleste verdenene der konjunksjonen av e og H2(t1) holder. I så fall kan ikke H2(t1) være sann i alle de enkleste verdenene i sannhetsmengden til e, mao. kan det da ikke være fornuftig å akseptere H2(t1) gitt at e representerer all tilgjengelig evidens.

Den følgende sats som og dens bevis gir et mer presist uttrykk for tankegangen ovenfor. Det bør understrekes at dette er en sats som kan utledes i den teorien som er definert i §3. Vi har:

Teorem 5.2.1 Anta følgende holder i det vi forutsetter at e, H1 og H2 er utsagn
(i) Max(R, eΩH1) ≠ ø
(ii) (Aw)(Aw')(wê Max(R,eΩH1) & w'êMax(R,H2) → wR*w')
Da har man:
(a) ¬[ø≠ Max(R,e) & Max(R,e) Inkl H2]
(b) ¬Ba(H2,e)

Bevis: Punkt (b) i denne satsen følger umiddelbart fra punkt (a) og definisjonen av Ba. Vi beviser derfor bare (a). Anta for reduktio ad absurdum at (i) - (ii) holder, men at vi ikke desto mindre har:
(iii) ø≠ Max(R,e) & Max(R,e) Inkl H2
Fra (iii) følger eksistensen av noe w0 der vi har (1) w0êMax(R,e). Fra dette og den siste konjunkten i (iii) følger (2) w0ê (eΩH2). Vi kan nå vise:
(3) Max(R,e) = Max(R,eΩH2)
Vi skal gi et detaljert bevis for dette nedenfor. Fra (i) har vi at det finnes w1 der
(4) w1êMax(R,eΩH1) Fra (1) og (3) følger (5) w0êMax(R,eΩH2). Fra dette og (4) følger i lys av forutsetning (ii) at vi må ha (6) w1R*w0. Fra (4) følger ved hjelp av definisjonen av operatoren Max at (7) w1ê(eΩH1) Inkl e. Da (7.1) w1ê e. Fra (1) og definisjonen av Max følger også (8) (Ay)(yê e → w0Ry). Dette og (7.1) impliserer (9) w0Rw1. Fra (6) og definisjonen av R* ser man at w1Rw0 & ¬w0Rw1. Dette strider åpenbart mot (9). Det følger at (a) holder.

Det gjenstår nå å vise at (3) ovenfor holder. Vi ser først på inklusjonen mot høyre. Anta for vilkårlig w' at (10) w'êMax(R,e). Da har vi w'êe og w'êH2 i lys av (iii). Det følger at (11) w'êeΩH2. Anta nå for vilkårlig y at yêeΩ H2. Da har vi yê e og derfor ved hjelp av

finnes noen maksimalt enkleste verdener. Man kan ikke si annet enn at dette er en temmelig dristig metafysisk påstand

Det kan også bemerkes at den følgende påstand: (2) (Ay)(yêU → (Ez)(zêU & Ba(z,y)) er konsistent med den teorien vi har formulert, men at (2) , naturlig nok, ikke kan utledes fra grunnsetningene i var teori, ie E1- E3 supplert med (1) oppfattet som en definisjon av Ba. Det bør nevnes at (2) er en meget sterk påstand. Den impliserer at enkelhetsrelasjonen R er en preferanserelasjon og at alle enkelhetsnivåene assosiert med R, ie de diverse Mg([w];R: wêI) kan ordnes lineært. Men dette er ikke alt. Påstanden (2) impliserer også at alle enkelhetsnivåene kan *velordnes,* med andre ord vil det finnes et høyeste enkelhetsnivå N0, et nest høyeste nivå N1, osv. Det omvendte holder også: Kan alle enkelhetsnivåene assosiert med R velordnes så holder også (2).

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(10) at w'Ry. Det følger at w'êMax(R, eΩH2). Dette viser at inklusjonen mot høyre i (3) holder.

La oss nå ta for oss inklusjonen mot venstre i (3). Anta for reduktio at det finnes w' slik at (12) w'êMax(R,eΩH2) og (13) ¬(w'ê Max(R,e))

Fra (12) har vi ved hjelp av definisjonen av Max at (14) w'ê eΩH2 og derfor at (15) w'ê e. Fra (13) har man ved hjelp av definisjonen av Max:

(16) ¬(w'ê e & (Ay)(yê e → w'Ry)) Fra dette følger:

w'ê e → (Ey)(yê e & ¬(w'Ry))

Fra dette og (15) følger at det må finnes noe w2 der vi har

(17) w2ê e & ¬(w'Rw2)

Siden inklusjonen mot høyre i (3) holder, noe vi allerede har bevist, følger fra (1) og (3) at (18) w0êMax(R,eΩH2). Fra dette og (12) kan man slutte (19) w0 Ekv;R w'. Fra dette i sin tur følger ved hjelp av definisjonen av Ekv;R at (20) w0Rw' & w'Rw0. Hadde vi nå w0Rw2 ville vi da ha ved hjelp av (20) at w'Rw2. Men dette strider mot (17). Vi har derfor (21) ¬(w0Rw2). Men w2ê e & w0êMax(R,e). Dette og (21) gir oss en motsigelse. Det følger at (12) ikke kan holde for noe w' og derfor at inklusjonen mot venstre i (3) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

§5.3 Om enkelhetsrelasjonen, enkelhetsprinsippet og akseptanserelasjonen.

I den fulle teorien om akseptanse og sannsynlighet er det bare tre predikater utover de mengdeteoretiske predikatene som er av ikke-logisk natur. Dette ser man fra den formelle fremstillingen av teorien som vi tidligere har gitt. De tre predikatene er "w er en logisk mulig verden", enkelhetspredikatet Enk og det sannsynlighetsteoretiske predikatet Cd. Man husker at uttrykket "Enk(w,w')" er en forkortelse for " w er en verden med minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som verdenen w'".

Vi har nå kommentert aksiomene som inneholder predikatet "w er en mulig verden". Her vil vi imidlertid si noe mer om aksiomene og definisjonene vi har gitt i forbindelse med enkelhetsrelasjonen. Aksiomene E1 - E3 sier ikke noe annet enn at enkelhetsrelasjonen er en relasjon mellom mulige verdener og at den er en refleksiv og transitiv relasjon, med andre ord at den er en preordning over mengden av mulige verdener I. Hvis dette enkelhetspredikatet gir noen mening skulle disse tre aksiomene, som er meget svake, fremstå som fullstendig uimotsigelige. Vi har imidlertid gitt visse definisjoner i forbindelse med enkelhetspredikatet. Noen av disse fremtrer som helt harmløse. R, R*, Ekv;R er for eksempel definert ved hjelp av enkelhetspredikatet og rent mengdeteoretiske predikater. R er selvfølgelig enkelhetsrelasjonen selv, R* er den "strikte" eller strenge enkelhetsrelasjonen: man har at wR*w' hvis og bare hvis w er en mulig verden som har en større grad av indre koherens, harmoni og enkelhet enn verdenen w'. Ekv;R den relasjonen som består mellom to mulige verdener dersom de har nøyaktig den samme grad av indre koherens, harmoni og enkelhet. Endelig har vi Max-operatoren som til enhver mengde av mulige verdener tilordner a mengden av de elementene i a som har minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som ethvert annet element i a. Som man husker innførte vi av rene bekvemmelighetsgrunner uttrykket "κ(a)" som forkortelse for det litt lengere uttrykket "Max(R,a)". Dette er berettiget fordi vi gjennom hele denne første delen av vårt arbeid forutsetter at enkelhetsrelasjonen er den samme.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Vi innførte imidlertid et spesielt predikat i forbindelse med de tre aksiomene om enkelhetsrelasjonen, nemlig predikatet "x er et utsagn som beskriver et forhold som det er fornuftig å akseptere gitt at utsagnet y representerer all evidens som kan tas for gitt" som vi forkortet med "Ba(x,y)"[70]. Dette predikatet ble innført ved den følgende definisjon:

(+) $Ba(x,y) \leftrightarrow (x,y \hat{e} U \ \& \ \emptyset \neq Max(R,y) \ \& \ Max(R,y)\ Inkl\ x)$

Hvis dette oppfattes som en konvensjonell stipulativ definisjon betyr naturligvis det uttrykket som står til venstre i bikondisjonalen ikke noe annet enn det som står til høyre. I så fall må man forklare hvorfor det er hensiktsmessig og formålstjenelig å tillegge uttrykket "Ba(x,y)" akkurat denne betydningen.

På den annen side kan man hevde at uttrykket vi forkorter med "Ba(x,y)" allerede på forhånd har en mening og i så tilfelle har ikke (+) karakter av å være en stipulativ definisjon, men uttrykker snarere en påstand som må bevises og begrunnes selvom den kan virke plausibel for velvillig innstilte personer.

Det er i prinsippet tre mulige alternativer på dette punkt når det gjelder aksiomatiseringen av den fulle teorien om akseptanse og sannsynlighet. Det første alternativet er den teorien vi allerede har beskrevet: Enkelhetspredikatet er det eneste ikke-logiske predikatet sammen med predikatet "mulig verden", det vi kalte sannsynlighetspredikatet og de mengdeteoretiske predikatene. Aksiomer når det gjelder enkelhetspredikatet er E1 -E3. "Ba(x,y)" er ikke noe primitivt predikat, men innført ved definisjonen (+).

Det andre alternativet er at an utvider språket til den fulle teorien om akseptanse og sannsynlighet med predikatet "Ba(x,y)" som et nytt ikke-logisk predikat og utvider denne teorien med (+) som et nytt ikke-logisk aksiom i tillegg til E1 - E3. Dette er det alternativet som vi antydet ovenfor. Denne teorien er naturligvis formelt helt ekvivalent med den vi avgrenset og definerte i §3.

Det tredje alternativet er dette: Man sløfer enkelhetspredikatet fra språket til den fulle teorien om akseptanse og sannsynlighet og erstatter dette med "Ba(x,y)" som et nytt ikke-logisk predikat. I dette tilfellet må vi erstatte aksiomene E1 - E3 med aksiomer for predikatet "Ba(x,y)". Det er mulig å finne et sett av slike grunnsetninger som er ekvivalente med E1 -E3 supplert med (+) enten som definisjon eller ikke-logisk aksiom. Setter vi per definisjon $B = Mg(\langle x,y\rangle : Ba(x,y))$ vil det være tilstrekkelig å legge til to grunnsetninger nemlig $Ba(x,y) \rightarrow x,y \hat{e} U$, en grunnsetning som er innlysende, og en grunnsetning som sier at det ordnete par $\langle I,B\rangle$ er en *akseptansestruktur*[71], en grunnsetning som ikke er fullt så innlysende. Velger man dette siste alternativet kan man utlede såvel (+) som E1 -E3 om man definerer enkelhetsrelasjonen R på den måten som det er gjort ved Definisjon 5.2 i Rognes [7], "Et notat om preordninger og akseptanserelasjoner".

Så langt har vi i dette avsnittet forsøkt å belyse den akseptansteoretiske del av den fulle teorien om akseptanse og sannsynlighet ved å se på endel alternative aksiomatiseringer av denne del av teorien. Dette har beskjeftiget oss fordi det alltid er en fordel å kunne se en teori fra forskjellige synsvinkler og det å angi ekvivalente aksiomatiseringer av en teori alltid gir en

70 Dette lange uttrykket kan også leses "utsagnet x bør aksepteres relativt til utsagnet y" eller "det er fornuftig å akseptere utsagnet x relativt til utsagnet y"

71 Se Rognes [7], "Et notat om preordninger og akseptanserelasjoner", Definisjon 3.6, Definisjon 5.1 (hhv. på side 8 og side 23, samt resultatene som det gis bevis for i §6 i dette skrift.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

et noe dypere innsikt i teorien. Vi skal nå gå over til et litt annet tema som også er relevant i denne forbindelse.

Vi har ikke forsøkt å gi noen analyse av enkelhetsrelasjonen over mulige verdener. Det kan imidlertid være av en viss interesse å presentere noen tentative tanker om dette tema. Hvorvidt en logisk mulig verden w er enklere (har større grad av koherens, harmoni og enkelhet) enn en annen verden w' synes ikke å være fullstendig urelatert til det system av kausallover som gjelder i de to verdenene w og w'. Er det system av kausallover som gjelder i verdenen w' langt mer komplisert enn det system av kausallover som gjelder i verdenen w virker det nærliggende å si at verdenen w er enklere enn verdenen w'. Tenker man seg videre at totalsystemet av kausallover som gjelder i disse to verdenene w og w' er det samme virker det heller ikke umiddelbart urimelig å si at de to verdenene er like enkle. Forutsetter man ytterligere at totalsystemet av de kausallover som gjelder i disse to verdenene enn mer er av deterministisk natur, slik at totaltilstanden ved et gitt tidspunkt i en verden der disse lovene gjelder entydig bestemmer totaltilstanden ved alle andre tidspunkter, virker det ikke som det forhold at totaltilstanden i w ved et gitt tidspunkt t er en annen enn i verdenen w' skulle ha noen innvirkning på spørsmålet om w er enklere enn w'. Det virker i dette tilfellet snarere plausibelt å hevde at de er like enkle.

Vi vil forsøke å formalisere disse litt løse tankene noe for å få poenget tydeligere frem. Vi tenker oss at vi i første omgang innfører predikatet "x er en kausallov som gjelder i verdenen w". Vi går ut fra at dette predikatet gir mening og vil ikke diskutere dette nærmere akkurat her. Vi tenker oss altså at språket til den fulle teorien om akseptanse og sannsynlighet utvides med dette predikatet som vi forkorter med "CLov(x,w)". Et ytterst rimelig aksiom for dette predikatet, nærmest fullstendig trivielt er:

L1 $\quad CLov(x,w) \rightarrow w \hat{e} I$

Med det totale system av kausallover som gjelder i verdenen w, L;w, mener vi mengden av alle de kausallover som gjelder i verdenen w. Med andre ord setter vi $L;w=Mg(x: CLov(x,w))$. Man kan ikke utlede fra fra L1 sammen med de mengdeteoretiske aksiomene at L;w er en mengde. Det må en egen grunnsetning til for å sikre denne, i og for seg rimelige påstand. Vi legger derfor til det følgende aksiom:

L2 $\quad (Aw)(w \hat{e} I \rightarrow M(L;w))$

Mengden av alle totalsystemer av kausallover, L, er mengden av de diverse L;w ettersom w gjennomløper mengden av mulige verdener I. Formelt sett definerer vi L ved å sette $L = Mg(L;w: w \hat{e} I)$.

Vi skal nå innføre nok et predikat nemlig det følgende: "x er et totalsystem av kausallover som har en større grad av indre koherens, harmoni og enkelhet enn totalsystemet y". Vi forkorter dette med "Enk;C(x,y)". Det er åpenbart, i lys av lesemåten til dette predikatet, at følgende grunnsetning bør oppfattes som rimelig:

L3 $\quad Enk;C(x,y) \rightarrow x,y \hat{e} L$

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

der L er definert som ovenfor. Det er imidlertid endel andre påstander som virker plausible når det gjelder relasjonen Enk;C. For det første kan ikke et totalsystem av kausallover være enklere enn seg selv. Av denne grunn virker det følgende postulat rimelig:

L4 $(Ax)(x\hat{e}L \rightarrow \neg Enk;C(x,x))$

For det andre virker det trivielt at Enk;C er en transitiv relasjon. Med andre ord holder følgende grunnsetning generelt:

L5 $Enk;C(x,y) \,\&\, Enk;C(y,z) \rightarrow Enk;C(x,z)$

Det er imidlertid ytterligere en påstand som er viktig å nevne: Fra en rent logisk synsvinkel er det i og for seg intet som hindrer at det finnes logisk mulige verdener w der ingen kausallover gjelder, det vil si verdener w der vi har $\neg(Ex)CLov(x,w)$. Da har vi naturligvis på basis av definisjonen av L;w at $L;w=\emptyset$. Det virker inidlertid rimelig å hevde at enhver verden der ingen kausallover gjelder overhodet må være en verden som er fullstendig kaotisk, hvor alle forutsigelser er fullstendig umulige, og som derfor må være mer komplisert enn enhver verden hvor det finnes kausallover uansett hvor kompliserte disse er. Det virker derfor rimelig å postulere:

L6 $x\hat{e}L \,\&\, x\neq\emptyset \rightarrow Enk;C(x,\emptyset)$

Vi har nå sett på noen antagelser om enkelhet i forbindelse med totalsystemer av kausallover. La oss nå se på hvordan det er mulig å definere enkelhetsrelasjonen ved hjelp av de begrepene vi har innført og dessuten vise hvordan man kan utlede grunnsetningene E1 - E3 ved hjelp av L1 - L6 og denne definisjonen. Vi definerer Enk på denne måten:

Definisjon 5.3.1 $Enk(w,w') \;\leftrightarrow.\; w,w'\hat{e}I \,\&\, (L;w = L;w' \;v\; Enk;C(L;w, L;w'))$

Gitt denne definisjonen er det nå mulig å definere en variant av den fulle teorien om akseptanse og sannsynlighet. Vi fjerner predikatet "Enk(w,w')" fra denne teorien og dessuten aksiomene E1 - E3. I stedet for predikatet "Enk(w,w')" legger vi til predikatene "Clov(x.w)" og "Enk;C(x,y)" som nye ikke-logiske predikater. I stedet for E1 -E3 legger vi til L1 - L6 som nye ikke-logiske aksiomer. I denne varianten av teorien bruker vi de gamle definisjonene av R,R*, Max(R,x), og Ba(x,y). Som nevnt får vi da en teori hvor man kan utlede E1-E3. Kort sagt en teori som er litt sterkere enn den teorien som vi definerte i §3 og som fremdeles er vår offisielle teori. I resten av denne paragrafen skal vi arbeide innenfor rammen av denne nye reviderte teorien.

Fra Definisjon 5.3.1 følger umiddelbart E1, ie. at $Enk(w,w') \rightarrow w,w'\hat{e}I$. Anta nå at $w\hat{e}I$ for vilkårlig w. Da har vi $w\hat{e}I \,\&\, L;w=L;w$ ikraft av definisjonen av L;w og grunnsetningen L2. Men fra dette og Definisjon 5.3.1 følger Enk(w,w). Dette viser at $(Aw)(w\hat{e}I \rightarrow Enk(w,w))$. med andre ord at E2 holder.

Vi må imidlertid vise at E3 holder. Anta derfor for vilkårlige w1,w2,w3 at

(1) $Enk(w1,w2) \,\&\, Enk(w2,w3)$. Ved hjelp av Definisjon 5.3.1 følger da:

(2.1) $w1,w2\hat{e}I \,\&\, (L;w1 = L;w2 \;v\; Enk;C(L;w1, L;w2))$

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(2.2) w2,w3êI & (L;w2 = L;w3 v Enk;C(L;w2, L;w3))

Herav følger naturligvis (3) w1,w3êI. Man ser at det er i alt fire tilfelle som må undersøkes. I det første tilfellet har vi L;w1 = L;w2 & L;w2 = L;w3. Fra dette følger L;w1= L;w3 og derfor i lys av definisjonen ovenfor og (3) at Enk(w1,w3).

I det andre tilfellet har vi (4) L;w1 = L;w2 & Enk;C(L;w2, L;w3). Herav følger umiddelbart Enk;C(L;w1, L;w3) og derfor ved hjelp av Definisjon5.3.1 og (3) at Enk(w1,w3). I det tredje tilfelle har vi L;w2 = L;w3 &Enk;C(L;w1, L;w2). Herav kan vi så slutte Enk(w1,w3) akkurat på samme måte som i det foregående tilfelle.

Det gjenstår bare en mulighet, nemlig at Enk;C(L;w1, L;w2) & Enk;C(L;w2, L;w3) Men fra disse disse to påstandene og L5, som sier at Enk;C er transitiv utleder man umiddelbart at Enk;C(L;w1,L;w3). Men fra dette, (3) og Definisjon 5.3.1 følger igjen at Enk(w1,w3). I alle tilfelle har vi Enk(w1,w2). Det følger at man har

Enk(w1,w2) & Enk(w2,w3) → Enk(w1,w3). Vi har altså at E3 holder.

Dette avslutter vårt bevis for at E1 - E3 kan utledes i denne reviderte versjonen av den fulle teorien om akseptanse og sannsynlighet.

Som vi har nevnt tidligere definerer vi enkelhetsrelasjonen Enk(w,w') innenfor rammen av den reviderte versjonen av den fulle teori om akseptanse og sannsynlighet ved hjelp av Definisjon 5.3.1 ovenfor. Enkelhetsrelasjonen R er som tidligere definert ved R= Mg(<w,w'>: Enk(w,w')). Men i lys av Definisjon 5.3.1 er denne definisjonen ekvivalent med:

(1) R= Mg(<w,w'>: w,w'êI & (L;w=L;w' v Enk;C(L;w, L;w')))

Vi skal også definere et annet begrep vi trenger. Vi ønsker å forklare hva vi mener med *sannhetsmengden til et totalsystem av kausallover x.* Dette er mengden av alle de verdener der alle lovene i dette totalsystemet gjelder. Vi bruker "s(x)" som forkortelse for "sannhetsmengden til det totale system x av kausallover". Vi definerer dette slik:

Definisjon 5.3.2: s(x) = Mg(w': w'êI & (Ew)(wêI & x=L;w & L;w'=L;w))

Gitt disse definisjonene og de øvrige grunnsetninger som vi har gjort rede for ovenfor kan man nå bevise det følgende teorem:

Teorem 5.3.1: Anta w,w' êI Da har man:

(a) wR*w' ↔ Enk;C(L;w,L;w')

(b) Ekv;R(w,w') ↔ L;w = L;w'

Bevis: *Ad (a)*: Vi beviser først kondisjonalen mot høyre: Anta (1) wR*w'. I lys av definisjonen av R* impliserer dette (2) wRw' & ¬(w'Rw). Fra den første konjunkten i (2) og Definisjon 5.3.1 følger (3) w,w'êI & (L;w=L;w' v Enk;C(L;w, L;w')). Fra den andre konjunkten i (2) og samme definisjon kan man slutte, siden w,w'êI:

¬(L;w'=L;w) & ¬(Enk;C(L;w',Lw))

Men fra dette og (3) følger Enk;C(L;w,L;w'). Dette viser at kondisjonalen mot høyre holder. La oss så se på kondisjonalen mot venstre: Anta (4) Enk;C(L;w,L;w'). Da har man siden w,w'êI åpenbart at wRw' ved hjelp av Definisjon 5.3.1. Vi må imidlertid også vise at ¬(w'Rw). Anta for reduktio at w'Rw. Da følger ved hjelp av Definisjon 5.3.1 at

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

L;w'=L;w v Enk;C(Lw',L;w). Fra den første disjunkten her og (4) følger Enk;C(L;w,L;w) som er umulig ifølge L4. Fra den andre disjunkten, (4) og L5 følger også Enk;C(L;w,L;w) som er utelukket i lys av L4. I begge tilfelle kan man utlede en motsigelse det følger at ¬(w'Rw). Siden wRw' har vi derfor wR*w'. Dermed har vi vist at punkt (a) holder.

Ad (b): Vi tar først for oss kondisjonalen mot høyre. Anta (1) Ekv;R(w,w'). Da har vi ved hjelp av definisjonen av Ekv;R at (2) wRw' & w'Rw. Fra (2) og Definisjon 5.3.1 kan man slutte:

(3.1) L;w=L;w' v Enk;C(L;w,L;w') og
(3.2) L;w'=L;w v Enk;C(L;w',L;w)

Det er i alt fire muligheter her. Har man L;w=L;w' & L;w'=L;w følger åpenbart L;w=L;w'. Har man L;w=L;w' & Enk;C(L;w',L;w) følger EnK;C(L;w,L;w) som sammen med det at w,w'êI strider mot grunnsetningen L4. Har man Enk;C(L;w,L;w') & L;w'=L;w følger likeledes Enk;C(L;w, L;w) som strider mot L4. De to sistnevnte mulighetene er derfor utelukket. I det siste tilfellet har vi Enk;C(L;w,L;w') & Enk;C(L;w', Lw) men da har man ved hjelp L5 at Enc;C(L;w, L;w) som igjen er utelukket. Av de fire mulighetene er altså alle utenom L;w=L;w' utelukket. Det følger at L;w=L;w' og derfor at kondisjonalen mot høyre holder.

Vi viser så kondisjonalen mot venstre: Anta (4) L;w= L;w' Man ser da umiddelbart at dette sammen med Definisjon5.3.1 impliserer wRw' & w'Rw, med andre ord at Ekv;R(w,w'). Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Det følgende teorem er av viktighet fordi det angir en ekvivalent versjon av det vi har kalt enkelhetsprinsippet.

Teorem 5.3.2 Anta x,yêU, med andre ord at x og y er utsagn. Da gjelder at de følgende to betingelser er ekvivalente:

(a) ø ≠ Max(R,y) & Max(R,y) Inkl x
(b) (ET)(TêL & s(T)Ω y≠ø &
(AT')(T'êL & s(T')Ωy ≠ø & T ≠ T' → Enk;C(T,T')) &
s(T)Ωy Inkl x) [72]

Fra dette teoremet og enkelhetsprinsippet, dvs. prinsippet:

72 Det er nødvendig å gjøre helt klart hva denne betingelsen egentlig sier. La oss først se på TêL & s(T)Ωy≠ø. At TêL innebærer at T er et totalsystem av kausallover som er realisert i en eller annen verden. Det at s(T)Ωy≠ø innebærer at mengden av alle de verdener der totalsystemet T av kausallover foreligger realisert har visse elementer felles med sannhetsmengden til utsagnet y. Med andre ord innebærer s(T)Ωy≠ø at totalsystemet T av kausallover er logisk sett forenelig med utsagnet y. Ser man på betingelsen: (AT')(T'êL & s(T')Ωy≠ø & T'≠T → Enk;C(T,T')) sier denne at ethvert totalysystem av kausalover T' som er forenelig med y men distinkt fra T er mer komplisert enn T. Med andre ord sier de to første betingelsene at *T er det enkleste totale system av kausallover som er forenelig med utsagnet y.* Hva uttrykker så den siste konjunkten etter eksistenskvantoren? Denne betingelsen, s(T)Ωy Inkl x, sier at snittet av alle de verdenene der det totale system av kausallover er realisert og mengden av alle de verdenene der utsagnet y er sant er inkludert i mengden av de verdenene der utsagnet x er sant. Med andre ord er det umulig å finne noen verden der utsagnet y er sant og der totalsystemet T av kausallover er realisert og hvor utsagnet x er usant. Betingelsen sier derfor at *utsagnet y sammen med alle kausallovene i T impliserer utsagnet x*. Hele betingelsen sier derfor at det finnes et enkleste totalsystem av kausallover som er forenelig med utsagnet y og at konjunksjonen av disse lovene og y impliserer utsagnet x.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(+) Ba(x,y) ↔ (x,yêU & ø≠ Max(R,y) & Max(R,y) Inkl x)
kan man naturligvis utlede det følgende korollar:

Korollar 5.3.1 Man har om x,yêU at
Ba(x,y) ↔ (ET)(TêL & s(T)Ω y≠ø &
(AT')(T'êL & s(T')Ωy ≠ø & T ≠ T' → Enk;C(T,T')) &
s(T)Ωy Inkl x)

Siden (+) er den definisjonen vi også bruker av akseptanserelasjonen Ba innenfor den reviderte versjonen av den fulle teorien om akseptanse og sannsynlighet som vi har definert ovenfor gir naturligvis denne satsen oss en alternativ formulering av enkelhetsprinsippet siden korollaret ovenfor kan uttrykkes slik uten symboler:

Dersom x,y er utsagn har man at det er fornuftig å akseptere utsagnet x relativt til utsagnet y dersom og bare dersom det finnes et enkleste totalsystem av kausallover som er konsistent med utsagnet y og utsagnet x er logisk sett implisert av konjunksjon av sannhetsmengden til dette totalsystem og utsagnet y

La oss nå gi et bevis for Teorem 5.3.2

Bevis: Anta x, yêU. Vi vil først vise at betingelsen (a) impliserer (b).

(**A)** Anta (1) ø≠ Max(R,y) Inkl x. Da har vi at det må finnes noe w0 der (2) w0êMax(R,y). Videre har vi selvfølgelig fra (1) at (3) Max(R,y) Inkl x. Fra (2) kan man lett utlede at (4) Max(R,y) = y Ω Mg(w: Ekv;R(w0,w). Siden y er et utsagn følger fra (2) at w0êI. Fra dette og grunnsetningen L2 kan man slutte at L;w0 er en mengde. Vi har derfor at (5) (ET)(T=L;w0) Men fra (4) og Teorem 5.3.1 kan man slutte at

(6) Mg(w: Ekv;R(w0,w) = Mg(w: L;w=L;w0) Fra (5) følger (7) T=L;w0 for noe T. Vi ønsker nå å vise at

(8) s(T) = Mg(w: Ekv;R(w0,w))

Anta w'ês(T) for vilkårlig w'. Da har vi ved hjelp av definisjonen av s(T) at (9) (Ew)(T=L;w& L;w=L;w'). Fra dette følger at det finnes w1 der (10) T=L;w1 & L;w1=L;w'. Fra dette og (7) følger L;w0 = L;w' og fra dette og (6) kan man så slutte at w'êMg(w: Ekv;R(w0,w'). Dette viser at inklusjonen mot høyre i (8) holder.

La oss vise inklusjonen mot venstre: Anta w'êMg(w: Ekv;R(w0,w)). Da har man Ekv;R(w0,w'). Fra dette og (6) kan man slutte L;w'=L;w0. Sammen med (7) gir dette en at T=L;w0 & L;w0=L;w'. Da (Ew)(T=L;w & L;w=L;w'). Fra dette følger så ved hjelp av definisjonen av s(T) at w'ês(T). Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for (8).

Fra (8), (4) og (1) følger s(T)Ωy ≠ ø. Siden T=L;w0 har vi derfor (11) TêL & s(T)Ωy≠ø. Det følger også i lys av (1), siden s(T)Ωy=Max(R,y), at (12) s(T)Ωy Inkl x

For å fullføre beviset for satsen er det nå tilstrekkelig å vise at

(13) (AT')(T'êL & s(T')Ωy ≠ø & T ≠ T' → Enk;C(T,T'))

Anta derfor for vilkårlig T' at (14) T'êL & s(T')Ωy ≠ø & T ≠ T' . Fra den første konjunkten i (14) følger (14.1) T'=L;w1 for noe w1êI. Fra den andre konjunkten i (14) følger at det finnes w2 der vi har w2ês(T')Ωy. Ved hjelp av definisjonen av s(T) kan man herav slutte:

(15) w2êy & (Ew)(T'=L;w & L;w2=Lw) Siden T'=L;w1 ifølge (14.1) følger herav

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(16) L;w1 = L;w2. Fra den siste konjunkten i (14) har vi T≠T'. Siden T=L;w0 følger derfor i lys av (15) at (17) ¬(L;w0 = L;w2). Fra dette kan man slutte ved hjelp av Teorem 5.3.1 at ¬Ekv;R(w0,w2). Siden w2êy & w0êMax(R,y) følger herav at w0R*w2. Men da har vi , igjen ved hjelp av Teorem 5.3.1 at Enk;C(L;w0,L;w2). Men dette, (15) og (7) impliserer Enk;C(T,T'). Dette viser at (13) holder. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for at punkt(a) impliserer punkt (b).

(**B**) La oss nå vise at punkt (b) impliserer punkt (a). Anta derfor at (b) holder da finnes T der vi har:

(1.1) TêL & s(T)Ωy ≠ø

(1.2) (AT')(T'êL & s(T')Ωy≠ø & T'≠T → Enk;C(T,T'))

(1.3) s(T) Ωy Inkl x

Fra (1.1), definisjonen av L og definisjonen av s(T) kan man slutte at det finnes w1 og w2 der vi har: (2) T=L;w1 & w2ês(T)Ωy. Fra dette siste har vi:

(3) (Ew)(T=L;w & L;w=L;w2) & w2êy

Fra (2) og (3) kan man slutte (4) L;w1=L;w2 og derfor ved hjelp av Teorem 5.3.1: (5) Ekv;R(w1,w2). Anta nå for vilkårlig v at (6) vêy. Vi ønsker å vise at w2Rv. Sammen med siste konjunkt i (3) kan vi da i lys av definisjonen av Max konkludere med at w2êMax(R,y). Det er to muligheter når det gjelder v:

Tilfelle (i): Ekv;R(v,w2). Da har vi åpenbart at w2Rv

Tilfelle (ii): (7) ¬Ekv;R(v,w2) Nå har vi siden vêy ifølge (6) at vêy Inkl I. Det følger at vêI og derfor ved hjelp av L2 at L;vêL. La oss sette per definisjon: T'=L;v. Da har vi (7.1) T'êL. Vi kan ikke ha L;v=L;w1 for da følger Ekv(v,w2) ved hjelp av (4) og Teorem5.3.1. Vi har derfor (8) L;v≠L;w1 og derfor i lys av (2) og definisjonen av T' at (8.1) T'≠T. Siden vêy og s(T') = Mg(w': w'êI & (Ew)(T'=L;w & L;w=L;w') følger siden T'=L;v at (9) vêyΩs(T'). Fra (7.1), (8.1), (9) og (1.2) kan man slutte at (10) Enk;C(T,T'). Herav følger ved hjelp av (2), (4) og definisjonen av T' at Enk;C(L;w2, L;v) og derfor ved hjelp av Teorem 5.3.1 at w2R*v. Da w2Rv.

I begge tilfelle har vi w2Rv. Men v var vilkårlig element som oppfylte (6). Det følger at (Av)(vêy → w2Rv). Siden w2êy ifølge (3) kan vi derfor konkludere med at

(11) w2êMax(R,y). Fra dette følger (12) Max(R,y) ≠ø. Vi må nå vise at Max(R,y) Inkl x. Siden w2êMax(R,y) & Ekv;R(w1,w2) & T=L;w1 må man ha:

s(T) = Mg(v: Ekv;R(v,w1). Da følger s(T)Ωy = Max(R,y). Men fra dette og (1.3) følger det vi ønsker: Max(R,y) Inkl x.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

La oss avslutningsvis si noe om prinsippet:

(+) Ba(x,y) ↔ (x,yêU & ø≠ Max(R,y) & Max(R,y) Inkl x)

I teorien som vi definerte i §3 inngår ikke predikatet "Ba(x,y)", predikatet "Det er fornuftig å akseptere utsagnet x gitt at utsagnet y representerer all den evidens som er tilgjengelig", som et primitivt predikat. Vi tok i akseptanseteorien bare med det relasjonelle enkelhetspredikatet som primitivt predikat og definerte "Ba(x,y)" ved hjelp av (+). Dette var av bekvemmelighetsgrunner. Men predikatet Ba(x,y) har mening helt uavhengig av enkelhetsrelasjonen. Det er derfor naturlig å se på (+) som et genuint prinsipp. Vi har som antydet kalt dette for enkelhetsprinsippet. Det kunne også ha blitt kalt for prinsippet om indre

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

koherens, harmoni og enkelhet.[73] Det som er interessant med Teorem 5.3.2 er at det impliserer at dette prinsippet er ekvivalent med det prinsippet vi har satt i kursiv ovenfor. Dette kursiverte prinsipp synes intuitivt og heuristisk å ha større verdi enn (+) fordi man synes å ha noe klarere intuisjoner om når et totalsystem av kausallover er enklere enn et annet enn når en mulig verden har mindre grad av indre koherens , harmoni og enkelhet enn en annen mulig verden.[74]

§5.4 Eksempler på utsagn som det er rasjonelt å akseptere relativt til den evidens man har ved det nuværende tidspunkt.

Formålet med denne paragrafen er å gi en rekke eksempler på utsagn av typen Ba(x,e). Meningen er å gi konkrete eksempler på denne typen utsagn som virker rimelige og presumptivt sanne. Det bør understrekes at et utsagn av arten Ba(x,e), ie det er fornuftig å akseptere utsagnet x relativt til e, er relative utsagn. Om det er fornuftig å akseptere en påstand er det alltid relativt til et bestemt utsagn som angir alt det man kan ta for gitt. Et utsagn som " Det er fornuftig å akseptere α" er derfor ufullstendig og har strengt tatt ikke noen sannhetsverdi om man ikke føyer til et utsagn som angir eller beskriver den evidens som det er fornuftig å akseptere utsagnet α relativt til. I prinsippet kan dette være et hvilket som helst utsagn som er konsistent med det utsagnet som man ønsker å vite om det er fornuftig å akseptere eller ei. I praksis vil det imidlertid være (den uendelige) konjunksjonen av alle de utsagn som en eller annen vet er tilfelle ved det nuværende tidspunkt, t;0, som representerer den evidens vi vil ta i betraktning. Betegner vi dette utsagnet med e(t;0) vil alle de eksemplene vi gir være av formen Ba(x;i, e(t0)) for i= 1, ...,n,... .

De eksemplene vi vil gi kan inndeles i forskjellige kategorier:

Den første kategorien kunne omtales som enkle empiriske generaliseringer som man kjenner fra hverdagslivet. Dette er ikke den minst viktige kategorien. Eksempler hentet fra denne kategorien: Den påstand at dersom man koker et vanlig egg i ti til tolv minutter ved de forhold som ved det nuværende tidspunkt råder ved havoverflaten på jorden vil egget bli

73 Det må innrømmes at vi anser det siste navnet på prinsippet som mer suggestivt og mindre misvisende enn det første. Men det skulle neppe være nødvendig å starte en mer eller mindre hårkløvende diskusjon om dette.

74 Det er en tese om akseptanserelasjonen som kan formuleres innenfor rammen av vår teori som har en viss interesse. Det dreier seg om den følgende tese: (*) Ba(x,y) ↔ (x,yêU & ø≠μ(y) Inkl μ(x)). Hva denne tesen sier er, som man ser, at det er fornuftig å akseptere et utsagn relativt til y hvis og bare hvis utsagnet y er konsistent og utsagnet y impliserer x, dvs. det finnes ingen logisk mulig verden der utsagnet y er sant og utsagnet x er usant. Dette innbærer at dersom e er all den evidens som menneskeheten besitter ved det nuværende tidspunkt så er det eneste som bør aksepteres relativt til denne evidens det som logisk sett følger fra e. Enhver påstand som går utover dette, feks. en generell vitensakpelig teori kan det i såfall ikke være fornuftig å akseptere. Man kan vise at denne tesen er ekvivalent med at enkelhetsrelasjonen er identisk med IxI som naturligvis er en refleksiv og transitiv relasjon. Tesen er også ekvivalent med (Aw)(wêI → [w];R=I). Dette innebærer at enhver mulig verden er minst like enkel som enhver annen mulig verden. En annen konsekvens av denne tesen er at det ikke kan finnes noen akseptable induktive slutninger slik vi definerer dette begrep i §5.5.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

hardkokt. Man bør bemerke at dette er en generell påstand som er ment å holde ved ethvert tidspunkt i fremtiden såsant forholdene er som på jordoverflaten ved det nuværende tidspunkt. Et annet eksempel med de samme forutsetninger som i det foregående eksempelet er at dersom et egg kokes mellom fire og seks minutter vil det etter koketiden være bløtkokt. Man kan gi andre eksempler av denne art hentet fra "kjøkkenkroken". For eksempel at dersom man på en komfyr setter en stekeplate på maksimal styrke, setter en stekepanne på denne stekeplaten og dernest putter et stykke smør i stekepannen så vil smøret etter relativ kort tid smelte. La oss se på noen flere eksempler hentet fra denne kategori: Dersom en flaske fylles halvfull med vann mens flaskens bunn vender mot jordoverflaten vil inneholdet renne ut om man etter påfyllingen vender flasken slik at tuten vender mot jorden. Eller: Dersom man fyller glassflaske med vann og dernest legger den i et fryseskap hvor temperaturen holdes konstant ved ca. -10 grader Celsius vil flasken etter en viss tid sprekke. Eller: Fjell som varmes kraftig opp og dernest avkjøles brått vil ha en tendens til å sprekke. Alle disse eksemplene avspeiler velkjente kausale regelsmessigheter som nær sagt enhver person kjenner til. Det er nærliggende å si at hadde ikke en rekke slike generelle empiriske lovmessigheter av det enkleste slag vært kjent fra de tidligste tider hadde ikke menneskeheten overlevd i det hele tatt.

La oss nå se på ytterligere noen kategorier. En annen kategori er hva man kunne kalle sofistikerte empirske lovmessigher som ligger til grunn for produksjon av varer av forskjellig art. Disse har karakter av oppskrifter. Et temmelig trivielt eksempel er oppskrifter av den typen man finner i kokebøker. Oppskrifter av denne art inneholder først en liste over hvilke varer som trengs for å kunne tilvirke det ønskede produkt og hvor mye av hver vare som trengs. Dernest følger ofte en punktvis liste som angir hvilke av varene som skal blandes sammen i forskjellige kvanta, hvordan de skal blandes og hvordan de skal behandles for videre oppbevaring. Endelig følger en detaljert beskrivelse av hvordan de enkelte komponentene for eksempel skal stekes, varmes opp og bearbeides før man kommer frem til det punkt hvor man står med det ferdige produkt i hendene.

En oppskrift kan altså bringes på formen: "Hvis man suksesivt følger instruksjonene I;1, ..., I;n så vil man tilslutt sitte igjen med produktene P;1, ..., P;j (j >=1) med de og de egenskaper". La oss se på noen eksempler: Hvis man konstruerer en masovn etter de og de spesifikasjoner, fyrer opp masovnen på foreskrevet måte og fyller den, etter at den har blitt tilstrekkelig oppvarmet, med lag på lag av koks og jernmalm vil man etter hvert kunne tappe flytende støpejern fra en utgang nederst i masovnen. Denne prosedyren og beslektede prosedyrer har i århundreder blitt brukt til å produsere støpejern, smijern og forskjellige ståltyper. Eller la oss betrakte den følgende enkle oppskrift: Anta (i) at man tar to blikkbokser og fyller den ene med spik fra trerot slik at denne spiken sitter tett og fast i boksen selvom man vender den opp ned. Anta (ii) at man dernest lager en grop i jorden og setter den tomme boksen med åpningen opp i denne. Anta (iii) at man så legger en blikkplate med et passe stort hull over den nedgravde blikkboksen slik at hullet på blikkplaten er i sentrum av den tomme blikkboksen. Anta så at man (iv) plasserer boksen med spik med åpningen ned over hullet i blikkplaten og at man stabler helt tørr kjøkkenved rundt den boksen fylt med spik slik at den er omgitt av et passe stort bål. Anta (v) at man tenner på bålet og lar det brenne ned. Realiserer man betingelsene (i) - (iv) vil det etter at bålet har brent ned være rent ned endel tjære i den nederste boksen. Dette er åpenbart et eksempel på en oppskrift i den betydning vi har definert ovenfor.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Det er flere momenter ved de eksemplene på oppskrifter vi har nevnt som det er verdt å nevne. For det første er det i prinsippet alltid menneskelig mulig å følge de instruksjonene som er nevnt i oppskriften. For det andre er det rimelig å tro at oppskrifter av den typen vi har beskrevet er reliable i den forstand at om de følges nøyaktig vil resultatet alltid bli produkter med de egenskaper som nevnes i oppskriften. For det tredje er de reprodusible i den forstand at man i prinsippet kan tenke seg et hvilket som helst antall personer som uavhengig av hverandre følger oppskriften og kan sammenligne resultatene og se om de blir de samme. For det fjerde har de alle karakter av hva man kan kalle eksperimentelt prøvbare setninger, det vil si generelle setninger av formen "Hvis A så B" der A beskriver en tilstand som det er menneskelig mulig å realisere og hvor B beskriver et saksforhold som man kan kontrollere om foreligger (ved sanseiaktagelse eller på annen måte) etter at A har blitt realisert.

At oppskrifter av den typen vi har gitt eksempler på er reliable i betydningen ovenfor er strengt tatt ikke noe man vet er tilfelle. Det er logisk sett neppe noe som hindrer at de oppskrifter vi i dag bruker for å produsere stål eller glassplater ikke lenger gir dette resultat om tusen år fordi visse naturfenomener som vi i dag ikke har den ringeste anelse om inteferer i denne produksjons-prosessen. Dette kan logisk sett være mulig. Det følger fra dette at om det påstas at en oppskrift er reliabel fremsettes en påstand som strengt tatt går langt utover den evidens, alt det man vet ved det nuværende tidspunkt. I alt vesentlig fremsetter man en påstand om at en generell eksperimentelt prøvbar setning er sann til alle tider.

Når det gjelder oppskrifter i den betydning vi har forklart bør det understrekes at det finnes nær sagt uendelig mange av dem. Ta for eksempel et hvilket som helst verktøy en snekker bruker, en elektrisk batteridrevet drill, en elektrisk stikksag, et skrujern, en sirkelsag, en hammer, spikere, skruer og muttere, beslag av forskjellig art, en høvel, forskjellige typer trekitt, forskjellige typer skum som kan brukes til å fylle sprekker i dørkarmer, bor av forskjellige typer, vinkelhaker, målebånd, impregneringsmidler, plastfolie, verktøykasser, kort sagt alle de varer man kan kjøpe i et velutrustet byggevarefirma. Hver og en av disse varene, for eksempel en skrue med muttere er produsert i en eller annen fabrikk etter en eller annen komplisert oppskrift der man starter med visse råvarer og halvfabrikata samt et sett av maskiner og dernest etter visse nøyaktig foreskrevne instruksjoner masseproduserer varen. Tilsvarende for de andre varene vi har nevnt ovenfor.

Man kan mangfoldigjøre disse eksemplene på reliable oppskrifter ved å ta for seg en vare som selges på nær sagt ethvert marked og som masseproduseres industrielt. Det finnes oppskrifter på hvordan man produserer personbiler, lastebiler, traktorer, harver, såmaskiner, ploger. Videre er det ikke vanskelig å gi eksempler på oppskrifter for hvordan man kan produsere nær sagt alt fra plastgjenstander og maling til sprengstoff og tenningsmekanismer. Videre finnes reliable oppskrifter for hvordan vitenskapelig utstyr produseres, som kan dreie seg om alt fra reagensglass, kolber og bunsenbrennere til presisjonskronometere, vekter og termometere.

Vi skal omtale ytterligere en tredje kategori av påstander som det er fornuftig å akseptere relativt til den evidens vi har ved det nåværende tidspunkt. Det dreier seg i denne forbindelse om vanlig kjente naturlover. Det virker ytterst rimelig å påstå at for eksempel lovene i den geometrisk optikk bør aksepteres relativt til den evidens vi har ved det nuværende tidspunkt, i det minste om ikke lyset beveger seg over astronomiske avstander hvor det kan påvirkes av

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

meget sterke gravitasjonskrefter. Tilsvarende virker det rimelig å tro at det er fornuftig å akseptere alle de grunnleggende lovene i kjemien relativt til den evidens vi har nå. Det samme gjelder Faraday og Maxwells lover innen elektristetslæren og talløse andre lover som kan nevnes fra andre områder i fysikken. Det virker også rimelig å utstrekke disse betraktningene til Newtons lover såsant anvendelsesområdet for disse lover ikke inkluderer legemer på atomært nivå og hastigheten til legemene ikke beveger seg opp mot lyshastigheten. Med disse begrensningene virker det fornuftig å akseptere, relativt til all den evidens man er i besittelse av ved det nåværende tidspunt, at Newtons lover gjelder med stor nøyaktighet og at de også vil gjøre det i fremtiden. Det virker heller ikke som det er noe grunnlag for å tro at ikke det samme skulle gjelde Einsteins teorier og de nyeste teorier innenfor kvantemekanikken i den utstrekning konskevensene av dem er velkjent, nøye analysert og man har en virkelig god forståelse av hvordan de er relatert til alle andre relevante og velkjente fysiske teorier.

Det er også en annen type lover som bør omtales og som vi så langt ikke har omtalt, nemlig det vi kan kalle statistiske lover. Kaster man mynt og krone et stort antall ganger vil man alltid finne at antallet ganger man får mynt dividert på det totale antall ganger man har kastet er ca. 0.5, med andre ord at den relative frekvens til de tilfelle der man får mynt er 0.5. Man kan også ved et slikt eksperiment fastslå at det er umulig å se noe klart mønster når det gjelder fordelingen av mynt og krone ettersom man kaster. Det er for eksempel ikke slik at dersom man kaster mynten tusen ganger så vil man de femhundrede første gangene få krone og de fem hundre siste gangene få mynt. Ei heller er det slik at man får avvekslende mynt og krone ettersom man kaster. Det er i det hele tatt, erfaringsmessig, umulig å forutsi i hvilken rekkefølge man får mynt og krone. En spiller som satser på at han i det lange løp vil få mynt etter at de fire foregående kast har gitt krone som resultat, vil ikke ha noe å vinne på dette. Med andre ord finnes det ingen gevinststrategi i forbindelse med et slikt stokastisk eksperiment[75]. Man kan nevne en lang rekke eksempler av lignende art i forbindelse med

75 Man kan si at et stokastisk eksperiment er et eksperiment som er karakterisert ved tre egenskaper: For det første kan man gjenta det så mange ganger man vil. For det andre vil utfallet av eksperimentet alltid falle i nøyaktig en av et endelig (eller uendlig) antall disjunkte klasser som samlet omfatter alle de mulige utfall som eksperimentet kan ha. For det tredje er det slik at det er umulig å forutse hvilket utfall eksperimentet vil ha.

Man kan nå for eksempel tenke seg at et slikt eksperiment, hvor det bare er tre mulige utfall a,b og c, har blitt utført tusen ganger og at i disse tusen tilfellene har den relative frekvens av utfallene a,b og c vært omtrent en tredjedel på hver. Hvis man nå gjentar dette eksperimentet ytterligere en totusen ganger og får den samme fordeling, vil dette bekrefte den generelle stokastiske (statistiske) lov som sier at man alltid vil få omtrent denne fordelingen dersom man gjentar eksperimentet et tilstrekkelig stort antall ganger.

Det er ikke helt lett å gi noen fullstendig presis definisjon av statistisk lov, men det kan være av interesse å gi en mer generell tentativ definisjon. Man kunne si at et triple <E, <u;k>/kên/, ψ> representerer en statistisk lov hvis og bare hvis det oppfyller de følgende krav: (i) E er en egenskap.
(ii) De diverse <u;k>/kên/ er en samling av n egenskaper som er innbyrdes disjunkte og samlet uttømmende, dvs. at ethvert objekt logisk sett bare kan ha en og bare en egenskap i samlingen.
(iii) ψ: {u;1, ... u;n} → [0,1] der man har at Sum/i,1,n/(ψ(u;i)) =1 (iv) Gitt at et objekt har egenskapen E er det helt umulig å si noe på forhånd om hvilke av egenskapene u;1, ... ,u;n det har.
(v) Om x;i er en uendelig sekvens av objekter og vi har E(x;i) for alle i har man at
(+) Lim/n →inf/ (Cd({x;1,...,x;n}ΩMg(x:u;k(x)))/n) = ψ(u;k)

Sammenligner man en statistisk lov <E, <u;k>/kên/, ψ> med et stokastisk eksperiment kan man si at egenskapen E tilsvarer det stokastiske eksperimentet. De diverse egenskapene <u;k>/kên/ svarer til de mulige utfallene i det stokastiske eksperimentet. Kravet (iv) i definisjonen vi har gitt svarer til uforutsigbarheten til de mulige utfallene ved et stokastisk eksperiment.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

terninger, lykkehjul, kortstokker, tombola, loddtrekning, krukker med fargede kuler etc.

For de fenomener vi nettopp har nevnt kan man nevne tilsvarende statistiske lover. Men man kan også nevne andre eksempler som ikke er hentet fra lykkespillenes område. At det alltid vil fødes omtrent like mange gutter som jenter hvis man tar for seg tilstrekkelig store fødselskull har åpenbart karakter av å være en statistisk lov. Av samme kategori er den påstand at dersom man måler høyden til alle gutter som er født i samme år vil utvalget, dersom det er tilstrekkelig stort, være normalfordelt. Videre kan man nevne statistiske lovmessigheter i forbindelse med levetiden til lyspærer som er fabrikert på nøyaktig samme måte.

Vi har ovenfor nevnt en lang rekke prosedyrer eller oppskrifter på hvordan ting kan produseres og understreket at det er fornuftig å akseptere at disse oppskriftene, om de følges, alltid vil gi det samme resultat. Med andre ord representerer disse oppskriftene empiriske lovmessigheter som det er fornuftig å akseptere på bakgrunn av den evidens vi har i dag (dvs. ved det nuværende tidspunkt.)

Disse empiriske lovmessighetene, fra de mest elementære, trivielle og hverdagslige til de mest sofistikerte som ligger til grunn når det gjelder for eksempel konstruksjon av avanserte måleinstrumenter, utgjør det man kunne kalle summen av alle de teknologiske innsikter som man besitter i dag. Man kunne også kalle dette for den teknologiske kunnskap vi er i besittelse av (nå.)

Denne teknologiske viten utgjør et nødvendig grunnlag for våre handlinger og også vår mulighet for å planlegge. Uten å overdrive kan man si at den utgjør selve grunnlaget for vår sivilisasjon. Tenker man seg denne kunnskap vekk tenker man seg et menneske som lever på samme nivå som i steinalderen.

Det kan være vel verdt å reflektere over at den teknologiske viten er en form for kunnskap som utvikler seg kumulativt. De teknikker for produksjon av - la oss si hus - som man bruker i dag er forbedringer av de teknikker som man brukte for hundre år siden. De teknikker som man bruker for sementproduksjon nå er forbedringer av dem man brukte for år tilbake. På nær sagt hvilket som helst område av vareproduksjonen i et samfunn er teknikkene forandret og forbedret. Det er *nødvendig* at dersom en forbedring gjøres tas den i bruk. For ingen som bruker en bestemt oppskrift for å produsere en type gjenstander vil finne på å bruke en annen og ny oppskrift som er mer kostbar, mer tungvint og som gir et dårligere resultat.

Man kan også si at de praktisk pregede empiriske lovmessighetene som vi har nevnt, og som vi har kalt for den teknologiske kunnskap vi har, utgjør en nødvendig betingelse for den rent teoretiske og generelle kunnskap som man har i vitenskapene, dvs. resulatene av såkalt "grunnforskning". Det ville trolig ha vært en lang rekke teorier i, la oss si, fysikken som ville ha hengt mer eller mindre i løse luften dersom man ikke hadde hatt den

Det kan være passende å gi et eksempel på en statistisk lov <E, <u;k>/kên/, ψ>. La E være egenskapen å være et ordnet par <y,t> som er slik at y er et kronestykke som kastes opp i luften og som ved tidspunktet t ligger på marken med enten mynt- eller kronesiden opp. La u;1 være egenskapen å være et ordnet par <y,t> der y er et kronestykke som ligger med myntsiden opp ved t. La u;2 være egenskapen å være et ordnet par <y,t> der y er et kronestykke som ligger med kronesiden opp ved t. La tilslutt ψ være funksjonen som tilordner egenskapen u;1 verdien 1/2 og egenskapen u;2 verdien 1/2. Det virker da rimelig å si at triplet <E, <u;k>/kê{1,2}/, ψ> oppfyller de krav vi har nevnt ovenfor til en statistisk lov.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

teknologiske viten som skulle til for å bygge og produsere den apparatur som skal til for å kunne utføre de eksperimenter som eventuelt kunne bekrefte eller avkrefte disse teorier. Man kunne for eksempel neppe fått bekreftet teorien om svarte hull om man ikke hadde kunnet bygge avanserte teleskoper. Og man kunne neppe ha bygget disse teleskoper om man ikke hadde visst hvordan man slipte linser, produserte hulspeil, og allerede på forhånd hadde en uhyre avansert teknologisk kunnskap. Det er riktig at avansert teoretisk forskning kan lede til at man oppdager helt nye empiriske lovmessigheter som var helt ukjente før. (Man kan tenke på alt fra TV-apparater til mobiltelefoner.) Men det er trolig også riktig å si at denne forskningen ikke hadde blitt lovprist i samme grad om den ikke hadde ledet til noen som helst praktiske resultater.[76]

La oss nå oppsummere det vi har gjort i denne paragrafen. Vi har i all hovedsak hatt til hensikt å gi eksempler på utsagn som det er fornuftig å akseptere relativt til den evidens vi har ved det nuværende tidspunkt. Lar vi e betegne det utsagn som representerer all den evidens vi har nå, kan man si at vi har gitt en rekke eksempler på presumptivt sanne setninger av typen Ba(x,e). Av utsagn vi har nevnt som kan erstatte x er empiriske lover av forskjellig art. Vi har nevnt eksempler som strekker seg fra enkle lovmessigheter som enhver baserer seg på i hverdagslivet til teknologisk avanserte lovmessigheter som ligger bak produksjonen av avanserte vitenskapelige instrumenter. Gitt den evidens vi har er det fullkomment irrasjonellt å benekte at disse lovmessighetene gjelder ved ethvert tidspunkt og uansett hvor man befinner seg i universet såsant forholdene der er som forholdene på jordkloden ved det nuværende tidspunkt. Relativt til den evidens vi faktisk har bør disse utsagnene oppfattes som sikre, og derfor, om de kan tilskrives noen sannsynlighet, tilskrives en sannsynlighet lik 1.

§5.5 Induktive slutninger

Det finnes en lang rekke slutningstyper som det er nærliggende å kalle for induktive. Vi skal ikke forsøke å gi noen uttømmende klassifikasjon av dem, men skal innskrenke oss til å nevne noen typer. En vanlig type er når man fra et endelig antall observasjoner av en regelmessighet slutter at regelmessigheten holder allment, dvs. holder ved ethvert tidspunkt og uansett hvor man befinner seg i universet. Man slutter altså fra det at endelig antall instanser av en generell setning av allmen lovkarakter holder til det at selve den generelle setningen holder. Man har for eksempel i et stort antall tilfelle iaktatt at smeltepunktet for bly er 327.5 grader celsius og slutter herav at bly uansett hvor man befinner seg og uansett tid smelter om det varmes opp til denne temperaturen. Man kan gi tilsvarende eksempler for kvikksølv eller titanium (som smelter ved 1668 grader celsius). Induktive slutninger av denne type kunne man kalle for induktive generaliseringer. En annen type slutninger, som også kan regnes som induktive generaliseringer, er når man slutter fra det at noen elementer i en bestemt klasse har en bestemt egenskap til at alle elementene i klassen har egenskapen. Man har for eksempel valgt ut vilkårlig 5000 av norske stemmeberettigede borgere og funnet ut at av disse stemmer 10 prosent på partiet X. Fra dette slutter man så at av alle norske stemmeberettigede borgere vil

76 Dette innebærer ikke at all teori som ikke kan etterprøves empirisk ikke fortjener respekt. Matematikkens og logikkens teorier er selvfølgelig ikke prøvbare. Men de gir en likevel kunnskap om virkeligheten. Man kunne si at de bestemmer virkelighetens struktur og også indirekte bidrar til å definere hva som menes med fornuft og fornuftig tenkning.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

omtrent 10 prosent stemme på partiet X. Også dette kan oppfattes som en induktiv generalisering.

Nok en type av induktive slutninger er såkalte analogislutninger: Man har observert at alle de elementer man har undersøkt i en klasse X har egenskapen Y. Nå står man ovenfor en annen distinkt klasse med objekter X' der alle elementene har sterke likhetstrekk med dem i klassen X og man slutter herav at alle objektene i X' også har egenskapen Y, eller en egenskap Y' som ligner svært på egenskapen Y.

Man kan også si at alle slutninger fra fenomener man har iaktatt nå til fenomener som finner sted i fremtiden eller til fenomener man ikke har iaktatt i fortiden også er av en induktiv natur.

Så meget om typer av induktive slutninger og eksempler på slike slutninger. Det kan være hensiktsmessig å gi en noe mer presis og generell definisjon av hva som her vil forstås med en induktiv slutning med utgangspunkt i de eksemplene vi har antydet. Hvis man nå vil karakterisere begrepet induktiv slutning nærmere synes det for det første nærliggende å peke på det trivielle faktum at en induktiv slutning alltid har visse premisser og en konklusjon. Videre virker det opplagt at premissene og konklusjonen i en induktiv slutning må være deskriptive utsagn. Dessuten skulle det være klart fra de eksemplene vi har gitt at premissene i en induktiv slutning ikke logisk sett impliserer konklusjonen og at det er rimelig å se på dette som et definistorisk trekk ved induktive slutninger. Endelig virker det nærliggende å kreve av en induktiv slutning at konklusjonen er konsistent med premissene. I motsatt fall vil premissene logisk sett implisere implisere negasjonen av konklusjonen. Tilslutt virker det rimelig å kreve at premissene i en induktiv slutning utgjør et konsistent utsagnssett. Ser man på de eksemplene vi har gitt oppfyller de alle dette krav om konsistens.

Gitt disse overveielsene virker det nærliggende å definere en induktiv slutning som et ordnet par $<\Delta,x>$ der Δ er en ikke-tom konsistent mengde med utsagn og x er et utsagn og der dette paret oppfyller de følgende to krav: (a) Det finnes en logisk mulig verden der alle utsagnene i Δ er sanne og hvor utsagnet x er usant og (b) det finnes en mulig verden der alle utsagnene i Δ er sanne og hvor også utsagnet x er sant. Denne definisjonen kan naturligvis formaliseres fullstendig innenfor rammen av den fulle teorien om akseptanse og sannsynlighet.[77]

Det følger fra denne definisjonen at konjunksjonen av premissene i en induktiv slutning aldri logisk sett impliserer konklusjonen. En induktiv slutning er derfor ingen deduktiv slutning om man med en deduktiv slutning mener et ordnet par $<\Delta,x>$ der Δ er en konsistent ikke-tom mengde med utsagn, x et utsagn og det ikke finnes noen verden der alle utsagnene i Δ er sanne og utsagnet x usant.

Det kondisjonalutsagn som har konjunksjonen av premissene i en induktiv slutning $<\Delta,x>$ som antesedent og konklusjonen som konsekvent er, om vi holder oss til den definisjonen vi har innført, alltid et kontingent utsagn. Det kan aldri være et logisk nødvendig utsagn. En induktiv slutning kan derfor aldri være konklusjonen i en resonnementskjede der alle slutningene er logisk gyldige og hvor de dypeste premissene er nødvedig sanne utsagn. Det finnes derfor ingen rent logisk rettferdigjørelse av induktive slutninger. De kan av denne grunn ikke utledes fra rent logiske og matematiske prinsipper alene.

I lys av det som er sagt ovenfor er det nærliggende å inndele slutninger, ie. par av typen $<\Delta,x>$ der Δ er en ikke-tom konsistent mengde av utsagn og x et utsagn, i tre disjunkte

77 Definisjonen kan formaliseres slik: $<\Delta,x>$ er en induktiv slutning hvis og bare hvis $\emptyset\neq\Delta$ Inkl Pt(I) & $x\hat{e}Pt(I)$ & $\mu(SNu(\Delta))\neq\emptyset$ & $\mu(SNu(\Delta))\Omega\ \mu(x)\neq\emptyset$ & $\mu(SNu(\Delta))\Omega\ \mu(Neg(x))\neq\emptyset$

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

hovedklasser. For det første har vi de *inkonsistente* slutningene. Det er de slutningene <Δ,x> der ΔU{x} utgjør en inkonsistent utsagnsmengde. På den annen side har vi de *konsistente* slutninger. Det er de slutningene der ΔU{x} utgjør en konsistent utsagnsmengde. Innenfor de konsistente slutningene har vi så de deduktive slutningene der x er logisk sett implisert av utsagnene i Δ og de ikke-deduktive slutningene hvor x ikke er implisert av utsagnene i Δ. Denne siste klassen av slutninger er nøyaktig de induktive slutningene. Det følger at en slutning altså nødvendig vis faller i en og bare en av de følgende klasser: Enten dreier det seg om en inkonsistent slutning eller så dreier det seg om enten en deduktiv eller en induktiv slutning. Innenfor klassen av induktive slutninger virker det imidlertid rimelig å sondre mellom de slutninger som virker fornuftige og har en viss plausibilitet fra dem som åpenbart virker besynderlige og urimelige. For eksempel virker det rimelig å slutte fra all den evidens vi har ved det nuværende tidspunkt at det holder generelt at egg som legges i kokende vann i ti minutter blir hardkokte, mens det virker besynderlig på basis av denne evidens å hevde at dette vil holde i hundre år til, men etter denne tid vil det ta tyve minutter før et egg blir hårdkokt. Likeledes virker det besynderlig om man på grunnlag av den evidens vi har nå, som viser at ethvert menneske som er født nå eller før dette dette tidspunkt enten er død eller vil være død før år 2400, trekker den slutning at ethvert menneske vil være død før 2400.

I lys av disse overveielsene virker det rimelig å tro at klassen av induktive slutninger i seg selv kan deles inn to disjunkte delmengder, nemlig de induktive slutninger som er akseptable og de som ikke er det. Det synes derfor rimelig å hevde at det tradisjonelle induksjonsproblem består i (a) å angi et rimelig kriterium for hvordan man kan skille mellom disse to slutningstypene og (b) hvordan man kan begrunne et slikt kriterium. La oss nå gå over til noen betraktninger over hvordan den fulle teorien om akseptanse og sannsynlighet kan kaste noe lys over dette tradisjonelle induksjonsproblem.

Det er intet som forhindrer en fra å betrakte alle de induktive slutninger <Δ,x> der vi har at utsagnet x beskriver et forhold det er fornuftig å akseptere gitt at snittet av utsagnene i Δ representerer all den evidens vi har. Med andre ord kan man betrakte alle de induktive slutningene <Δ,x> som er slik at Ba(x, SNu(Δ)). Siden vi allerede har utformet en teori om akseptanse, mer presist om akseptanserelasjonen Ba, kan det umulig være forbudt å betrakte mengden av alle de induktive slutningene som oppfyller dette kravet. Heller ikke kan det være forbudt å gi denne mengden av induktive slutninger et navn.Vi skal kalle denne mengden av induktive slutninger for "rasjonelt akseptable induktive slutninger" eller kortere "akseptable induktive slutninger".

På samme måte som man i akseptanseteorien, ie. E1 - E3 supplert med vår definisjon av Ba og de andre definisjonene vi har nevnt kan utlede en rekke setninger om hvilke utsagn det er fornuftig å akseptere relativt til et utsagn y gitt andre påstander om hva som er fornuftig å akseptere relativt til y kan man på samme måte, gitt vår definisjon av akseptabel induktiv slutning utlede en rekke satser (av mer eller mindre interessant karakter) om hvilke induktive slutninger som er akseptable gitt at andre er det. Dette innebærer at for visse induktive slutninger kan man på rent deduktivt vis vise at de er akseptable ved rent logisk å utlede dem fra andre akseptable slutninger. Vet man for eksempel at <Δ,x1>, <Δ,x2> og <Δ, x1 Ω x2> er induktive slutninger (i vår betydning) og vet man at de to første er akseptable følger det på basis av aksiomene i akseptanse teorien at også den siste induktive slutningen er akseptabel. Dette innebærer at akseptabiliteten til noen induktive slutninger kan tilbakeføres til andre. Men en slik tilbakeføringsprosess kan ikke i praksis skje i det uendelige. Før eller senere må

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

man stanse opp ved noen induktive slutninger viss akseptabilitet bare kan innses mer eller mindre direkte ved at man omhyggelig reflekterer over hva premissene og konklusjonen i slutningen faktisk sier og ved at man reflekterer over betydningen til ordet "fornuftig". Det vil si at man reflekterer nærmere over betydningen til konstruksjonen "Det er fornuftig å akseptere at α gitt at β representerer all forliggende evidens" eller til det tilsvarende predikatet "x er et utsagn som det er fonuftig å akseptere gitt at y representerer all tilgjengelig evidens". Som alle andre mer eller mindre vanlig brukte ord har dette uttrykket en mening og enhver som har lært å bruke dette ordet på vanlig måte innser umiddelbart at visse setninger som inneholder det er rimelige og andre ytterst urimelige.

Vi har forsøkt å illustrere dette ved at vi i forrige paragraf har gitt en rekke eksempler på generelle empiriske regelmessigheter som det nokså åpenbart er fornuftig å akseptere gitt all den evidens menneskeheten er i besittelse av ved det nuværende tidspunkt og vi har i en viss utstrekning forsøkt å illustrere (eller i det minste innprente) for leseren det absurde i å benekte at det er fornuftig å akseptere disse *relativt til den nåværende evidens*.[78]

Like lite som en matematisk sannhet kan bekreftes eller falsifiseres ved empiriske undersøkelser eller eksperimenter, kan en påstand av typen Ba(x,y) bekreftes, svekkes eller vises å være usann på basis av empiriske undersøkelser. Hvis en slik setning er sann er den nødvendig sann og siden det åpenbart ikke kan dreie seg om noen analytisk setning må det dreie seg om en syntetisk apriori sannhet. Et utsagn av typen Ba(x,y) som er sant er derfor ikke noen empirisk hypotese, tentativ gjetning eller kontingent sannhet. Den representerer snarere en standard ved hjelp av hvilken vi kan skille mellom sunn fornuft og galskap. Det følger fra dette at mengden av alle akseptable induktive slutninger utgjør et system av apriori syntetiske sannheter.

La oss nå gå tilbake til det vi ovenfor kalte det tradisjonelle induksjonsproblem. Når det gjelder den reviderte teorien om akseptanse og induksjon kan man i denne teorien utlede to kriterier for når en induktiv slutning er rasjonelt akseptabel. Det ene kriteriet er at en induktiv slutning er akseptabel hvis og bare hvis mengden av de enkleste verdnene som inngår i sannhetsmengden til konjunksjonen av premissene i slutningen er ikke-tom og denne mengden av verdener er inkludert i sannhetsmengden til konklusjonen i slutningen. Dette er bare en variant av det prinsippet som vi i §5.3 kalte for *prinsippet om indre koherens, harmoni og enkelhet*. Det andre kriteriet sier at en induktiv slutning er akseptabel hvis og bare hvis det finnes et enkleste totalsystem av kausallover som er forenelig med alle premissene i slutningen og konklusjonen i slutningen er logisk sett implisert av konjunksjonen av premissene og dette enkleste totale sett av kausallover. Dette gir en svar på det første av de to spørsmålene vi nevnte i forbindelse med det tradisjonelle induksjonsproblem. Det andre spørsmålet er hvordan man kan begrunne de kriteriene vi har gitt. Hvis man her med en begrunnelse mener et strengt ikke-trivielt bevis for at disse kriteriene holder der bevisets premisser er selvinnlysende sannheter, må det innrømmes at vi i det minste ikke har lykkes i å fremvise noe slikt bevis. Det som imidlertid kan nevnes er det vi omtalte i §5.3. Det er faktisk mulig å fjerne enkelhetspredikatet fra den fulle teorien om akseptanse og sannsynlighet og erstatte det med predikatet "Ba(x,y)". Dette predikatet blir da et primitivt predikat i teorien. Definerer vi så B ved å sette B= Mg(<x,y>: Ba(x,y)) og legger til som nye aksiomer, for det

78 Det hører med til menneskets livsvilkår på denne kloden at det handler under en kronisk uvisshet. Hva som det er fornuftig å akseptere om hundre år kan man derfor ikke vite på det nuværende tidspunkt. Men relativt til det vi nå vet er det åpenbart absurd å hevde at jordens gravitasjonsfelt vil være helt annerledes imorgen klokken tolv.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

første at Ba(x,y) → x,yêU, og for det andre at <I,B> er en akseptansestruktur i den betydning som er definert i i §5 i Rognes[7], kan man definere predikatet "Enk(w,w') ved hjelp av "Ba(x,y)". I denne teorien kan man så ved ikke-trivielle beviskjeder vise, ikke bare at enkelhetsrelasjonen er en preordning, men også at prinsippet om indre koherens, harmoni og enkelhet holder. Hvis man ikke legger stiller altfor strenge krav til deduktiv begrunnelse, for eksempel krever at de grunnsetningene man tar sitt utgangspunkt i skal være fullkomment selvinnlysende, kan dette passere som en dedutiv begrunnelse for de to kriteriene vi har nevnt ovenfor.

I forbindelse med det vi ovenfor kalte det tradisjonelle induksjonsproblemet kan man stille det følgende spørsmål, som det ikke er helt søkt å kalle en variant av "induksjonsproblemet":

Kan en påstand om at en universell eksplanatorisk teori er sann bli rettferdiggjort på empirsk grunnlag, det vil si ved å anta sannheten til visse observasjonsutsagn?

Hvis "rettferdigjøre" her betyr "bevise ut fra et sett av rent logiske og matematiske sannheter" er svaret ganske åpenbart benektende. Det er dessuten vanskelig å se at noen annen tolkning av "rettferdiggjøre" er rimelig i denne sammenheng. Dette forhindrer imidlertid ikke at det er umulig å begrunne at det er fornuftig å akseptere at en universell påstand er sann relativt til en mengde av observasjonsutsagn, for eksempel mengden av alle de observasjonsutsagn som man kjenner til på det nuværende tidspunkt. At overgangen fra premisser til konklusjon i en induktiv slutning ikke er logisk nødvendig innebærer ikke, som vi har understreket ovenfor, at det ikke kan være fornuftig å akseptere konklusjonen gitt at konjunksjonen av premissene representerer all den evidens vi kan ta for gitt.[79]

79 Popper er opptatt av gjendrivelsen av teorier og den kritiske testing av dem. (Det bør nevnes at det har alle vitenskapsmenn vært opptatt av og tillagt stor vekt lenge før Popper.) To teorier som gir forskjellige forutsigelser kan imidlertid være like strengt testet ved et gitt tidspunkt og det kan være like lett å falsifisere den ene som den andre. Dette gjelder egentlig for et overtellbart antall teorier. Spørsmålet er da hvilke av alle disse strengt testete teoriene man bør velge. I denne forbindelse kan man trekke frem eksemplene ovenfor, nemlig H1 som er en generell universell empirisk prøvbar teori, og alle teoriene av typen H2(t) der t er et tidspunkt som kommer etter det nuværende tidspunkt. De siste er ikke mindre generelle. Hvis man tenker seg at H1 blir testet strengt i ti år fremover i tid frem til tidspunktet t0 og har overlevd inntil da vil også enhver hypotese av typen H2(t) der t > t0 være like strengt testet og ha overlevd i like stor grad som H1. Man kan derfor ikke ved streng testing si noe om hvilke av teoriene H1 og og de uendelig mange teoriene av typen H2(t) der t > t0 som det er fornuftig å ha tillitt til. Utelukker man de diverse H2(t) må det derfor være av rent apriori grunner. Det kan heller ikke være noen grunn til å anse at noen av hypotesene H2(t) skulle ha noen mindre grad av falsifiserbarhet enn H1. Men siden det virker direkte evident at det er fornuftig å akseptere H1 relativt til all den evidens vi har ved det nuværende tidspunkt, mens det åpenbart ikke er fornuftig å akseptere noen av H2(t) der t>t0 hvis ordet "fornuft" og "fornuftig" skal ha sin normale mening følger det at Popper ikke har noe å noe å bidra med når det gjelder spørsmålet om hvilke teorier - av alle dem som har overlevd streng testing - og som man skjønner vil dette være uendelig mange - som man bør fatte tillitt til og som det er fornuftig å bruke tid på å undersøke videre. Det er dette som med rette kan kalles induksjonsproblemet. Popper har derfor ikke ydet en unse til løsningen av dette problem. Dette bekreftes ved lesningen av Popper [1], kapittel 1, se spesielt §12 i dette kapitlet. Det bør også noteres at Popper i dette kapitlet ikke på noe punkt kan sies å ha argumentert eksplisitt i mot det vi ovenfor har kalt enkelhetsprinsippet, som er den påstand at det som følger fra den evidens vi har nå sammen med det enkleste totale system av kausallover som er forenelig med denne evidens er det som er fornuftig å akseptere relativt til denne evidens. Men dette prinsipp legger et meget sterkt krav på alle de uendelig mange strengt testete teoriene som er kompatible med den evidens vi har og gjør det nesten entydig hvilke

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

I forbindelse med akseptanserelasjonen Ba er det nødvendig å understreke endel forhold. La oss tenke oss at utsagnet e representerer all den evidens man har ved det nåværende tidspunkt t. (e kan oppfattes som konjunksjonen av alle de empiriske data man har ved dette tidspunkt t.) Anta videre at e' er all den evidens man har ved tidspunktet t' der t' er et tidspunkt som kommer etter t. Det som er viktig å understreke er da dette: Selvom det kan være fornuftig å akseptere et utsagn eller en teori x relativt til e kan man ikke fra dette slutte at det nødvendigvis er fornuftig å akseptere x relativt til e', den evidens man har ved t'. Det er alltid logisk mulig at den evidens man har ved et senere tidspunkt inneholder data som logisk sett er uforenelig med utsagnet eller teorien x. I så fall har man selvfølgelig ¬ Ba(x,e'). I noen tilfelle kan det også være at man har Ba(Neg(x), e'). Eksempelvis er det logisk mulig at det kan være fornuftig å akseptere Einsteins generelle relativitetsteori gitt alt det vi vet i dag, altså relativt til e, mens det ikke behøver å være fornuftig å akseptere at denne teori holder relativt til all den evidens man har om hundre år, dvs. e'. Og dette kan logisk sett være tilfelle selvom all den evidens man har om hundre år inkluderer all den evidens vi har nå, ie. om e' Inkl e.

I denne forbindelse er det verdt å understreke at man ikke fra det at en påstand av typen Ba(x,y) holder og det at utsagnet y er sant kan slutte at utsagnet x er sant. At utsagnet y er sant innebærer ikke noe annet enn at den virkelige verden er med i sannhetsmengden til y. Men at Ba(x,y) holder innbærer bare at det blandt alle de verdener der y er sann finnes noen enkleste, og at utsagnet x er sant i alle disse. Men den virkelige verden kan være langt mer komplisert enn de enkleste verdenene i y og det er intet som tilsier at selvom sannhetsmengden til utsagnet x omfatter de enkleste verdenene i y må den også omfatte den virkelige verden.

Et annet forhold som det kan være verdt å merke seg er dette: Hvis det er fornuftig å akseptere et utsagn x relativt til e, men ikke fornuftig å akseptere x relativt til e', der e' er den evidens man har ved et senere tidspunkt, og det dessuten er slik at e' impliserer e og det finnes utsagn som det er fornuftig å akseptere relativt til e', så kan man konkludere med at negasjonen av utsagn e' er et som bør aksepteres relativt til e. Man kan formulere dette som et teorem og gi et bevis for det innenfor rammen av den fulle teorien om akseptanse og sannsynlighet. Teoremet kan formuleres slik:

Teorem 5.5.1 Anta x,e og e' er utsagn. Anta videre at
(i) Ba(x,e) & ¬Ba(x,e').
(ii) e' Inkl e & (Ez)Ba(z,e').
Gitt disse forutsetningene har man: Ba(Neg(e'), e)

Bevis: Fra forutsetning (i) og definisjonen av Ba kan man slutte (1) ø≠ Max(R,e) Inkl x. Fra den andre konjunkten i (i) kan man slutte: (2) ¬(ø≠ Max(R,e') & Max(R,e') Inkl x). Den andre konjunkten i forutsetning (ii) impliserer (3) ø ≠ Max(R,e'). Fra (2) og (3) følger: (4) ¬ (Max(R,e') Inkl x). Dette impliserer at det finnes det finnes en mulig verden w0 der w0êI og der vi har (5) w0êMax(R,e') & ¬(w0êx). Fra (5), definisjonen av Max og den første konjunkten i forutsetning (ii) kan man utlede: (6) w0êe. Men da kan vi ikke ha at

av disse man bør velge. Det gir en derfor et kriterium som kan brukes til å begrunne påstander om hva det er fornuftig å akseptere av teorier som går utover den evidens man har. Det er i dette prinsipp man bør se en mulig løsning på induksjonsproblemet, ikke i Poppers skrifter.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

w0êMax(R,e) for da ville vi i lys av (1) ha at w0êx som strider mot (5). Det følger at vi derfor må ha: (7) ¬(w0 ê Max(R,e)). Anta nå for reduktio at det fantes w' der
w'êMax(R,e') Ω Max(R,e). Siden w0êMax(R,e') følger da at Ekv;R(w'w0). Men fra dette det at w'êMax(R,e) og det at w0êe følger w0êMax(R,e) som strider mot (7). Derfor:

(8) Max(R,e')Ω Max(R,e) =ø

Det vi nå ønsker å vise er at (9) e'Ω Max(R,e) =ø. Anta derfor for reduktio ad absurdum at det finnes w1 der vi har w1êe' & w1êMax(R,e). Da har vi enten w1êMax(R,e'), men dette er umulig i lys av (8). Eller så har vi ¬w1êMax(R,e') og derfor w1ê (e' - Max(R,e')). Men da har vi i lys av (5) at w0R*w1. Men da kan ikke w1êMax(R,e) i lys av (7). Vi får altså en motsigelse i begge tilfelle. Det følger at (9) holder og derfor at Max(R,e) Inkl Neg(e'). Men dette, (1) og definisjonen av Ba impliserer Ba(Neg(e'),e). **QED**.

§5.6 Ytterligere kommentarer til de sannsynlighetsteoretiske aksiomene

Hensikten med dette avsnittet er å avklare noe mer visse aspekter ved de sannsynlighets-teoretiske aksiomene som inngår i vår teori. Som man husker dreier det seg om aksiomene D1 - D8, F1 - F5, samt gruppen av aksiomer M1 - M3 som vi kalte for de multiplikative aksiomene. Som vi har nevnt tidligere inngår ikke enkelhetspredikatet i noen av aksiomene D1 - D8 og M1 -M3 når disse ekspanderes slik at de bare inneholder primitiv notasjon. Hvis man derfor begrenser språket til vår teori slik at det bare inneholder de mengdeteoretiske predikatene, predikatet "x er en mulig verden" samt det sannsynlighetspredikatet og dermed fjerner alle aksiomene som inneholder enkelhetspredikatet sitter man tilbake med aksiomene W1,W2 og D1 - D8 samt M1 - M3. Dette utgjør da en teori om den relative sannsynlighetsfunksjonen C. Det kan være hensiktsmessig å ha et navn på akkurat denne teorien . Vi skal kalle den for den begrensede teorien om relativ sannsynlighet. Vi skal kommentere visse trekk ved denne teorien før vi går videre.

For det første bør det bemerkes at denne teorien i en viss forstand er ganske svak. Ser man på aksiomene D1 - D8 og M1 - M3 ser man at de alle kan bringes på formen <x,y>êDom(C) → β(x,y). Det følger derfor at dersom det ikke finnes utsagnspar <x,y> der x kan tilskrives en viss sannsynlighet relativt til y så vil alle aksiomene være (tomt) sanne. Dette innebærer at det er meget lett å vise at den begrensede teorien om sannsynlighet er konsistent relativt til ZFC;u(L;e) (og derfor til ZFC).

Det andre temaet vi ønsker å ta opp i forbindelse med denne begrensede teori om relativ sannsynlighet er dette. Vi ønsker å sammenligne den med en noe sterkere teori og si noen ord om denne. Denne sterkere teorien får vi når vi legger til de følgende to grunnsetninger som nye ikke-logiske aksiomer:

A1 (Ey)(<y,I>êDom(C))
A2 <x,y>êDom(C) → <x,I>,<y,I>êDom(C) & C(y,I) >0

Den første av disse grunnsetningene sier at det finnes et utsagn som kan tilskrives en sannsynlighet relativt I, dvs. det nødvendig sanne utsagn. Det andre aksiomet uttrykker at et

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

utsagn x kan tilskrives en sannsynlighet relativt til utsagnet y bare hvis utsagnene x og y kan tilskrives en sannsynlighet relativt til det nødvendig sanne utsagn og sannsynligheten til utsagnet y relativt til det nødvendig sanne utsagn er større enn 0. Begge disse setningene er alt annet enn opplagte og bør derfor betraktes med en sunn porsjon skepsis.

Imidlertid har denne teorien som består av aksiomene i den begrensede teorien om relativ sannsynlighet utvidet med A1 og A2 visse interessante konskvenser som vi finner det rimelig å gjøre oppmerksom på.

Anta <I,σ,p> er et sannsynlighetsrom over I[80]. Definer en funksjonen C ved:

(1) $C= Mg(<<x,y>,r>: r\hat{e}Reell \ \& \ x,y\hat{e}\sigma \ \& \ p(x\Omega y)/p(y) =r \ \& \ p(y)>0)$

Definerer man C på denne måten kan man vise at C oppfyller alle aksiomene D1 - D8 og M1 - M3 samt A1 og A2 ovenfor. Vi skal imidlertid ikke gi noe detaljert bevis for dette her.[81]

Anta på den annen side at vi innenfor rammen av den begrensede teorien om sannsynlighet utvidet med A1 og A2 definerer σ;I og p;I på følgende måte:

(2.1) $\sigma;I = Mg(x: x\hat{e}U \ \& \ <x, I>\hat{e}Dom(C))$
(2.2) $p;I = \lambda/x\hat{e}U/(C(x,I))$

Det man da kan vise er at <I,σ;I,p;I> er et sannsynlighetsrom over I. Definerer man nå videre C* ved hjelp av p;I og σ;I i analogi med (1) ,med andre ord ved:

(3) $C^*= Mg(<<x,y>,r>: r\hat{e}Reell \ \& \ x,y\hat{e}\sigma;I \ \& \ p;I(x\Omega y)/p;I(y) =r \ \& \ p;I(y)>0)$

så kan man vise at C* = C. Hva alt dette innebærer er at man kan reaksiomatisere den begrensede teorien om relativ sannsynlighet utvidet med A1 og A2 på en ganske slående måte.

La oss bruke "SRom(s,X)" som forkortelse for "s er et sannsynlighetsrom over mengden X". Da har vi om SRom(s,X) at s=<X,σ,p> for en eller annen naturlig boolsk algebra σ over X og p er en eller annen sannsynlighetsfunksjon over σ.

Er q=<x;1,....,x;n> et n-tuple gjør vi oppmerksom på at (q);1 betegner den første komponenten i tuplet og at (q);j der 1=< j =< n betegner den j'te komponenten i tuplet. Alle disse begrepene kan defineres presist innenfor den rent mengdeteoretiske delen av den begrensede teorien om relativ sannsynlighet. Det man nå kan vise, men vi skal ikke gi beviset her, er at dersom man erstatter grunnsetningene D1 - D8, M1 - M3 og A1 og A2 med det følgende aksiom:

(4) $(ES)(SRom(S,I) \ \& \ C= Mg(<<x,y>,r>: r\hat{e}Reell \ \& \ x,y\hat{e}(S);2 \ \& \ (S);3(x\Omega y)/(S);3(y)= r \ \& \ (S);(y) >0))$

får man som resultat en teori som er helt ekvivalent med den begrensede teorien om relativ sannsynlighet utvidet med grunnsetningene A1 og A2.

80 Se §7 for presise definisjoner av hva som menes med en naturlig boolsk algebra og hva som menes med et sannsynlighetsrom S= <X,σ,p> over mengden X.

81 Detaljerte bevis for de påstandene vi nevner her finner man i Rognes [6], §19

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Er x og y utsagn betegner C(x,y) sannsynligheten for det forhold utsagnet x beskriver gitt at y representerer all den evidens som er tilgjengelig. Kan man nå tillegge universelle vitenskapelige lover, eller systemer av slike lover, sannsynligheter relativt til for eksempel all den evidens vi har ved det nåværende tidspunkt, eller relativt til all den evidens vi hadde for, la oss si, femti år siden? Det er, som vi allerede har nevnt, vanskelig å skjønne hvordan dette skal gjøres på en måte som ikke virker fullstendig vilkårlig eller grepet ut av løse luften om man holder seg til en teori som den begrensede teorien om relativ sannsynlighet, eller denne teorien utvidet med A1 og A2. Hvor stor sannsynlighet kan man for eksempel tilskrive Einsteins relativitetsteori relativt til konjunksjonen av alle de fysiske data som man er i besittelse av ved det nuværende tidspunkt? Er denne sannsynligheten veldig nær 1? Er den lik 1? Eller er den bare 0.9, eller kanskje bare litt over 0.45? Dette er naturligvis bare retoriske spørsmål, men hvordan skal man tross alt avgjøre dem? Man kan ikke helt fri seg fra den tanke at disse spørsmålene, og talløse andre, om de tas bokstavelig har et skjær av det litt latterlige over seg og at det er vanskelig å ta dem helt alvorlig.[82]

Vi har tidligere nevnt at en lang rekke lover og vitenskapelige teorier er av en slik art at det er fornuftig å akseptere dem relativt til den totale evidens vi har ved det nåværende tidspunkt. Hvis man derfor skulle tilskrive disse lovene og teoriene en sannsynlighet relativt til denne totale evidens virker det rimelig å tilskrive dem sannsynligheten 1. Et argument for dette er at dette ikke virker vilkårlig og og også tilsynelatende passer langt bedre med de forestillinger man har om sikkerheten og påliteligheten til vitenskapelige teorier. Dessuten virker det rimelig å anse at en teori som logisk sett er inkonsistent med den totale evidens vi har nå ha bør tilskrives en sannsynlighet lik 0 (relativt til denne evidens). Fra det at en teori som det er fornuftig å akseptere relativt til evidensen e har en sannsynlighet lik 1 relativt til e

82 Det mest ambisiøse forsøk på å konstruere en generell relativ bekreftelsesfunksjon er fremsatt av Carnap i Carnap [1]. Carnap tar sitt utgangspunkt i et generelt predikatlogisk språk L med et endelig antall predikater og en tellbart uendelig mengde med konstanter c;1,...,c;n,.... Språket L utvidet med de n første konstantene betegnes med L;n. Utvides det med alle konstantene betegnes det med L;inf. For hvert språk i rekken L;n defineres mengden av tilstandsbeskrivelsene over L;n. En tilstandsbeskrivelse i L;n assosiert med en mengde X av atomære setninger i L;n er konjunksjonen av alle setningene i X samt negasjonene av alle de atomære setningene i L;n som ikke er med i X. Vi betegner mengden av alle tilstandsbeskrivelser i L;n med T(L;n). Man kan nå innføre en uniform målfunksjon m over de diverse tilstandsbeskrivelsene T(L;n) og definere en generell relativ bekreftelsesfunksjon C:n ved C;n(a,b) = m(aΩb)/m(b) der a og b er to mengder med tilstandsbeskrivelser over L;n. Tillegger man elementene i T(L;n) den samme sannsynlighet får man da en relativ sannsynlighetsfunksjon som den beskrevet i Wittgenstein [1], §5.15 - §5.156. Carnap viser at denne er utilfredsstillende. (Se Carnap [1], side 564 -565) og ved hjelp av visse begreper som han innfører helt presist, *strukturbeskrivelser* og *isomorfe tilstandsbeskrivelser*, kan han definere en mer tilfredstillende målfunksjon m* og en på denne basert relativ sannsynlighetsfunksjon c* (Carnap [1], side 563, 564). Denne kan innføres for de diverse L;n, men også utstrekkes til L;inf. Imidlertid er det vanskelig å beregne c*(a,b) uten at man begrenser L slik at det bare inneholder monadiske predikater. (Se side 565 - 567). Dette representerer en sterk begrensing på språket L. (Man kan undres på om virkelig interessante vitenskapelige teorier kan formuleres i et så begrenset språk). Imidlertid viser Carnap også at generelle setninger av samme form som universelle lover, ie. setninger av typen (Ax)(Fx -> Gx) må tillegges sannsynligheten 0 selvom antallet bekreftende instanser øker. Man har, om man forkorter "Fx→Gx" med "M(x)":

Lim/n,0,inf/(c*((Ax)(M(x)), Konj/j,1,n/(M(c;j)))) =0.

(Se side 570 -571) Dette kan virke frustrerende siden man skulle tro at vitenskapelige lover i en eller annen forstand skulle anses som sikre, veletablerte og velbekreftede, og derfor ha en sannsynlighet større enn 0 om man har observert en lang rekke bekreftende instanser. Carnaps teori om induksjon synes derfor ikke å passe særlig bra sammen med den teorien om induksjon og sannsynlighet som presenteres her. Det bør også bemerkes at i det nevnte arbeid av Carnap spiller slike begreper som kausalnødvendighet, enkelhet, harmoni og indre konsistens ingen fremtredende rolle.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

følger det selvfølgelig også at alle utsagn som logisk sett følger fra teorien også må tilskrives sannsynligheten 1 relativt til e. Det er imidlertid et forhold som man må gjøre oppmerksom på her. Det er bare om det finnes utsagn som kan tilskrives en viss sannsynlighet relativt til en evidensmengde e, ie. bare om e utgjør det vi kalte en sannsynlighetsbasis, at et utsagn x som det er fornuftig å aksepterere relativt til e også bør tilordnes sannsynligheten 1 relativt til e. Det er dette som uttrykkes av grunnsetningen F2:

F2 $(Ez)(<z,y>\hat{e}Dom(C)) \,\&\, Ba(x,y) \rightarrow C(x,y)=1$

Som vi nevnte ovenfor finner vi det vanskelig å tilskrive vitenskapelige teorier noe annet enn sannsynligheten 1 relativt til en viss evidens e, om det er fornuftig å akseptere dem relativt til e, og det er mulig å tilskrive utsagn en viss sannsynlighet relativt til e. Hvis man derfor tilskriver et utsagn x en viss sannsynlighet relativt til et utsagn y, må dette utsagnet y, som representerer den evidens som foreligger, inneholde eller rettferdigjøre visse statiske lovmessigheter som kan brukes til å tilskrive det fenomen som utsagnet x beskriver en bestemt sannsynlighet. Det er bare når man kjenner til, eller kan begrunne, slike statistiske lovmessigheter at det gir noen klar mening å tilskrive hendelser (eller utsagn som beskriver hendelser) tallmessige mål på sannsynlighet.

La oss igjen se på et eksempel for å belyse dette. Jeg har for meg en vanlig kortstokk som er stokket meget grundig, trekker et kort fra denne kortstokken og med baksiden opp legger jeg det på bordet. Jeg har altså ikke sett hvilket kort det er. Dette er en del av det jeg vet ved det nuværende tidspunkt og sammen med alt det jeg forøvrig vet ved dette tidspunkt utgjør dette den evidens e jeg har nå. Relativt til e virker det da rimelig å hevde at sannsynligheten for at kortet er hjerter ess er lik 1/52. Betegner vi utsagnet at kortet er hjerter ess med x0 er det følgelig rimelig å påstå at C(x0,e)=1/52. Men jeg kan imidlertid bare påstå dette fordi det er fornuftig relativt til e å akseptere den generelle stokastiske regelmessighet at dersom man stokker en kortstokk skikkelig og trekker et kort fra den og gjentar denne prosedyren et meget stort antall ganger vil det bare være i tilnærmet 1/52' del av tilfellene at man trekker hjerter ess. La oss kalle denne stokastiske regelmessigheten for L;0. En forutsetning for at det skal gi mening å hevde at C(x0,e) er derfor at Ba(L;0,e). Fra dette siste følger selvfølgelig at (Ex)Ba(x,e).

I lys av en rekke eksempler av denne type synes det rimelig å hevde at (Ex)Ba(x,y) er en nødvendig betingelse for at utsagn har en viss sannsynlighet relativt til y. Det er dette grunnsetningen F1 uttrykker:

F1 $(Ez)(<z,y>\hat{e}Dom(C)) \rightarrow (Ex)Ba(x,y)$

Etter at vi nå har kommentert grunnsetningene F1 og F2 er det rimelig å gjøre et forsøk på å motivere de resterende grunnsetningene F3 - F5. Siden det ikke er noe som tyder på at aksiomene F1 - F5 er avhengige av hverandre er det klart at det ikke er rimelig å tro at man kan bevise at F3 - F5 holder ved hjelp av F1 og F2. De betraktningene vi gør i det følgende må derfor oppfattes som fullstendig uformelle og av en nokså "løs" heuristisk natur.

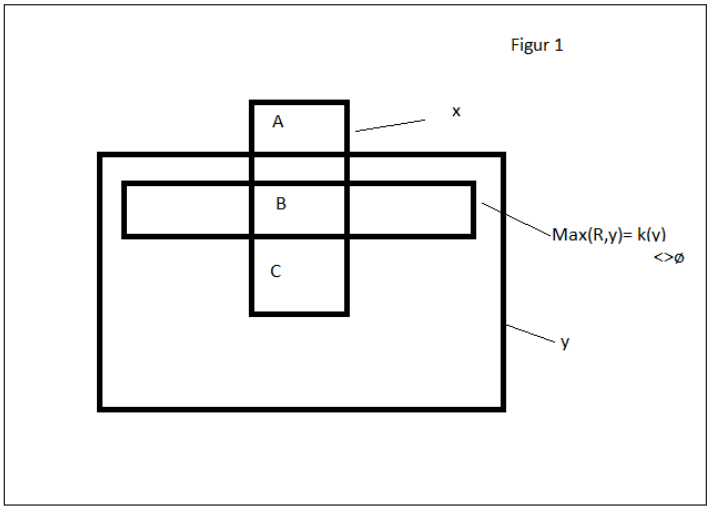
La oss først se på F3. Anta $<x,y>\hat{e}Dom(C)$. Vi skal da forsøke å argumentere for at det er rimelig å hevde at $C(x,y) = C(x,\kappa(y))$ gitt at F1, F2 og de øvrige sannsynlighets-teoretiske grunnsetningene, spesielt D1 - D8, anses som rimelige. Fra det at $<x,y>\hat{e}Dom(C)$ følger ved hjelp av F1 at Ba(z,y) for et eller annet utsagn z. Men dette er som vi tidligere har

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

sett ekvivalent med at Max(R,y)≠ø, med andre ord at κ(y)≠ø. Det finnes altså visse enkleste verdener blandt verdenene i y og mengden av dem alle er κ(y).

La oss nå se på figuren nedenfor.

Punktene innenfor rektanglet y representerer mengden av alle de mulige verdenene der utsagnet y er sant. Tilsvarende representerer rektangelet x sannhetsmengden til utsagnet x. Rektangelet som er merket κ(y) representerer de enkleste verdenene i mengden y. Som man ser fra figuren er A= x-y, B= xΩκ(y) og C=(xΩy) - κ(y). Siden κ(y) Inkl y har vi at A,B og C er innbyrdes disjunkte. I lys av Kolmogoroffs tredje aksiom, med andre ord D8, skulle det da være rimelig å anta at C(x,y) = C(A,y) +C(B,y) + C(D,y). Man ser raskt at det er rimelig å hevde at C(A,y) =0 siden det åpenbart er slik at Ba(Neg(A),y) og da må vi ha C(Neg(A),y)=1 (om vi forutsetter at <z,y>êDom(C) for noe z). Men dette impliserer at C(A,y)=0. På tilsvarende vis kan man uformelt og ustringent argumentere for at C(C,y)=0. Man ser fra dette at (+) C(x,y)= C(B,y) = C(xΩκ(y),y).



La oss nå anta at <x,κ(y)> êDom(C), med andre ord at utsagnet x kan tilskrives en sannsynlighet relativt til snittet av alle de utsagnene som bør aksepteres relativt til y. På samme måte som ovenfor har vi da:

C(x,κ(y)) = C(A,κ(y)) + C(B,κ(y)) + C(C,κ(y))

Gitt at κ(y) ≠ø ser man umiddelbart at C(A,κ(y)) =0 siden Ba(Neg(A),κ(y)) og derfor C(Neg(A),κ(y))=1. Tilsvarende kan man argumentere for at C(C,κ(y))=0. Det virker derfor ikke urimelig å konkludere med at

(++) C(x,κ(y)) = C(xΩκ(y),κ(y))

Fra intet av dette følger direkte at (+++) C(x,y) = C(x,κ(y)). Det eneste man kan konkludere med er at dette følger fra (+) og (++) om man antar:

C(xΩκ(y),y)=C(xΩκ(y),κ(y))

Imidlertid er dette ikke mer opplagt enn (+++), så noe stringent bevis for den sistnevnte påstand har ikke blitt gitt med overveielsene ovenfor. Men ser man på figuren virker det eiendommelig om man hevder at B skulle ha en annen sannsynlighet relativt til y enn til κ(y), ie. alt det som det er fornuftig å akseptere relativt til y, særlig når man forutsetter at alt det som bør aksepteres relativt til y har en sannsynlighet lik 1. Det er derfor naturlig å konkludere med at F3 er en ytterst rimelig påstand. Ser man på (+++) og (++) virker det rimelig, selvom

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

disse påstandene bare holder med henholdsvis forbeholdene <x,κ(y)>êDom(C) og <x,y>êDom(C), og anta

F4 <x,κ(y)>êDom(C) → <x,y>êDom(C) og
F5 <xΩκ(y),y>êDom(C) → <x,y>êDom(C)

holder.

Det må igjen understrekes at vi ikke har gitt noe bevis for F3 - F5 ovenfor, men bare gjennomført noen tentative og uformelle betraktninger som kanskje kan overbevise leseren om at det å påstå at disse setningene er sanne ikke på noen måte er søkt. Vi påstår ikke å ha gjort noe mer enn dette.

DEL B

§6 Introduksjon

I denne delen av vårt arbeid skal vi se nærmere på de rent formelle sidene ved den begrensede teorien om akseptanse og sannsynlighet, men også ved den fulle teorien om akseptanse og sannsynlighet. Det kan være hensiktsmessig å repetere enkelte punkter fra §3. Man erindrer at L;e er språket for mengdelære og at Δ er den mengden med predikater som inneholder de tre predikatene "w er en logisk mulig verden", "w er en verden som har minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som verdenen w' " og "z er den sannsynlighet som kan tilskrives utsagnet x gitt at utsagnet y representerer all tilgjengelig evidens". L;e(Δ) er derfor språket til mengdelære utvidet med predikatene i Δ som nye ikke-logiske predikater. I dette språket formulerte vi fem grupper av aksiomer: for det første aksiomene om mulige verdener W1 og W2, for det andre grunnsetningene E1 - E3 om enkelhetsrelasjonen, for det tredje de grunnleggende aksiomene om sannsynlighet D1 - D8, for det fjerde aksiomene F1 - F5 som forbinder akseptanse og sannsynlighet, og endlig, for det femte, de multiplikative aksiomene M1 - M3 hvor det "viktigste" aksiomet i en viss forstand er det multiplikative aksiomet M3. Som man husker betegnet vi den formelmengden som inneholdt formlene W1,W2, E1 - E3, D1 - D8 og F1 - F5 med θ;1. Den svake teorien om akseptanse og sannsynlighet har da bare disse aksiomene (i tillegg til de rent logiske og mengdeteoretiske aksiomene) som grunnsetninger. Den svake teorien om akseptanse og sannsynlighet er derfor ZFC;u(L;e(Δ))[θ;1]. Den sterke (eller fulle) teorien om akseptanse og sannsynlighet får vi når vi til aksiomene i ZFC;u(L;e(Δ))[θ;1] legger til aksiomene M1 - M3, med andre ord har vi at denne teorien er ZFC;u(L;e(Δ))[θ;2] der θ;2= θ;1 U {M1,M2,M3}.

Vi definerte i §4 hva vi forstod ved en relativ sannsynlighetsstruktur. Man ser fra Definisjon 4.1 i §4 at dette er et rent mengdeteoretisk begrep. Dette innebærer at dersom S=<I,R,C> er en relativ sannsynlighetsstruktur kan I,R,og C være hva som helst så sant disse størrelsene bare oppfyller de krav som er nevnt Definisjon 4.1. Det er for eksempel intet i veien for at I i visse relative sannsynlighetsstrukturer kan være mengden av de reelle tall, en mengde av par av en eller annen type, eller noe annet som ikke har den minste likhet med mulige verdener. Siden dette begrepet er rent mengdeteoretisk og de øvrige begreper som vi innfører også er det kan alle satser vi utleder her oppfattes som teoremer i det mengdeteoretiske system som vi baserer

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

oss på, nemlig systemet ZFC;u(L;e). Dette innebærer at alle de resultatene vi gir bevis for i denne andre hoveddelen av vårt arbeid logisk sett er helt uavhengige av sannhetsverdien til grunnsetningene W1, W2, E1 - E3, D1 - D8, F1 - F5 og M1 -M3. Sagt på en annen måte er disse resultatene begrunnet helt uavhengig av grunnsetningene i den sterke, såvel som den svake, teorien om akseptanse og sannsynlighet. Siden ingen av predikatene i Δ inngår i noen av de definisjonene vi gi i de følgende paragrafer (§7 - §12) er også de resultatene vi etterhvert skal presentere også helt uavhengige av spørsmålet om disse egentlig er meningsfulle eller ikke. På den annen side gir det knapt noen mening å studere så spesielle strukturer som relative sannsynlighetsstrukturer, eller relative sannsynlighetsstrukturer der alle utsagn som representerer en sannsynlighetsbasis er multiplikative, om man ikke hadde ansett den svake, så vel som den sterke, teorien om akseptanse og sannsynlighet som en ytterst rimelig, sann eller i det minste, interessant teori. Det er dette forhold, og bare dette forhold, som gjør at det å bevise de satsene vi skal formulere i de neste paragrafene gir mening, og ikke bare er å oppfatte som en kuriøs øvelse i vitenskapens bakgård.

Det er av en viss interesse å gi en oversikt over innholdet i de følgende paragrafer. I §7 definerer vi to begreper som vi så langt ikke har hatt noe direkte behov for. For det første defineres hva som menes med en *naturlig boolsk algebra* over en ikke-tom mengde X. For det andre defineres hva som forstås med et sannsynlighetsrom over en mengde (ikke-tom) X. Begge definisjonene kan karakteriseres som standard-definisjoner.

I §8 definerer vi hva som menes med en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom. Dette er et triple <I,R,Π> der I er en ikke-tom mengde, R en preordning over I og Π er en funksjon som til visse delmengder av hvert R-nivå, ie. de diverse [w];R ettersom w gjennomløper mengden I, tilordner disse delmengdene sannsynlighetsrom. Er for eksempel x en delmengde av [w];R for en eller annen wêI, og er x med i domenet til Π vil Π(x) være et sannsynlighetsrom over mengden x.

I forbindelse med preordningsstrukturer med assosierte sannsynlighetsrom S=<I,R,Π> definerer vi hva som menes med den relative sannsynlighetsfunksjonen C bestemt av S. Dette gjøres også i §8. I samme paragraf definerer vi også (se Definisjon 8.3), gitt at S=<I,R,Π> er en preordningsstruktur med assoierte sannslighetsrom, hva som menes med at Π(x), der x er med i domenet til Π, er *multiplikativt*.

Er S=<I,R,Π> en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom og er C den relative sannsynlighetsfunksjonen bestemt av S kaller vi S'=<I,R,C> for den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av S. I §9 viser vi detaljert at S' faktisk er en relativ sannsynlighetsstruktur.[83]

I §10 går vi den motsatte vei. Vi starter med en relativ sannsynlighetsstruktur S=<I,R,C> og viser hvordan man gitt S kan definere en funksjon Π slik at S'=<I,R,Π> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom. I §11 beviser vi så alle de resultatene som ble oppsummert i siste del av §1 og tilslutt viser vi i §12 hvordan man kan bruke de resultatene vi har vist til å formulere en alternativ aksiomatisering av den svake (begrensede)

83 Et viktig poeng med dette resultatet er at det er forholdsvis lett å konkret spesifisere preordningsstrukturer med assosierte sannsynlighetsrom. Dermed er det lett å konstruere relative sannsynlighetsstrukturer. Dette i sin tur impliserer at det er forholdsvis enkelt å vise at ZFC;u(L;e(Δ))[θ;1] er konsistent relativt til ZFC:u(L;e).

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

teorien om akseptanse og sannsynlighet og en alternativ aksiomatisering av den sterke (fulle) teorien om akseptanse og sannsynlighet.

§7 Noen grunnleggende begreper hentet fra sannsynlighetsteorien.

Det er et par grunnleggende begreper som må defineres og avklares før vi kan gi en presis definisjon av hva som menes med en preferansestruktur med assosierte sannsynlighetsrom. Det første begrepet er begrepet *naturlig boolsk algebra* over en mengde X. En naturlig boolsk algebra over en mengde X er en mengde σ av delmengder av X som for det første inneholder X selv, for det andre er lukket under komplement med hensyn på X og som for det tredje er lukket under endelig union. Det kreves at X er ikke-tom. Formelt sett kan definisjonen formuleres slik:

Definisjon 7.1 σ er en *naturlig boolsk algebra* over mengden X hvis og bare hvis σ oppfyller de følgende krav:

(i) σ Inkl Pt(X) & X≠ø
(ii) Xêσ
(iii) xêσ → (X-x)êσ
(iv) x,yêσ → (xUy)êσ

Det følger fra denne definisjonen at dersom σ er en naturlig boolsk algebra over X så er σ lukket under alle de vanlige boolske operasjonen, ikke bare union og komplement, men også slike operasjoner som endelig snitt, hva man kunne kalle kondisjonal over X, ie operasjonen som tilordner to mengder x,y mengden (X-x)Uy og bikondisjonal, det vil si operasjonen som tilordner to mengder x,y mengden ((X-x)Uy)Ω((X-y)Ux). Det følger også fra denne definisjonen at øêσ om σ er en naturlig boolsk algebra over X. Fra (ii) og (iii) i definisjonen har man (X-X)êσ. Men ø=X-X og derfor følger øêσ. Det bør også bemerkes at om X er en endelig mengde så er mengden av alle delmengder av X en naturlig boolsk algebra.

Det neste begrepet vi innfører er begrepet *sannsynlighetsrom*. Et sannsynlighetsrom er et trippel der den første komponenten er en ikke-tom mengde X, den andre komponenten er det vi ovenfor kalte en naturlig boolsk algebra over X og den tredje komponenten, kalt sannsynlighetsfunksjonen er en funksjon med de følgende egenskaper: Domenet til funksjonen er alle mengdene i den naturlige boolske algebraen og verdiområdet til funksjonen er inkludert i intervallet [0,1]. Dessuten skal denne funksjonen oppfylle det krav at den tilordner X verdien 1 og dersom x,y er disjunkte mengder i den algebraen som inngår så skal verdien som funksjonen tilordner unionen av x og y være identisk med summen av den verdien funksjonen tilordner x og den verdien funksjonen tilordner y. Denne definisjonen kan formuleres mer formelt slik:

Definisjon 7.2 Med et sannsynlighetsrom over mengden X forstår vi et trippel <X,σ,p> der de enkelte komponentene oppfyller følgende krav:

(i) X er en ikke-tom mengde.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(ii) σ er en naturlig boolsk algebra over X
(iii) p er en funksjon som oppfyller de følgende krav:
(a) Dom(p) = σ
(b) Rgn(p) Inkl [0,1]
(c) p(X) =1
(d) x,yêσ & xΩy=ø → p(xUy) = p(x)+p(y)

Det kan være hensiktsmessig å gi et eksempel. La X være en endelig mengde av n elementer. (n>=1). La σ være alle endelige delmengder av X inkludert X selv og nullmengden. Anta at X= {a;1, ... ,a;n}. Da ser man lett at σ er en naturlig boolsk algebra over X. La videre <p;i>/1=<i=<n/ være en sekvens av n reelle tall der p;i >=0. Sum/i,1,n/(p;i) er summen av disse n reelle tallene. Vi krever at denne skal være større enn 0. Definer nå en funksjon q ved å sette at q = Mg(<a;i, p;i/Sum/i,1,n/(p;i)>: 1=<i =<n). Definer til slutt om aêσ p(a) ved å sette at p(a)= Sum/xêa/(q(x)). Man ser da ganske lett at <X,σ,p> er et sannsynlighetsrom i den betydningen som er innført ovenfor.

Anta a er et n-tuple, med andre ord at a=<x;1, ... ,x;n> for noe n>=1. Da betegner [a];j den j'te komponenten i dette n-tuplet. Vi har altså at [a];j=x;j. Tilsvarende har vi [a];1=x;1, [a];2=x;2 osv. Er derfor S= <X,σ,p> et sannsynlighetsrom har vi [S];1=X, [S];2=σ og [S];3=p. Selvfølgelig har vi også om S=<X,σ,p> at

<X,σ,p> = <[S];1,[S];2,[S];3>

Det er viktig at leseren legger merke til dette fordi vi vil bruke denne notasjonen svært mye i det følgende.

Med en preordning R over mengden X forstår vi en relasjon som er inkludert i XxX og som er refleksiv og transitiv. Dette innebærer at R må oppfylle de følgende to krav:

(i) (Ax)(xêX → R(x,x))
(iii) R(x,y) & R(y,z) → R(x,z)

Vi gir den følgende definisjon av begrepet preordningsstruktur:

Definisjon 7.3 Med en preordningsstruktur forstår vi et hvilket som helst ordnet par <I,R> der I er en ikke-tom mengde og R er en preordning over I

Er R en preordning over mengden X og er x en delmengde av X er de R-maksimale elementene i x, i symboler Max(R,x), definert slik:

Definisjon 7.4 Anta <I,R> er en preordningsstruktur og xêPt(I). Da setter vi:
Max(R,x) = Mg(y: yêx & (Az)(zêx → R(y,z)))

Er <I,R> en preordningsstruktur definerer vi R*, den strenge preordningen bestemt av R, og Ekv;R, ekvivalensrelasjonen bestemt av R på følgende vis:

Definisjon 7.5 (a) R*=Mg(<x,y>: x,yêI & R(x,y) & ¬R(y,x))
(b) Ekv;R = Mg(<x,y>: x,yêI & R(x,y) & R(y,x))

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Det er meget lett å vise at dersom <I,R> er en preordningsstruktur så er Ekv;R en ekvivalensrelasjon over I. Dette innebærer at Ekv;R inndeler I i en mengde av innbyrdes disjunkte og ikke-tomme ekvivalensmengder som samlet uttømmer I. Er wêI betegner [w];R mengden av alle de elementene i I som er R-ekvivalende med w, det vil si mengden av de elementene w'êI der vi har Ekv;R(w',w). Vi kan gi en mer formell definisjon slik:

Definisjon 7.6 Er <I,R> en preordningsstruktur setter vi om wêI:
[w];R = Mg(z: zêI & Ekv;R(z,w))

Vi definerer akseptanserelasjonen Ba bestemt av en preordningsstruktur <I,R> på samme måte som tidligere:

Definisjon 7.7 Er <I,R> en preordningsstruktur setter vi:
Ba(x,y) ↔ (x,yêPt(I) & ø≠ Max(R,y) Inkl x)

Man ser fra definisjonen ovenfor at uttrykket "Ba(x,y)" egentlig bare gir mening om man referer til en bestemt preordningsstruktur. Men hvilken preordningsstruktur vi forutsetter vil fremgå av konteksten og relasjonen Ba vil derfor være bestemt entydig. Vi skal også bruke uttrykket "κ(x)" som forkortelse for det lengere uttrykket "Max(R,x)". Her er det også slik at vi i notasjonen undertrykker preordningsrelasjonen R. Men er det i en sats vi formulerer forutsatt at det bare er én preordnings-struktur som er involvert skulle det være klart at κ(x) referer til de R-maksimale elementene til mengden x og at R er preordningen i denne preordningsstrukturen.

§8 Definisjon av preordningsstrukturer med assosierte sannsynlighetsrom.

Vi kommer nå til et av de viktigste begrepene i dette essay nemlig det vi kaller preordningsstrukturer med assosierte sannsynlighetsrom. Det er definert slik:

Definisjon 8.1 Vi kaller et trippel <I,R,Π> for en *preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom* hvis og bare hvis de enkelte komponentene i dette trippel oppfyller de følgende krav:

(a) I er en ikke-tom mengde og R en preferanserelasjon over I
(b) Π er en funksjon
(c) Dom(Π) Inkl UN(Mg(Pt([w];R) - {ø}: wêI)
(d) For ethvert xêDom(Π) er Π(x) et sannsynlighetsrom over x

I forbindelse med denne definisjonen bemerker vi først at om <I,R,Π> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom så er <I,R> en preordningsstruktur. Dette innebærer at ekvivalensrelasjonen Ekv;R over I inndeler I i en mengde av ikke-tomme, innbyrdes disjunkte, ekvivalensmengder som samlet uttømmer I. Ekvivalensmengden bestemt av verdenen w, ie [w];R vil da utgjøre en av alle disse ekvivalensmengdene. Vi skal kalle disse ekvivalensmengdene som bestemmes av relasjonen R for enkelhetsnivåene. Det følger

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

at [w];R, om wêI, utgjør et slikt enkelhetsnivå. Pt([w];R) utgjør da mengden av alle delmengder av dette nivå og Pt([w];R) - {ø} utgjør da mengden av alle de ikke-tomme delmengdene av [w];R. Man legger merke til at dersom w1 og w2 er to ikke-ekvivalente elementer i I så har man at (Pt([w1];R) - {ø}) og (Pt([w2];R) - {ø}) er disjunkte. UN(Mg(Pt([w];R) - {ø}: wêI) er derfor unionen av de diverse mengdefamiliene Pt([w];R) - {ø} ettersom w gjennomløper I. Som man ser krever vi at domenet til funksjonen Π skal være inkludert i denne unionen. Dette kan være identisk med denne foreningsmengden, men behøver ikke å være det.

Vi innfører nå den relative sannsynlighetsfunksjonen C ved den følgende definisjon. Merk at om <I,R,C> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom er U definert som Pt(I). Vi kaller de diverse elementene i U for utsagnene i strukturen.

Definisjon 8.2 Anta S=<I,R,Π> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom. Da definerer vi den relative sannsynlighetsfunksjonen C bestemt av S på følgende vis.

C= Mg(<<x,y>,r>: x,yêU & ø≠κ(y)êDom(Π) &
xΩκ(y)ê[Π(κ(y))];2 &[Π(κ(y))];3(xΩκ(y))=r)

Før vi går videre med den neste definisjonen, som definerer hva som menes menes med at sannsynlighetsrommet Π(y), der y êDom(Π) , er multiplikativt finner vi det hensiktsmessig å gi bevis for det følgende teorem som bidrar til å klargjøre og kaste lys over den definisjonen vi skal gi. Satsen er denne:

Teorem 8.1 Anta S=<X,σ,p> er et sannsynlighetsrom over X. Anta aêσ og at p(a)>0. Definer σ;a og p;a ved:

(i) σ;a= Mg(xΩa: xêσ)
(ii) p;a = Mg(<z,p(z)/p(a)>: zêσ;a)

Da har man at følgende holder:

(a) <a,σ;a,p;a> er et sannsynlighetsrom over a
(b) (Az)(zêσ;a → p(z) = p(a)* p;a(z))
(c) (Az)(zêσ → (zΩa)êσ;a)
(d) σ;a Inkl σ

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder.
Ad (a): Vi viser først at σ;a er en naturlig boolsk algebra over a. Siden aêσ har vi ved hjelp av forutsetning (i) at (1) aêσ;a. Det er også lett å se at
(2) (Az)(zêσ;a → zêPt(a)) For er zêσ;a har vi at det finnes x der z=xΩa & xêσ. Da har vi åpenbart at z Inkl a. Men dette impliserer zêPt(a). Dette viser at (2) holder. Vi må også vise at (3) (Az)(Av)(z,vêσ;a → (zUv)êσ;a). Anta derfor for vilkårlige z,v at (4) z,vêσ;a. Fra dette og forutsetninng (i) følger at det finnes x1 og x2 slik at

(5.1) z=x1Ωa & x1êσ
(5.2) v=x2Ωa & x2êσ

Fra disse to setningene følger (6) zUv = (x1Ux2)Ωa. Videre har vi siden x1,x2êσ at (x1Ux2)êσ. Men a er ifølge forutsetningene et element i σ. Det følger siden σ er en naturlig

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

boolsk algebra at (7) (x1Ux2)Ωa êσ. Fra (6), (7) og definisjonen av σ;a følger at (zUv)êσ;a. Dette viser at (3) holder.

Vi må også vise:

(8) xêσ;a → (a-x)êσ;a

Anta derfor for vilkårlig x at (9) xêσ;a. Da finnes x1 slik at (9.1) x=x1Ωa & x1êσ. Siden σ er en naturlig boolsk algebra over X har vi at aêσ og x1êσ og derfor i lys av (9.1) at x=x1Ωaêσ, siden σ er lukket under endelige boolske operasjoner. Det følger videre at Xêσ siden σ er en naturlig boolsk algebra over X. Vi har derfor at

(10) a-x = a - (x1Ωa)
= aΩ (X - (x1Ωa))
= aΩ((X-x1)U(X-a))
= (aΩ(X-x1))U(aΩ(X-a))
= (aΩ(X-x1))Uø
= aΩ(X-x1)

Siden Xêσ og x1êσ har vi at (X-x1)êσ. Fra dette og (10) følger i lys av forutsetning (i) at (a-x)êσ;a . Dette viser at (8) holder.

Fra (1), (2), (3) og (8) følger det at σ;a er en naturlig boolsk algebra over a.

Vi må imidlertid også vise at p;a som definert ved (ii) i satsen er en sannsynlighetsfunksjon over σ. Vi viser først at p;a er en funksjon: Anta (11) <z,r1>,<z,r2> ê p;a. Da har vi at det finnes x1,x2êσ;a slik at (12) z=x1 & r=p(x1)/p(a) og (13) z=x2 & r2=p(x2)/p(a). Fra (12) og (13) følger åpenbart at x1=x2 og derfor at r1=r2. Dette viser at p;a er en funksjon.

Fra forutsetning (ii) har vi, om <x,r>êp;a, at x=z & r = p(z)/p(a) for noe zêσ;a. Det følger at xêσ;a. Fra dette kan man slutte (14) Dom(p;a) Inkl σ;a. Anta på den annen side at zêσ;a. Siden p(a)>0 har vi at det finnes r slik at (15) r=(p(z)/p(a)) fordi zêσ;a Inkl σ. Det følger da ved hjelp av forutsetning (ii) at <z,r>êp;a. Dette viser at σ;a Inkl Dom(p;a). Vi har dermed vist at (16) Dom(p;a) = σ;a.

Vi må vise at Rgn(p;a) Inkl [0,1]. Anta derfor at <z,r>êp;a for noe zêσ;a. Det følger da ved hjelp av forutsetning (ii) at r= (p(x)/p(a)). Fra forutsetningene i satsen har vi p(a)>0. Siden xêσ;a ser man lett at xêσ i lys av forutsetning (i). Vi må også ha at x=zΩa for noe zêσ. Nå har man siden p er en sannsynlighetsfunksjon over σ at p(zΩa) =< p(a). Fra dette, og det at p(a)>0 ifølge forutsetningene, følger 0=< r=(p(x)/p(a)) =<1. Det viser at verdiområdet til funksjonen p;a er inkludert i [0,1].

Vi må vise at p;a oppfyller kravet (d) i Definisjon 7.2. Anta derfor at

(17) x1,x2êσ;a & x1Ωx2=ø.

Da har vi for noe y1 at (18) x1=y1Ωa & y1êσ. Tilsvarende må vi ha for noe y2 at (19) x2=y2Ωa & y2êσ. Det følger at

(20) x1Ux2= (y1Ωa)U (y2Ωa) og derfor

(21) x1Ux2= (y1Uy2)Ωa der y1Uy2êσ

Siden x1,x2êσ;a og σ;a er domenet til sannsynlighetsfunksjonen p;a har vi i lys av (18) og (19):

(22) p;a(x1) = p;a(y1Ωa) = p(y1Ωa)/p(a)

(23) p;a(x2) = p;a(y2Ωa) = p(y2Ωa)/p(a)

(24) p;a(x1Ux2) = p;a((y1Ωa)U(y2Ωa)) = p((y1Ωa)U(y2Ωa))/p(a)

Nå har vi fra (17) at x1Ωx2=ø. Fra dette og (18) og (19) følger: (y1Ωa)Ω(y2Ωa)=ø. Men y1Ωa ê σ og y2Ωa êσ. Siden <X,σ,p> er et sannsynlighetsrom kan vi derfor slutte at

(25) p((y1Ωa)U(y2Ωa)) = p(y1Ωa)+ p(y2Ωa)

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Men fra dette og (22) - (24) følger p;a(x1Ux2) = p;a(x1)+ p;a(x2).

Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for at <a,σ;a,p;a> er et sannsynlighetsrom.

A*d (b)*: Anta zêσ;a. Da har vi zêDom(p;a) og derfor for noe r at <z,r>êp;a. Men fra dette og definisjonen av p;a følger p;a(z)= p(z)/p(a). Siden p(a)>0 følger fra dette p(z)=p(a)*p;a(z). Dette viser at punkt (b) holder.

Ad (c): Anta zêσ. Da følger umiddelbar fra forutsetning (i) at zΩaêσ;a

Ad (d): Anta zêσ;a da finnes det noe x slik at z=xΩa og xêσ. Men a er per forutsetning med i σ. Siden σ er lukket under snitt følger at z=xΩaêσ. Vi har derfor σ;a Inkl σ

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Anta nå at <I,R,Π> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom. Anta y er er et utsagn som er med i domenet til Π. Vi har da at Π(y) er et sannsynlighetsrom. Vi skal nå definere hva som menes med at dette sannsynlighetsrommet er multiplikativt i denne strukturen. Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 8.3 Anta <I,R,Π> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom og at αêDom(Π). Da kaller vi Π(α) for *multiplikativt* hvis og bare hvis vi har for ethvert xêU at dersom xê[Π(α)];2 & [Π(α)];3(x)>0 så gjelder følgende:

(a) xêDom(Π)

(b) (Az)(zê[Π(x)];2 → [Π(α)];3(z) = [Π(α)];3(x) * [Π(x)];3(z))

(c) (Ay)(yê[Π(α)];2 →yΩxê[Π(x)];2)

(d) [Π(x)];2 Inkl [Π(α)];2

Man ser lett at kravene (a) - (d) i denne definisjonen svarer helt til punktene (a) - (d) i Teorem 8.1.

§9 Kanoniske relative sannsynlighetsstrukturer

Vi har i §4 gitt en definisjon av hva vi forstår med *en relativ sannsynlighetsstruktur*. Definisjon 4.1 er en definisjon av dette begrep. Vi har nå også definert den andre strukturtypen som vi vil beskjeftige oss med i denne delen av vårt arbeid, nemlig det vi ovenfor kalte *preordningsstrukturer med assosierte sannsynlighetsrom*. Det vi nå vil gjøre er å studere sammenhengene mellom disse to typene av strukturer. Vi skal først definere hva vi forstår med *den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen* bestemt av en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom. Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 9.1 Anta S= <I,R,Π> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom. Da kaller vi strukturen S' =<I,R,C> hvor funksjonen C er definert som ovenfor, det vil si som i Definisjon 8.2, for *den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av S*

Det er to kommentarer som det er naturlig å fremsette i forbindelse med denne definisjonen. For det første er det slik at dersom S =<I,R,Π> er en preordningsstruktur med assosierte

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

sannsynlighetsrom så er den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av S entydig bestemt. For det andre kan man ikke fra definisjonen ovenfor slutte at dersom S' er den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av S så er S' faktisk en relativ sannsynlighetsstruktur. Dette er noe som må bevises. Man må verifisere at S' oppfyller alle de kravene vi stilte til en relativ sannsynlighetsstruktur i Definisjon 4.1. Det er nøyaktig dette vi vil gjøre i denne paragrafen.

Anta nå at S' = <I,R,C> er den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av preordningsstrukturen med assosierte sannsynlighetsrom <I,R,Π>. Vi skal da først vise at C er en funksjon, at domenet til C er inkludert i Pt(I)xPt(I), ie. UxU og at verdiområdet til C er inkludert i intervallet [0,1]. Det skulle forøvrig fra Definisjon 9.1 umiddelbart fremgå at I er en ikke-tom mengde og at R er en preordning over I. Dernest vil vi vise at C'en i S' oppfyller kravene D3 - D4. Endelig vises det at C også oppfyller kravene F1 - F5. Vi skal gjøre dette skrittvis i den rekke følge som er nevnt her. Tilslutt skal vi også vise at dersom <I,R,Π> er en preordningsstruktur med assosierte sansynlighetsrom og vi har at yêPt(I) Og κ(y)êDom(Π) og Π(κ(y)) er multiplikativt så oppfyller y kravene M1 - M3 som vi nevnte mot slutten av §4.

Teorem 9.1 Anta S=<I,R,Π> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom og at <I,R,C> er den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av S. Da har man:

(a) I er en ikke-tom mengde og R er en preordning over I
(b) C er en funksjon
(c) Dom(C) Inkl Pt(I)xPt(I)
(d) Rgn(C) Inkl [0,1]

Bevis: *Ad (a)*: Siden S=<I,R,Π> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom følger det direkte fra definisjonen at I er en ikke-tom mengde og R en preordning over I.

Ad(b): Anta (1) <z,r1>, <z,r2>êC. For å vise at C er en funksjon vil det da være nok å vise at r1=r2. Fra (1) følger det da at det finnes x,y,r og x',y',r' slik at

(2.1) <z,r1>=<<x,y>,r> & x,yêU & ø≠κ(y)êDom(Π) &
xΩκ(y)ê[Π(κ(y))];2 &[Π(κ(y))];3(xΩκ(y))=r

(2.2) <z,r2>= <<x',y'>,r'> & x',y'êU & ø≠κ(y')êDom(Π) &
x'Ωκ(y')ê[Π(κ(y'))];2 &[Π(κ(y'))];3(x'Ωκ(y'))=r'

Fra de første konjunktene i (2.1) og (2.2) følger åpenbart at (3) <x,y>=z=<x',y'> og at (4) r1=r & r2=r'. Fra (3) følger (4.1) x=x' & y=y'. Fra dette og de siste konjunktene i (2.1) og (2.2) r = [Π(κ(y))];3(xΩκ(y))=r'. Men fra dette og (4) har vi r1=r2. Dette viser at punkt (b) holder.

Ad (c): Anta <z,r1>êC for noe r1. Ved hjelp av definisjonen av C, Definisjon 8.2, følger da eksistensen av x,y, r der man har:

(1) z=<x,y> & r1=r
(2) x,yêU & ø≠κ(y)êDom(Π) &
xΩκ(y)ê[Π(κ(y))];2 &[Π(κ(y))];3(xΩκ(y))=r

Fra dette følger z=<x,y> & x,yêU. Men herav har vi at zêUxU = Pt(I)xPt(I).

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Ad (d): Anta r1êRgn(C) for vilkårlig r1. Da følger per definisjon av Rgn at <z,r1>êC for noe z. Ved hjelp av definisjonen av C, Definisjon 8.2, følger da eksistensen av x,y, r der man har:

(1) z=<x,y> & r1=r

(2) x,yêU & ø≠κ(y)êDom(Π) &
xΩκ(y)ê[Π(κ(y))];2 & [Π(κ(y))];3(xΩκ(y))=r

Siden <I,R,Π> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom har vi at [Π(κ(y))];3 er en sannsynlighetsfunksjon over den naturlige boolske algebraen [Π(κ(y))];2. Det følger fra dette og (2) at [Π(κ(y))];3(xΩκ(y))=rê[0,1]. Men r1=r ifølge (1). Fra dette kan man slutte det vi ønsker, nemlig at r1ê[0,1]. **QED**.

Teorem 9.2 Anta S=<I,R,Π> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom og at <I,R,C> er den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av S. Da har man:

(a) <x,y>êDom(C) → <Neg(x),y>êDom(C)

(b) <x1,y>, <x2,y>êDom(C) → <x1 U x2, y>êDom(C)

(c) <x,y>êDom(C) → <y,y>êDom(C)

(d) <x,y>êDom(C) → C(I,y) =1

(e) <x,y>êDom(C) → C(xΩy, y) = C(x,y)

(f) <x1,y>,<x2,y>êDom(C) & x1 Ω x2=ø. →
C(x1 U x2,y) = C(x1,y)+C(x2,y)

Man gjenkjenner aksiomene D3 - D8 i punktene (a) - (f)

Bevis: A*d (a)*: Anta <x,y>êDom(C). Da har vi ved hjelp av definisjonen av C at det må finnes r der:

(1) x,yêU & ø≠κ(y)êDom(Π)

(2) xΩκ(y)ê[Π(κ(y))];2

(3) [Π(κ(y))];3(xΩκ(y))=r

Nå har vi siden <I,R,Π> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom at Π(κ(y)) er et sannsynlighetsrom over κ(y). Da har vi at [Π(κ(y))];2 er en naturlig boolsk algebra over κ(y). Fra dette og (2) følger:

(4) κ(y)-(xΩκ(y))ê[Π(κ(y))];2

Nå har man

(5.1) wê κ(y)-(xΩκ(y)) ↔. wê κ(y) & ¬(wê(xΩκ(y)))
↔ wêκ(y) & (wêκ(y) → ¬(wêx))
↔ wêI & wêκ(y) & ¬(wêx)
↔ wê((I-x)Ωκ(y)).

Det følger at κ(y)-(xΩκ(y)) = (I-x)Ωκ(y) og derfor ved hjelp av (4) at
(6) (I-x)Ωκ(y)ê[Π(κ(y))];2. Siden Π(κ(y)) er et sannsynlighetsrom har vi i lys av (6) at [Π(κ(y))];3((I-x)Ωκ(y))=r' for noe r'. Fra dette, (6) og definisjonen av C følger, siden Neg(x) = I-x at <Neg(x),y>êDom(C). Dette viser at punkt (a) holder.

Ad (b): (1) <x1,y>, <x2,y>êDom(C). Da har vi ved hjelp av definisjonen av C at følgende holder for visse r1 og r2:

(1.1) x1,x2,yêU & ø≠κ(y)êDom(Π)

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(1.2) x1Ωκ(y)ê[Π(κ(y))];2 & [Π(κ(y))];3(x1Ωκ(y))=r1
(1.3) x2Ωκ(y)ê[Π(κ(y))];2 & [Π(κ(y))];3(x2Ωκ(y))=r2
Siden Π(κ(y)) er et sannsynlighetsrom over κ(y) følger at [Π(κ(y))];2 er en naturlig boolsk algebra over κ(y). Vi kan derfor fra første konjunkt i (1.2) og den første konjunkten i (1.3) slutte at:
(2) (x1Ωκ(y))U(x1Ωκ(y)) = (x1Ux2)Ωκ(y) ê[Π(κ(y))];2
Siden Siden Π(κ(y)) er et sannsynlighetsrom har vi i lys av (2) at
[Π(κ(y))];3((x1Ux2)Ωκ(y))=r' for noe r'.
Fra dette, (2), (1.1) og definisjonen av C kan man slutte at <x1Ux2,y>êDom(C).

Ad (c): Anta (1) <x,y>êDom(C). Da har vi som i tidligere tilfelle at det finnes r der:
(2.1) x,yêU & ø≠κ(y)êDom(Π)
(2.2) xΩκ(y)ê[Π(κ(y))];2
(2.3) [Π(κ(y))];3(xΩκ(y))=r
Nå har man, noe man lett skulle innse på basis av definisjonen av κ(y), at κ(y) Inkl y og derfor at (3) yΩκ(y)=κ(y). Det er åpenbart, siden Π(κ(y)) er et sannsynlighetsrom, at κ(y)ê[Π(κ(y))];2. I lys av (3) følger da (4) xΩκ(y)ê[Π(κ(y))];2
Siden Π(κ(y)) er et sannsynlighetsrom følger også at
(5) [Π(κ(y))];3(yΩκ(y)) = [Π(κ(y))];3(κ(y)) =1
Fra (2.1), (4), (5) og definisjonen av C følger da <y,y>êDom(C). Dette viser at punkt (c) holder.

Ad (d): Anta (1) <x,y>êDom(C). Da har vi som i tidligere tilfelle at det finnes r der:
(2) x,yêU & ø≠κ(y)êDom(Π)
Nå har man, noe man lett skulle innse på basis av definisjonen av κ(y), at κ(y) Inkl I og derfor at (3) IΩκ(y)=κ(y). Det er åpenbart siden det følger fra (1) at Π(κ(y)) er et sannsynlighetsrom at κ(y)ê[Π(κ(y))];2. I lys av (3) følger da (4) IΩκ(y)ê[Π(κ(y))];2
Siden Π(κ(y)) er et sannsynlighetsrom følger også at
(5) [Π(κ(y))];3(IΩκ(y)) = [Π(κ(y))];3(κ(y)) =1
Fra (2), (4), (5) og definisjonen av C følger da C(I,y)=1. Dette viser at punkt (d) holder.

Ad (e): Anta (1) <x,y>êDom(C). Ved hjelp av definisjonen av C følger da:
(2.1) x,yêU & ø≠κ(y)êDom(Π)
(2.2) xΩκ(y)ê[Π(κ(y))];2
(2.3) [Π(κ(y))];3(xΩκ(y))=r
for noe rêReell. Siden κ(y) Inkl y har vi yΩκ(y)=κ(y). Fra dette og (2.1) -(2.3) følger:
(3) xΩyΩκ(y)=xΩκ(y)ê[Π(κ(y))];2 og
(4) [Π(κ(y))];3(xΩyΩκ(y))=r
Fra (2.1) - (2.3) har man (5) C(x,y)=r. Fra (3), (4), (2.1) og definisjonen av C slutte:
C(xΩy,y)=r. Fra (5) og (6) følger C(xΩy,y)=C(x,y). Dette viser at punkt (e) holder.

Ad (f): Anta (1) <x1,y>,<x2,y>êDom(C) & x1Ωx2=ø
Ved hjelp av definisjonen av C følger da:
(2.1) x1,yêU & ø≠κ(y)êDom(Π)
(2.2) x1Ωκ(y)ê[Π(κ(y))];2
(2.3) [Π(κ(y))];3(x1Ωκ(y))=r1

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

og

(3.1) x2,yêU & ø≠κ(y)êDom(Π)
(3.2) x2Ωκ(y)ê[Π(κ(y))];2
(3.3) [Π(κ(y))];3(x2Ωκ(y))=r2

for noen reelle tall r1 og r2. Fra den siste konjunkten i (1) følger

(4) (x1Ωκ(y))Ω(x2Ωκ(y)) =ø

Videre følger fra (2.2) og (3.2) siden [Π(κ(y))];2 er en naturlig boolsk algebra at

(5) (x1Ωκ(y))U(x2Ωκ(y)) ê [Π(κ(y))];2

Videre har vi fra (4) og (5) sammen med (2.3) og (3.3), siden Π(κ(y)) er et sannsynlighetsrom, at:

(6) [Π(κ(y))];3((x1Ωκ(y))U(x2Ωκ(y)))=r1+r2

Fra (2.1) - (2.3), (3.1)-(3.3), (5),(6) og definisjonen av C følger så det vi ønsker:

C(x1Ux2,y) = C(x1,y)+c(x2,y)

Dette viser at punkt (f) holder. **QED**.

Teorem 9.3 Anta S=<I,R,Π> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom og at <I,R,C> er den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av S. Da har man:

(a) <x,y>êDom(C) → (Ez)Ba(z,y)
(b) (Ez)(<z,y>êDom(C)). →(Ba(x,y) → C(x,y)=1)
(c) <x,y>êDom(C) → C(x,y) = C(x,κ(y))
(d) <x,y>ê Dom(C) → <κ(y),y> ê Dom(C)
(e) <x,y>ê Dom(C) → C(κ(y),y)=1
(f) <x,y>ê Dom(C) ↔ <xΩ κ(y), κ(y)> ê Dom(C)
(g) <x,y>ê Dom(C) ↔ <x,κ(y)>ê Dom(C)
(h) <x,y>ê Dom(C) ↔ <xΩκ(y),y>ê Dom(C)

Man man ser at (a) - (c) her er aksiomene F1 - F3. Aksiomet F4 er halvdelen mot venstre i punkt (g) og kondisjonalen mot venstre i punkt (h) er aksiomet F5.

Bevis: *Ad (a)*: Anta <x,y>êDom(C). Fra definisjonen av C følger da:

(1.1) x,yêU & ø≠κ(y)êDom(Π)
(1.2) xΩκ(y)ê[Π(κ(y))];2
(1.3) [Π(κ(y))];3(xΩκ(y))=r

Fra (1.1) har man ø≠κ(y). Men κ(y) Inkl κ(y). Derfor ø≠κ(y) Inkl κ(y). Herav følger ved hjelp av definisjonen av Ba at Ba(κ(y),y). Herav (Ez)Ba(z,y). Dette viser at punkt (a) holder.

Ad (b): Anta (1) <z,y>êDom(C) & Ba(x,y). Fra den første konjunkten har vi da ved hjelp av definisjonen av C at følgende holder for noe r:

(2.1) z,yêU & ø≠κ(y)êDom(Π)
(2.2) zΩκ(y)ê[Π(κ(y))];2
(2.3) [Π(κ(y))];3(zΩκ(y))=r

Fra den andre konjunkten i (1) og definisjonen av Ba følger (3) xêU& ø≠ κ(y) Inkl x. Fra dette kan man slutte at (4) κ(y) = xΩκ(y). Nå har man fra (2.1) at κ(y)êDom(Π) og derfor at Π(κ(y)) er et sannsynlighetsrom κ(y). Det følger da at

(4.1) κ(y)ê[Π(κ(y))];2
(4.2) [Π(κ(y))];3(κ(y))=1

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Fra dette og (4) kan man slutte:

(5.1) $x\Omega\kappa(y)\hat{e}[\Pi(\kappa(y))];2$

(5.2) $[\Pi(\kappa(y))];3(x\Omega\kappa(y))=1$ Fra (2.1) og første konjunkt i (3) følger:

(5.3) $x,y\hat{e}U \ \& \ \emptyset\neq\kappa(y)\hat{e}Dom(\Pi)$

Fra (5.1) - (5.3) følger ved hjelp av definisjonen av C at C(x,y)=1. Dette viser at punkt (b) holder.

Ad (c): Anta (1) $<x,y>\hat{e}Dom(C)$ Da kan vi ved hjelp av definisjonen av C slutte at finnes noe r der følgende holder:

(2.1) $x,y\hat{e}U \ \& \ \emptyset\neq\kappa(y)\hat{e}Dom(\Pi)$

(2.2) $x\Omega\kappa(y)\hat{e}[\Pi(\kappa(y))];2$

(2.3) $[\Pi(\kappa(y))];3(x\Omega\kappa(y))=r$

Fra dette og definisjonen av C følger: (3) $C(x,y)=r$. Nå har man (4) $\kappa(\kappa(y))=\kappa(y)$. Fra dette og (2.1) - (2.3) kan man slutte:

(5.1) $x,y\hat{e}U \ \& \ \emptyset\neq\kappa(\kappa(y))\hat{e}Dom(\Pi)$

(5.2) $x\Omega\kappa(\kappa(y))\hat{e}[\Pi(\kappa(\kappa(y)))];2$

(5.3) $[\Pi(\kappa(\kappa(y)))];3(x\Omega\kappa(\kappa(y)))=r$

Fra (5.1) - (5.3) og definisjonen av C kan man slutte: $C(x,\kappa(y))=r$. Dette og (3) impliserer det vi ønsker, nemlig: $C(x,y)=C(x,\kappa(y))$. Dette viser at punkt (c) holder.

Ad (d) og (e): Anta (1) $<x,y>\hat{e}Dom(C)$ Da kan vi ved hjelp av definisjonen av C slutte at finnes noe r der følgende holder:

(2.1) $x,y\hat{e}U \ \& \ \emptyset\neq\kappa(y)\hat{e}Dom(\Pi)$

(2.2) $x\Omega\kappa(y)\hat{e}[\Pi(\kappa(y))];2$

(2.3) $[\Pi(\kappa(y))];3(x\Omega\kappa(y))=r$

Siden $\kappa(y)\hat{e}[\Pi(\kappa(y))];2$ fordi $[\Pi(\kappa(y))];2$ er en naturlig boolsk algebra over $\kappa(y)$, og vi dessuten har at $[\Pi(\kappa(y))];3$ er en sannsynlighetsfunksjon over denne algebraen, kan vi også slutte at $[\Pi(\kappa(y))];3(\kappa(y))=1$. Det følger derfor at

(3.1) $\kappa(y)\Omega\kappa(y)\hat{e}[\Pi(\kappa(y))];2$

(3.2) $[\Pi(\kappa(y))];3(\kappa(y)\Omega\kappa(y))=1$

Fra dette, (2.1) og definisjonen av C kan man utlede $<\kappa(y),y>\hat{e}Dom(C)$. Det følger også at $C(\kappa(y),y)=1$. Dette viser at punktene (d) og (e) holder.

Ad (f): Anta (1) $<x,y>\hat{e}Dom(C)$ Da kan vi ved hjelp av definisjonen av C slutte at finnes noe r der følgende holder:

(2.1) $x,y\hat{e}U \ \& \ \emptyset\neq\kappa(y)\hat{e}Dom(\Pi)$

(2.2) $x\Omega\kappa(y)\hat{e}[\Pi(\kappa(y))];2$

(2.3) $[\Pi(\kappa(y))];3(x\Omega\kappa(y))=r$

Siden $\kappa(\kappa(y))=\kappa(y)$ har man at (2.1) - (2.3) er ekvivalent med henholdsvis:

(3.1) $x,y\hat{e}U \ \& \ \emptyset\neq\kappa(\kappa(y))\hat{e}Dom(\Pi)$

(3.2) $(x\Omega\kappa(y))\Omega\kappa(\kappa(y))\hat{e}[\Pi(\kappa(y))];2$

(3.3) $[\Pi(\kappa(y))];3((x\Omega\kappa(y))\Omega\kappa(\kappa(y)))=r$

Men i lys av definisjonen av C er (3.1) - (3.3) ekvivalent med $<x\Omega\kappa(y),\kappa(y)>\hat{e}Dom(C)$. Dette viser at punkt (f) holder.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Ad (g): Anta (1) <x,y>êDom(C) Da kan vi ved hjelp av definisjonen av C slutte at finnes noe r der følgende holder:

(2.1) x,yêU & ø≠κ(y)êDom(Π)
(2.2) xΩκ(y)ê[Π(κ(y))];2
(2.3) [Π(κ(y))];3(xΩκ(y))=r

Nå har man at κ(κ(y)) = κ(y). Derfor er (2.1) - (2.3) ekvivalent med at det finne r der man har:

(3.1) x,yêU & ø≠κ(κ(y))êDom(Π)
(3.2) xΩκ(κ(y))ê[Π(κ(κ(y)))];2
(3.3) [Π(κ(κ(y)))];3(xΩκ(κ(y)))=r

Men det at det finnes r slik at (3.1) - (3.3) holder er i lys av definisjonen av C ekvivalent med at <x,κ(y)>êDom(C). Dette viser at punkt (g) holder.

Ad (h): Anta (1) <x,y>êDom(C) Da kan vi ved hjelp av definisjonen av C slutte at finnes noe r der følgende holder:

(2.1) x,yêU & ø≠κ(y)êDom(Π)
(2.2) xΩκ(y)ê[Π(κ(y))];2
(2.3) [Π(κ(y))];3(xΩκ(y))=r

Nå er imidlertid (2.1) - (2.3) ekvivalent med at det finne r der man har:

(3.1) x,yêU & ø≠κ(y)êDom(Π)
(3.2) (xΩκ(y))Ωκ(y)ê[Π(κ(y))];2
(3.3) [Π(κ(y))];3((xΩκ(y))Ωκ(y))=r

Men det at det finnes r slik at (3.1) - (3.3) holder er i lys av definisjonen av C ekvivalent med at <xΩκ(y),y>êDom(C). Dette viser at punkt (h) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Teorem 9.4 Anta S=<I,R,Π> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom og at <I,R,C> er den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av S. Da har man at <I,R,C> faktisk er en relativ sannsynlighetsstruktur.

Bevis: Dette følger direkte fra Teorem 9.1 - Teorem 9.3 og definisjonen vi tidligere har gitt av relativ sannsynlighetsstruktur. **QED**.

Vi trenger den følgende sats i beviset for det neste teoremet.

Lemma 9.1 Anta <I,R> er en preordningsstruktur. Da gjelder for alle x,yêPt(I)=U at

xΩκ(y)≠ø → xΩκ(y) = κ(xΩy)

Bevis: Anta (1) xΩκ(y) ≠ø. Siden vi har per definisjon at κ(y)= Max(R,y) følger fra (1) at

(1.1) xΩMax(R,y)≠ø

Det følger også ved hjelp av denne definisjonen at det vil være tilstrekkelig å vise

(2) xΩMax(R,y) = Max(R,xΩy)

(a) Vi tar først for oss inklusjonen mot høyre i (2). Anta for vilkårlig z at (3) zêxΩMax(R,y) Ved hjelp av definisjonen av operasjonen Max kan man da slutte:

(4) zêx & zêy og (5) (Ar)(rêy → R(z,r))

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Fra (4) følger (6) zêxΩy. Fra (5) har vi (Ar)(rêxΩy → R(z,r)). Fra dette, (6) og definisjonen av Max kan vi da konkludere med at zêMax(R,xΩy).

(b) Vi tar så for oss inklusjonen mot venstre i (2). Fra (1.1) følger at det finnes w0 slik at

(7) w0êx & w0ê Max(R,y)

Siden Max(R,xΩy) Inkl xΩy Inkl x vil det være tilstrekkelig å vise:

(8) Max(R,xΩy) Inkl Max(R,y)

Anta for reduktio ad absurdum at (8) *ikke* holder. Da må det finnes noe a0 der vi har:

(9) a0êMax(R, xΩy) & ¬(a0êMax(R,y))

Fra (9) følger at (10) a0ê xΩy Inkl y. Fra (7), (9) og (10) kan man slutte (11) R*(w0,a0)
Fra den første konjunkten i (9) følger:

(12) (Az)(zêxΩy → R(a0,z))

Fra (7) følger w0êxΩy. Fra dette og (12) følger åpenbart R(a0,w0) som åpenbart strider mot (11), siden R*(w0,a0) per definisjon impliserer ¬(R(a0,w0)). Dette viser at (9) er umulig og derfor at (8) holder. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Teorem 9.4 Anta S=<I,R,Π> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom og at <I,R,C> er den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av S. Anta yêU = Pt(I) og at ø≠ κ(y) êDom(Π) og at Π(κ(y)) er multiplikativt. Da gjelder for alle x,z:

(a) <z,y>,<x,y> ê Dom(C) & C(x,y) > 0 → <z,xΩy> ê Dom(C)
(b) <x,y>ê Dom(C) & C(x,y)> 0 → (<z,xΩy>êDom(C) → <zΩx,y>ê Dom(C)
(c) <z,y>,<x,y> ê Dom(C) & C(x,y) > 0 → C(zΩx,y) = C(z,xΩy)*C(x,y)

Man gjenkjenner i punkt (a) - (c) de multiplikative aksiomene som ble introdusert og omtalt mot slutten av §3.

Bevis: *Ad (a)*: Anta (1) <z,y> ê Dom(C) og (2) <x,y> ê Dom(C). Anta dessuten at (3) C(x,y) > 0. Vi ønsker da å vise at <z,xΩy> êDom(C). Fra (1) og (2) følger ved hjelp av definisjonen av C at det finnes r1 og r2 slik at:

(4.1) z,yêU & ø≠κ(y)êDom(Π) & zΩκ(y)ê[Π(κ(y))];2 & [Π(κ(y))];3(zΩκ(y))=r2
(4.2) x,yêU & ø≠κ(y)êDom(Π) & xΩκ(y)ê[Π(κ(y))];2 & [Π(κ(y))];3(xΩκ(y))=r1

Fra (3), definisjonen av C og (4.2) kan man slutte at (5) r1 >0. Vi setter nå per definisjon:

(6) a=xΩκ(y)
(7) b=zΩκ(y)

Fra (5), (6) og (4.2) kan man da slutte at (8) aê[Π(κ(y))];2 & [Π(κ(y))];3(a) > 0
Fra dette, forutsetningen om at Π(κ(y)) er multiplikativ samt Definisjon 8.3 kan man slutte:

(9) (Ay)(yê[Π(κ(y))];2 → yΩaê[Π(a)];2

Fra (7) og (4.1) følger bêΠ(κ(y));2. Fra dette og (9) har man så (10) bΩaêΠ(a);2
I lys av (6) og (7) impliserer (10) at

(11) (zΩκ(y))Ω (xΩκ(y)) ê Π(xΩκ(y));2 Herav:
(12) zΩ(xΩκ(y)) ê Π(xΩκ(y));2

Nå har vi fra (4.2), siden Π(κ(y));3 er en sannsynlighetsfunksjon og r1>0 at

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(12.1) $x\Omega\kappa(y) \neq \emptyset$

Fra dette og Lemma 9.1 kan man så slutte (+) $x\Omega\kappa(y) = \kappa(x\Omega y)$. Fra (+) og (12) følger:

(13) $z\Omega\kappa(x\Omega y) \hat{e} \Pi(\kappa(x\Omega y));2$

Fra (12.1) og (+) følger også $\emptyset \neq \kappa(x\Omega y)$. Fra (8) og Definisjon 8.3 kan man slutte at $a\hat{e}Dom(\Pi)$. Men siden $a=x\Omega\kappa(y)$ og $\emptyset \neq \kappa(x\Omega y)$ kan man ved hjelp av (+) slutte:

(14) $\emptyset \neq \kappa(x\Omega y)\hat{e}Dom(\Pi)$

Fra (13) fremgår det at $z\Omega\kappa(x\Omega y)$ er med i domenet til $\Pi(\kappa(x\Omega y));3$ og derfor at det må finnes noe r slik at $\Pi(\kappa(x\Omega y));3(z\Omega\kappa(x\Omega y)) = r$. Fra dette, (13), (14) og definisjonen av C følger at $\langle z,x\Omega y\rangle \hat{e} Dom(C)$. Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for punkt (a).

Ad (b): Anta forutsetningene i satsen holder og anta (1) $\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C) \,\&\, C(x,y)>0$. Da følger ved hjelp av definisjonen av C at

(2) $\emptyset \neq \kappa(y)\hat{e}Dom(\Pi)$ og

(3) $x\Omega\kappa(y)\hat{e}[\Pi(\kappa(y))];2 \quad \& \quad [\Pi(\kappa(y))];3(x\Omega\kappa(y)) = r$

for noe r. Anta nå (4) $\langle z,x\Omega y\rangle \hat{e} Dom(C)$. Ved hjelp av definisjonen av C kan man fra dette slutte at det finnes r2 slik at

(5) $\emptyset \neq \kappa(x\Omega y)\hat{e}Dom(\Pi)$

(6) $z\Omega\kappa(x\Omega y)\hat{e}[\Pi(\kappa(x\Omega y))];2$

(7) $[\Pi(\kappa(x\Omega y))];3(z\Omega\kappa(x\Omega y)) = r2$

Fra (1) og den siste konjunkten i (3) samt definisjonen av C følger at $r>0$ og derfor at $x\Omega\kappa(y) \neq \emptyset$. Da har vi ved hjelp av Lemma 9, som vi beviste ovenfor, at:

(7.1) $\kappa(x\Omega y) = x\Omega\kappa(y)$

Fra (3) og definisjonen av multiplikativt sannsynlighetsrom og det at det forutsettes at $\Pi(\kappa(y))$ er multiplikativt følger at

(8) $[\Pi(\kappa(x\Omega y))];2 = [\Pi(x\Omega\kappa(y))];2 \;\text{Inkl}\; [\Pi(\kappa(y))];2$

Fra det at $\kappa(x\Omega y) = x\Omega\kappa(y)$ og (6) kan man slutte at $z\Omega x\Omega\kappa(y)\hat{e}[\Pi(\kappa(x\Omega y))];2$

Herav har vi ved hjelp av (8):

(9) $(z\Omega x)\Omega\kappa(y) \hat{e} [\Pi(\kappa(y))];2$

Siden $\Pi(\kappa(y))$ er et sannsynlighetsrom må da $(z\Omega x)\Omega\kappa(y)$ være med i domenet til $[\Pi(\kappa(y))];3$ og vi må da ha at det finnes r' slik at

(10) $[\Pi(\kappa(y))];3((z\Omega x)\Omega\kappa(y)) = r'$

Fra (2), (9), (10) samt definisjonen av C kan vi konkludere med at $\langle z\Omega x,y\rangle \hat{e} Dom(C)$. Dette viser at punkt (b) holder.

Ad (c): Anta forutsetningene i teoremet holder og at

(1) $\langle z,y\rangle,\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C) \,\&\, C(x,y)>0$

Fra dette og definisjonen av C følger det at det finnes reelle tall r1, r2 der:

(2.1) $\emptyset \neq \kappa(y)\hat{e}Dom(\Pi)$

(2.2) $z\Omega\kappa(y)\hat{e}[\Pi(\kappa(y))];2 \;\&\; r1 = [\Pi(\kappa(y))];3(z\Omega\kappa(y))$

(2.3) $x\Omega\kappa(y)\hat{e}[\Pi(\kappa(y))];2 \;\&\; r2 = [\Pi(\kappa(y))];3(x\Omega\kappa(y))$

Fra (1) og (2.3) følger det også i lys av definisjonen av C at (2.4) $r2>0$. Det følger også fra (2.1) - (2.3) at

(3.1) $C(z\Omega x,y) = [\Pi(\kappa(y))];3(z\Omega x\Omega\kappa(y)) = r3$ for noe r3

(3.2) $C(x,y) = [\Pi(\kappa(y))];3(x\Omega\kappa(y)) = r2 > 0$

Fra punkt (a) i teoremet samt (1) kan man slutte at $\langle z,x\Omega y\rangle \hat{e} Dom(C)$ og derfor at

(4) $C(z,x\Omega y) = [\Pi(\kappa(x\Omega y))];3(z\Omega\kappa(x\Omega y)) = r4$ for et eller annet reelt tall r4

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Nå har vi fra (3.2 at (5) $x\Omega\kappa(y) \neq \emptyset$ I motsatt fall ville vi r2 i sall fall ha vært 0. Det følger derfor ved hjelp av Lemma 9.1 at (6) $x\Omega\kappa(y) = \kappa(x\Omega y)$. Vi kan derfor fra (4) og (6) slutte:

(7) $C(z,x\Omega y) = [\Pi(x\Omega\kappa(y))];3(z\Omega x\Omega\kappa(y)) = r4$

Fra de to første konjunktene i (2.2) og (2.3) følger:

(8) $z\Omega x\Omega\kappa(y)\hat{e}[\Pi(\kappa(y))];2$

La oss nå per definisjon sette:

(9.1) $\alpha = \kappa(y)$

(9.2) $z0 = x\Omega y\Omega\kappa(y)$

(9.3) $x0 = x\Omega\kappa(y)$

Det følger da fra (2.3) at vi har (10) $x0\hat{e}[\Pi(\alpha)];2 \ \& \ [\Pi(\alpha)];3(x0) > 0$. Vi har derfor fra forutsetningene og Definisjon 8.3 at

(11) $[\Pi(\alpha)];3(z0) = [\Pi(\alpha)];3(x0) * [\Pi(x0)];3(z0)$

I lys av (3.1), (3.2) og (7) har vi da:

(12) $C(z\Omega x,y) = [\Pi(\alpha)];3(z0)$

$C(x,y) = [\Pi(\alpha)];3(x0)$

$C(z,x\Omega y) = [\Pi(x0)];3(z0)$

Fra (11) og (12) følger så det vi ønsker $C(z\Omega x,y) = C(z,x\Omega y)* C(x,y)$. Dette viser at punkt (c) holder.

Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

§10 Kanoniske preordningsstrukturer med assosierte sannsynlighetsrom bestemt av relative sannsynlighetsstrukturer.

Anta nå at <I,R,C> er en relativ sannsynlighetsstruktur slik dette begrep ble definert i §4. Det vi nå ønsker å vise er hvordan man gitt en slik struktur kan definere en preordningstruktur med assosierte sannsynlighetsrom, la oss kalle den <I,R,Π>. Dette innebærer at vi må definere funksjonen Π som til ethvert enkelhetsnivå tilordner visse delmengder av dette nivå sannsynlighetsrom. Vi gjør dette ved først å definere funksjonen $P(\kappa(y))$ og mengden $\sigma(\kappa(y))$ der $P(\kappa(y))$ er en sannsynlighetsfunksjon over $\kappa(y)$ som er entydig bestemt av $\kappa(y)$ så sant denne mengden er ikke-tom og $\sigma(\kappa(y))$ er en naturlig boolsk algebra over $\kappa(y)$.

Vi definerer først disse to begrepene. Dette gjøres slik:

Definisjon 10.1 Anta <I,R,C> er en relativ sannsynlighetsstruktur og at $y\hat{e}U$ (=Pt(I)). Da setter vi:

(a) $P(\kappa(y)) = Mg(<a,r>: (Ex)(x\hat{e}U \ \& \ a= x\Omega\kappa(y) \ \& \ C(x\Omega\kappa(y),\kappa(y))=r))$

(b) $\sigma(\kappa(y)) = Mg(a: (Er)(<a,r>\hat{e}P(\kappa(y))))$

Er <I,R,Π> en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom vil, som vi allerede har nevnt Π være en funksjon som tilordner eller fordeler diverse delmengder av de enkelte enkelhetsnivåene i preordningsstrukturen <I,R> sannsynlighetsrom. Gitt en relativ sannsynlighetsstruktur kan denne fordelingsfunksjonen Π defineres ved hjelp av $P(\kappa(y))$ og $\sigma(\kappa(y))$ på følgende måte:

Definisjon 10.2 Anta <I,R,C> er en relativ sannsynlighetsstruktur. Da setter vi:

$\Pi = Mg(<z,a>: (Ey)(y\hat{e}U \ \& \ z=\kappa(y)\neq\emptyset \ \& \ (Ev)(<v,y>\hat{e}Dom(C))$
$a = <\kappa(y), \sigma(\kappa(y)), P(\kappa(y))>))$

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Vi kan nå definere hva vi mener den kanoniske preordningsstrukturen <I,R,H> med assosierte sannsynlighetsrom bestemt av den relative sannsynlighetsstrukturen <I,R,C>:

Definisjon 10.3 Anta S = <I,R,C> er en relativ sannsynlighetsstruktur. Vi kaller da strukturen S' =<I,R,Π> der Π er definert som i Definisjon 10.2 for den *kanoniske preordningsstrukturen med assosierte sannsynlighetsrom bestemt av* S

Det som nå er vår oppgave er å vise at dersom S' =<I,R,Π> er den kanoniske preordningsstrukturen med assosierte sannsynlighetsrom bestemt av S, der S= <I,R,C> er en relativ sannsynlighetsstruktur, så er det *faktisk* slik S' er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom. De teoremer vi skal gi bevis for i det følgende viser at dette holder.
Vi starter med:

Teorem 10.1 Anta <I,R,C> er en relativ sannsynlighetsstruktur. Da har man:

(a) <x,y>ê Dom(C) → <κ(y),y> ê Dom(C)
(b) <x,y>ê Dom(C) → C(κ(y),y)=1
(c) <x,y>ê Dom(C) ↔ <xΩ κ(y), κ(y)> ê Dom(C)
(d) <x,y>ê Dom(C) ↔ <x,κ(y)>ê Dom(C)
(e) <x,y>ê Dom(C) ↔ <xΩκ(y),y>ê Dom(C)

Vi gir ikke noe detaljert bevis for denne satsen fordi den kan bevises på nøyaktig samme måte som Teorem 3.1 i §3. Det er imidlertid begrepsmessig en forskjell mellom denne satsen og Teorem 3.1. Man bør være klar over at en relativ sannsynlighetsstruktur er en ren mengdeteoretisk struktur, det er et begrep som er definert i rent mengdeteoretiske termer, det kan defineres utelukkende ved hjelp av medlemskapsrelasjonen "xêy" og mengdepredikatet "M(x)" (" x er en mengde"). Teorem 3.1 er derimot et teorem som inneholder predikater som ikke er rent mengdeteoretiske eller som i alle fall ikke i dette essay har blitt definert ved hjelp av rent mengdeteoretiske begreper.

Teorem 10.2 Anta <I,R,C> er en relativ sannsynlighetsstruktur. La σ(κ(y)) og P(κ(y)) være definert som ovenfor. Anta yêU & (Ex)(<x,y>êDom(C)). Da har man at <κ(y),σ(κ(y)), P(κ(y))> er et sannsynlighetsrom over κ(y).

Bevis: Anta <I,R,C> er en relativ sannsynlighetsstruktur og at P(κ(y)) og σ(κ(y)) er definert som ovenfor. Anta (1) yêU & (Ex)(<x,y>êDom(C)). Vi må først vise σ(κ(y)) er en naturlig boolsk algebra over κ(y).

(a) Vi viser først at κ(y) ≠ø. Dette følger direkte fra (1) og det forhold at en relativ sannsynlighetsstruktur oppfyller kravet <x,y>êDom(C) → (Ez)Ba(z,y). For fra dette og (1) følger (Ez)Ba(z,y). Fra dette og definisjonen av Ba kan man slutte ø≠κ(y) Inkl z som i sin tur impliserer κ(y)≠ø.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(b) Dernest må vi vise at $\kappa(y)\hat{e}\sigma(\kappa(y))$. Fra (1) følger siden $<I,R,C>$ oppfyller kravet D5 at $<y,y>\hat{e}Dom(C)$. Fra dette og punkt (e) i Teorem 10.1 kan man så utlede
(2) $<y\Omega\kappa(y),\kappa(y)>\hat{e}Dom(C)$. Siden $\kappa(y)$ Inkl y følger fra (2) at (3) $<\kappa(y),\kappa(y)>\hat{e}Dom(C)$. Fra dette følger $(Ev)(<v,\kappa(y)>\hat{e}Dom(C)$. Men herav kan vi ved hjelp av punkt (b) i Teorem 10.1 slutte at (4) $C(\kappa(y),\kappa(y))=1$ Fra dette har vi siden $\kappa(y)=\kappa(y)\Omega\kappa(y)$ at $C(\kappa(y)\Omega\kappa(y), \kappa(y))=1$. Vi har derfor:

(5) $\kappa(y)\Omega\kappa(y))=\kappa(y)$ $\&C(\kappa(y)\Omega\kappa(y), \kappa(y))=1$

Fra definisjonen av $P(\kappa(y))$ følger

(6) $<\kappa(y),1>\hat{e}P(\kappa(y)) \leftrightarrow (Ez)(z\hat{e}U \& \kappa(y)=z\Omega\kappa(y) \& C(z\Omega\kappa(y),\kappa(y))=1$

Høyre side i (6) følger fra (5). Vi har derfor $<\kappa(y),1>\hat{e}P(\kappa(y))$. Men fra dette og definisjonen av $\sigma(\kappa(y))$ følger $\kappa(y)\hat{e}\sigma(\kappa(y))$.

(c) Vi må vise at følgende holder: $x\hat{e}\sigma(\kappa(y)) \rightarrow x$ Inkl $\kappa(y)$ for alle x.
Anta derfor for vilkårlig x at (2) $x\hat{e}\sigma(\kappa(y))$. Da har man ved hjelp av definisjonen av $\sigma(\kappa(y))$ at (3) $<x,r>\hat{e}P(\kappa(y))$ for noe r. Dette i sin tur impliserer at det finnes noe z der

(4) $z\hat{e}U \& x=z\Omega\kappa(y) \& C(z\Omega\kappa(y),\kappa(y))=r$

Men fra den andre konjunkten i (4) følger åpenbart x Inkl $\kappa(y)$.

(d) Det er også nødvendig å vise at $x\hat{e}\sigma(\kappa(y)) \rightarrow (\kappa(y)\text{-}x)\ \hat{e}\sigma(\kappa(y))$ for alle x.
Anta for vilkårlig x at (2) $x\hat{e}\sigma(\kappa(y))$. Ved hjelp av definisjonen av $\sigma(\kappa(y))$ følger da at $<x,r>\hat{e}\ P(\kappa(y))$ for noe r. Dette i sin tur impliserer at det finnes noe z der

(4) $z\hat{e}U \& x=z\Omega\kappa(y) \& C(z\Omega\kappa(y),\kappa(y))=r$

Den siste konjunkten impliserer (5) $<z\Omega\kappa(y),\kappa(y)>\ \hat{e}Dom(C)$. Herav kan vi ved hjelp av punkt (c) i Teorem 10.1 slutte at (6) $<z,y>\hat{e}Dom(C)$. Fra dette kan man ikraft av kravet D3 slutte at (7) $<Neg(z),y>\hat{e}Dom(C)$. Fra dette kan man så ved hjelp av punkt (c) i Teorem 10.1 slutte: $<Neg(z)\Omega\kappa(y), \kappa(y)>\hat{e}Dom(C)$, med andre ord, siden $Neg(z)=(I\text{-}z)$, at

(8) $<(I\text{-}\ z)\Omega\kappa(y),\kappa(y)>\ \hat{e}Dom(C)$

Nå har man

(9) $w\hat{e}(I\text{-}z)\Omega\ \kappa(y) \leftrightarrow w\hat{e}\kappa(y) \& w\hat{e}I \& \neg(w\hat{e}z)$
$\leftrightarrow we(\ \kappa(y) - (z\Omega\kappa(y))$

Herav: (10) $(I\text{-}z)\Omega\kappa(y) = \kappa(y) - (z\Omega\kappa(y))$
Fra (8) og (10) følger:

(11) $<(\kappa(y) - (z\Omega\kappa(y)))\ \Omega\kappa(y),\kappa(y)>\ \hat{e}Dom(C)$

og derfor at det finnes r slik at

(12) $C((\kappa(y) - (z\Omega\kappa(y)))\ \Omega\kappa(y),\kappa(y))=r$

I lys av (4) har man $\kappa(y) -x = \kappa(y)- (z\Omega\kappa(y)) = (\kappa(y)- (z\Omega\kappa(y)))\Omega\kappa(y)$
Fra dette, (12) og definisjonen av $P(\kappa(y))$ kan man slutte $<\kappa(y)\text{-}x,r>\hat{e}P(\kappa(y))$ og derfor ved hjelp av definisjonen av $\sigma(\kappa(y))$ at $(\kappa(y)\text{-}x)\hat{e}\sigma(\kappa(y))$.

(e) Endelig er det nødvendig å vise at $x,v\hat{e}\ \sigma(\kappa(y)) \rightarrow (xUv)\hat{e}\sigma(\kappa(y))$
Anta derfor for vilkårlige x,v at (2) $x,v\hat{e}\sigma(\kappa(y))$. Det følger da ved hjelp av definisjonen av $\sigma(\kappa(y))$ at det må finne r1, r2 slik at

(3.1) $<x,r1>\hat{e}P(\kappa(y))$

(3.2) $<v,r2>\hat{e}P(\kappa(y))$

Fra dette og definisjonen av $P(\kappa(y))$ følger eksistensen av z1, z2 slik at

(4.1) $z1\hat{e}U \& x=z1\Omega\kappa(y) \& C(z1\Omega\kappa(y),\kappa(y))=r1$

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(4.2) z2êU & v=z2Ωκ(y) & C(z2Ωκ(y),κ(y))=r2

Fra den siste konjunkten i (4.1) og den siste konjunkten i (4.2) kan man ved hjelp av D4 slutte at det må finnes r3 slik at

(5) C((z1Uz2)Ωκ(y),κ(y)) = r3

Fra (4.1) og (4.2) følger også (6) z1Uz2êU & xUv = (z1Uz2)Ωκ(y)

Fra (5), (6), definisjonen av P(κ(y)) og definisjonen av σ(κ(y)) følger at (xUv)êσ(κ(y)).

Fra det som er vist under punktene (a) - (e) ovenfor fremgår det at vi har vist at σ(κ(y)) er en naturlig boolsk algebra over κ(y) om (Ez)(<z,y>êDom(C))

Det gjenstår å vise at P(κ(y)) er en funksjon som oppfyller kravene (a) - (d) i Definisjon 7.2 under forutsetningene som er nevnt i satsen.

(f) Vi viser først at P(κ(y)) er en funksjon. Anta (2) <x,r1>,<x,r2>ê P(κ(y)). Da følger ved hjelp av definisjonen av P(κ(y)) at det finnes z1,z2 der:

(3.1) z1êU & x=z1Ωκ(y) & C(z1Ωκ(y),κ(y))=r1

(3.2) z2êU & x=z2Ωκ(y) & C(z2Ωκ(y),κ(y))=r2

Fra den andre konjunkten i (3.1) og den andre konjunkten i (3.2) følger z1Ωκ(y) = z2Ωκ(y). Fra dette og de tredje konjunktene i henholdsvis (3.1) og (3.2) følger r1=r2.

(g) Det er opplagt i lys av definisjonene av P(κ(y)) og σ(κ(y)) at domenet til P(κ(y)) er identisk med σ(κ(y)). Man har altså Dom(P(κ(y)))= σ(κ(y)).

(h) Det er nødvendig at vi viser Rgn(P(κ(y))) Inkl [0,1]. Anta <x,r>êP(κ(y)) for noe x. Da finnes z slik at z1êU & x=zΩκ(y) & C(zΩκ(y),κ(y))=r. Det følger fra dette at rêRgn(C). Men Rgn(C) Inkl [0,1]. Da må vi ha rê[0,1]

(i) Under punkt (b) ovenfor viste vi, gitt forutsetningen (Ez)(<z,y>êDom(C)) at <κ(y),1>êP(κ(y)). Men fra dette følger siden P(κ(y)) er en funksjon at P(κ(y))(κ(y))=1

(h) Det eneste som det nå gjenstår å bevise er:

(+) x,zêσ(κ(y)) & xΩz=ø → P(κ(y))(xUz)=P(κ(y))(x)+P(κ(y))(z)

Anta derfor (2) x,zêσ(κ(y)) & xΩz=ø. Fra dette og definisjonen av σ(κ(y)) følger at det må finnes r1 og r2 der:

(3) <x,r1>ê P(κ(y)) &<z,r2>êP(κ(y))

Fra dette og definisjonen av P(κ(y)) kan man slutte at det finnes u1 og u2 der:

(4.1) u1êU & x=u1Ωκ(y) & C(u1Ωκ(y),κ(y))=r1

(4.2) u2êU & z=u2Ωκ(y) & C(u2Ωκ(y),κ(y))=r2

Det følger at (5) C(x,κ(y))= r1 & C(z,κ(y))= r2. Fra dette, D8 og det at xΩz=ø kan man utlede: (6) C(xUz,κ(y)) = C(x,κ(y))+ C(z,κ(y))

Dette impliserer sammen med (5) at

(7) C(xUz,κ(y)) =r1+r2 og derfor i lys av (4.1) og (4.2):

(8) C((u1Uu2)Ωκ(y),κ(y))=r1+r2

Nå har man (9) xUz = (u1Uu2)Ωκ(y) & xUzê U. Fra (8), (9) og definisjonen av P(κ(y)) følger P(κ(y))(xUz)=r1+r2. Men fra dette, (3) og det faktum at P(κ(y)) er en funksjon følger det vi ønsker: P(κ(y))(xUz) = P(κ(y))(x) + P(κ(y))(z)

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Dette viser at (+) holder. Vi har nå gitt et fullstendig bevis for <κ(y), σ(κ(y)),P(κ(y))> er et sannsynlighetsrom over κ(y). **QED**.

Teorem 10.3 Anta <I,R,C> er en relativ sannsynlighetsstruktur og at Π er definert som i Definisjon 10.2. Da har man at <I,R,Π> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom

Bevis: At R er en preordning over I følger uten videre fra forutsetningene i teoremet.

(a) Vi viser først at Π er en funksjon. Anta (1) <z, a1>ê Π & <z,a2>êΠ . Vi ønsker å vise at a1=a2. Fra (1) og definisjonen av Π følger at det må finnes y1 og y2 der man har:

(2) y1êU & z= κ(y1) & (Ev)(<v,y1>êDom(C)) & a1=< κ(y1), σ(κ(y1)),P(κ(y1))>

(3) y2êU & z= κ(y2) & (Ev)(<v,y2>êDom(C)) & a2=< κ(y2), σ(κ(y2)),P(κ(y2))>

Fra den andre konjunkten i (2) og den andre konjunkten i (3) følger κ(y1)=z=κ(y2). Fra dette, den siste konjunkten i (2) og den siste konjunkten i (3) følger umiddelbart at a1=a2. Dette viser åpenbart at Π er en funksjon.

(b) Anta (1) xêDom(Π): Da må det finnes a slik at (2) <x,a>êΠ. Fra dette og definisjonen av Π kan vi slutte at det må finnes y slik at

(3) yêU & x= κ(y) ≠ø & (Ev)(<v,y>êDom(C)) & a=< κ(y), σ(κ(y)),P(κ(y))>

Fra det at Π er en funksjon og (1) følger Π(x)=a. Fra dette og den siste konjunkten i (3) kan man så slutte Π(x)=< κ(y), σ(κ(y)),P(κ(y))>. Fra den tredje konjunkten i (3) og Teorem 10.2 følger at < κ(y), σ(κ(y)),P(κ(y))> er et sannsynlighetsrom over κ(y)=x. Det følger at Π(x) er et sannsynlighetsrom over x

(c) Vi må bevise at (+) Dom(Π) Inkl UN(Mg(Pt([w];R-{ø}: wêI))

Anta (1) xêDom(Π). Da har vi at det må finnes a slik at <x,a>êΠ. Fra dette og definisjonen av Π følger (som ovenfor) eksistensen av et utsagn y der vi har:

(2) x= κ(y) ≠ø & (Ev)(<v,y>êDom(C) & a=< κ(y), σ(κ(y)),P(κ(y))>

Nå har vi per definisjon at κ(y) = Max(R,y) og videre at κ(y)≠ø. Det følger at det må finnes noe w0 der (3) w0êI & w0êMax(R,y) =x. Men fra dette følger:

(4) x=Max(R,y) Inkl [w0];R

Fra (3) og (4) har vi ø≠x Inkl [w0];R og derfor xê(Pt([w0];R)- {ø}). Fra dette og (3) kan man slutte xê UN(Mg(Pt([w];R-{ø}: wêI)). Dette viser at (+) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for at strukturen <I,R,Π> oppfyller alle de krav som stilles til en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom. **QED**.

Vi har nå også gitt bevis for den følgende sats som kan oppfattes som et korollar til Teorem 10.3 og som sier at den kanoniske preordningsstrukturen med assosierte sannsynlighetsrom som er bestemt av den relative sannsynlighetsstrukturen <I,R,C> faktisk er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom.

Teorem 10.4 Anta S=<I,R,C> er en relativ sansynlighetsstruktur. Anta S'=<I,R,Π> er den kanoniske preordningsstrukturen med assosierte sannsynlighetsrom bestemt av S. Da er S' en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

La nå S=<I,R,C> være en relativ sannsynlighetsstruktur. La Π, P(κ(y)) og σ(κ(y)) være definert som tidligere, det vil si ved definisjonene Definisjon 10.2 og Definisjon 10.3. Vi kan da definere en funksjon C* ved hjelp av disse begrepene nøyaktig som vi gjorde i §8 ved hjelp av Definisjon8.2. Med andre ord kan vi sette:

C* = Mg(<<x,y>,r>: x,yêU & ø≠κ(y)êDom(Π) &
xΩκ(y)ê[Π(κ(y))];2 &[Π(κ(y))];3(xΩκ(y))=r)

Merk at denne definisjonen ikke er identisk med Definisjon 8.2 fordi Π nå er et definert begrep. Det vi nå ønsker å vise er at C* = C. La oss først bare sette opp denne definisjonen av C* formelt:

Definisjon 10.4 Anta <I,R,C> er en relativ sannsynlighetsstruktur og anta at Π er definert som i Definisjon 10.2. Da er C* definert ved:

C* = Mg(<<x,y>,r>: x,yêU & ø≠κ(y)êDom(Π) &
xΩκ(y)ê[Π(κ(y))];2 &[Π(κ(y))];3(xΩκ(y))=r)

Vi ønsker altså å bevise at C=C* om <I,R,C> er en relativ sannsynlighetsstruktur. Imidlertid finner vi det hensiktsmessig å bevise den følgende sats først fordi vi kan bruke den i beviset for at C=C*.

Teorem 10.5 Anta <I,R,C> er en relativ sannsynlighetsstruktur og at Π, P(κ(y)) og σ(κ(y)) er definert som tidligere. Da har man:

(a) Dersom <x,y>êDom(C) holder:
  (i) P(κ(y))(xΩκ(y)) = C(xΩκ(y),κ(y))= C(x,y)
  (ii) σ(κ(y)) = Mg(xΩκ(y): <x,y>êDom(C))
(b) Dersom (Ez)(<z,y>êDom(C)) så har man:
  Π(κ(y)) = <κ(y), σ(κ(y)), P(κ(y))>
(c) Dersom <x,y>êDom(C) gjelder:
  [Π(κ(y))];3(xΩκ(y)) = P(κ(y))(xΩκ(y))

Bevis: *Ad (a)*: Anta (1) <x,y>êDom(C). Dette er i lys av Teorem 10.1 c ekvivalent med at (2) <xΩκ(y),κ(y)>êDom(C). Fra dette siste kan man slutte at det finnes r slik at (3) C(xΩκ(y),κ(y)) = r. Nå må det åpenbart være slik at xΩκ(y)=xΩκ(y). Fra dette følger at det finnes a slik at (4) a=xΩκ(y). (1) impliserer også at (5) xêU (C Inkl UxU). Vi har derfor: (6) xêU & a=xΩκ(y) & C(xΩκ(y),κ(y))=r
Fra dette og definisjonen av P(κ(y)) følger <a,r>êP(κ(y)) og derfor siden P(κ(y)) er en funksjon at P(κ(y))(a)=r. Fra dette, (3) og (4) følger det vi ønsker:

P(κ(y))(xΩκ(y)) = C(xΩκ(y),κ(y))

Siden <x,y>êDom(C) følger ved hjelp av Teorem 10.1d at <x,κ(y)>êDom(C). Fra dette og D7 kan man konludere at C(xΩκ(y),κ(y)) = C(x,κ(y)). Men siden <x,y>êDom(C) har vi også ved hjelp av F3 at C(x,κ(y))=C(x,y). Samler vi sammen ser man at

(6) P(κ(y))(xΩκ(y)) = C(xΩκ(y),κ(y))=C(x,y)

Dette viser at (i) under punkt (a) holder.

La oss se på (ii) under punkt (a): Vi har for alle z at:

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

$z \hat{e} \sigma(\kappa(y)) \leftrightarrow (Er)(\langle z,r\rangle \hat{e} P(\kappa(y))$
$\leftrightarrow (Er)(Ex)(x \hat{e} U \,\&\, z = x\Omega\kappa(y) \,\&\, C(x\Omega\kappa(y),\kappa(y))=r)$
$\leftrightarrow (Ex)(x \hat{e} U \,\&\, z = x\Omega\kappa(y) \,\&\, \langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C))$ (Jmf. (3) og (6))
$\leftrightarrow z \hat{e} Mg(x\Omega\kappa(y): \langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C))$

Dette viser at (ii) under punkt (a) holder.

Ad (b): Anta (1) $\langle z,y\rangle \hat{e} Dom(C)$ for noe z. Det følger da ved hjelp av Teorem 10.2 at $\langle \kappa(y), \sigma(\kappa(y)), P(\kappa(y))\rangle$ er et sannsynlighetsrom over $\kappa(y)$ og derfor at det finnes a slik at (2) $a = \langle \kappa(y), \sigma(\kappa(y)), P(\kappa(y))\rangle$. Fra (1) følger (3) $(Ez)(\langle z,y\rangle \hat{e} Dom(C))$. Fra (1) og F1 følger også $(Ez)Ba(z,y)$ og derfor at (4) $b = \kappa(y) \neq \emptyset$ for noe b. Fra (2), (3) og (4) samt definisjonen av Π følger $\langle b,a\rangle \hat{e} \Pi$ og derfor, siden Π er en funksjon at (5) $\Pi(b)=a$. Men fra dette, (2) og (4) følger (6) $\Pi(\kappa(y)) = \langle \kappa(y), \sigma(\kappa(y)), P(\kappa(y))\rangle$. Dette viser at punkt (b) holder.

Ad (c): Anta (1) $\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C)$. Da følger ved hjelp av punkt (b) at $\Pi(\kappa(y)) = \langle \kappa(y), \sigma(\kappa(y)), P(\kappa(y))\rangle$ og derfor at (2) $[\Pi(\kappa(y))];3 = P(\kappa(y))$. Siden $\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C)$ har vi ved hjelp av punkt(a), underpunkt (ii), at $x\Omega\kappa(y) \hat{e} \sigma(\kappa(y))$. Fra dette og (2) følger så $[\Pi(\kappa(y))];3(x\Omega\kappa(y)) = P(\kappa(y))(x\Omega\kappa(y))$.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Teorem 10.6 Anta $\langle I,R,C\rangle$ er en relativ sannsynlighetsstruktur. Da gjelder: $C^*=C$

Bevis: *(a)* Vi viser først inklusjonen mot høyre, ie. C^* Inkl C. Anta (1) $\langle\langle x,y\rangle,r\rangle \hat{e} C^*$. Da følger ved hjelp av definisjonen av C^* at

(2.1) $x,y \hat{e} U \,\&\, \emptyset \neq \kappa(y) \hat{e} Dom(\Pi)$
(2.2) $x\Omega\kappa(y) \hat{e} [\Pi(\kappa(y))];2$
(2.3) $[\Pi(\kappa(y))];3(x\Omega\kappa(y))=r$

Fra $\kappa(y) \hat{e} Dom(\Pi)$ følger $\langle \kappa(y),r1\rangle \hat{e} \Pi$ for noe r1. Fra dette og definisjonen av Π kan man slutte (3) $(Ez)(\langle z,y\rangle \hat{e} Dom(C))$. Fra dette og Teorem 10.5 følger:

(4) $[\Pi(\kappa(y))];3 = P(\kappa(y))$

Fra (2.2), (3) og Teorem 10.5 kan man slutte at

(5) $x\Omega\kappa(y) \hat{e} [\Pi(\kappa(y))];2 = \sigma(\kappa(y))$ Vi har derfor:

(6) $\langle x\Omega\kappa(y),r2\rangle \hat{e} P(\kappa(y))$ for noe r2. I lys av definisjonen av $P(\kappa(y))$ kan vi da slutte at det må finnes z slik at

(6.1) $z \hat{e} U \,\&x\Omega\kappa(y) = z\Omega\kappa(y)$ og (6.2) $C(x\Omega\kappa(y),\kappa(y)) = r2$

Men fra (6.2) følger $\langle x\Omega\kappa(y),\kappa(y)\rangle \hat{e} Dom(C)$, og ved hjelp av dette og Teorem 10.1 c følger $\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C)$. Herav følger ved hjelp av Teorem 10.5 c at

$[\Pi(\kappa(y))];3(x\Omega\kappa(y)) = P(\kappa(y))(x\Omega\kappa(y)) = C(x\Omega\kappa(y), \kappa(y)) = C(x,y)$.

Fra dette og (2.3) kan man konkludere med at $C(x,y)=r$ og derfor $\langle\langle x,y\rangle,r\rangle \hat{e} C$.

Dette viser inklusjonen mot høyre.

(b) Vi tar så for oss inklusjonen mot venstre, ie. C Inkl C^*. Anta (1) $\langle\langle x,y\rangle r\rangle \hat{e} C$. Da følger siden C er en funksjon at (2) $C(x,y)=r$. Siden det fra (1) også følger at (3) $\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C)$ har vi ved hjelp av F3 at $C(x,y) = C(x,\kappa(y))$. Videre har vi fra (3) og Teorem 10.1 at $\langle x,\kappa(y)\rangle \hat{e} Dom(C)$. Fra dette og D7 følger $C(x\Omega\kappa(y),\kappa(y)) = C(x,\kappa(y))$. Vi har derfor $C(x,y) = C(x\Omega\kappa(y),\kappa(y))$. Fra dette og (2) følger så

(4) $C(x,y) = C(x\Omega\kappa(y),\kappa(y)) = r$

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Følgelig har vi fra (3),(4) og Teorem 10.5 $P(\kappa(y))(x\Omega\kappa(y))=r$ og derfor (igjen ved hjelp av Teorem 10.5) at (5) $[\Pi(\kappa(y))];3(x\Omega\kappa(y))=r$.

Fra (3) og F1 følger $(Ez)Ba(z,y)$. Herav $\emptyset\neq\kappa(y)$. Fra dette, (3) og definisjonen av Π kan man så slutte at $\kappa(y)\hat{e}Dom(\Pi)$ og derfor (6) $\emptyset\neq\kappa(y)\hat{e}Dom(\Pi)$

Videre følger ved hjelp av (3), (4) definisjonen $\sigma(\kappa(y))$ og Teorem 10.5 at

(7) $x\Omega\kappa(y)\ \hat{e}\sigma(\kappa(y)) = [\Pi(\kappa(y))];2$

Fra (6), (7), (5) og definisjonen av C* følger så at $<<x,y>,r>\hat{e}C^*$.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Vi har nå sett at om $<I,R,\Pi>$ er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom og C defineres som ved Definisjon 8.2 så er $<I,R,C>$ en relativ sannsynlighetsstruktur. Vi har også vist det omvendte, nemlig at dersom $<I,R,C>$ er en relativ sannsynlighetsstruktur så kan man på kanonisk vis, ved hjelp av Definisjonene 10.1 og 10.2 definere $P(\kappa(y))$, $\sigma(\kappa(y))$ og Π på en slik måte at man kan vise at $<I,R,\Pi>$ er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom.

Vi har også vist at dersom $<I,R,\Pi>$ er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom, C defineres som ved Definisjon 8.2 , $y\hat{e}Pt(I)$ og $\Pi(\kappa(y))$ er multiplikativt så oppfyller y de følgende krav:

(M1) $<z,y>,<x,y>\ \hat{e}\ Dom(C)\ \&\ C(x,y) > 0\ \rightarrow <z,x\Omega y>\ \hat{e}\ Dom(C)$

(M2) $<x,y>\hat{e}\ Dom(C)\ \&\ C(x,y)> 0\ \rightarrow (<z,x\Omega y>\hat{e}Dom(C) \rightarrow <z\Omega x,y>\hat{e}\ Dom(C)$

(M3) $<z,y>,<x,y>\ \hat{e}\ Dom(C)\ \&\ C(x,y) > 0\ \rightarrow\ C(z\Omega x,y) = C(z,x\Omega y)*C(x,y)$

Det er naturligvis det siste kravet som er bakgrunnen for at vi kaller $\Pi(\kappa(y))$ for multiplikativt. Det vi nå vil forsøke å gjøre er å vise at det omvendte også holder, nemlig at dersom vi tar vårt utgangspunkt i en relativ sannsynlighetsstruktur $<I,R,C>$, definerer $P(\kappa(y))$, $\sigma(\kappa(y))$ og Π som ved Definisjon 10.1 og 10.2, antar at $y\hat{e}Pt(I)=U$ og at $\kappa(y)\hat{e}Dom(\Pi)$ og at y oppfyller kravene M1- M3 ovenfor så vil $\Pi(\kappa(y))$ være multiplikativt, det vil si oppfylle kravene nevnt i Definisjon 8.3.

La oss formulere dette eksplisitt som et teorem:

Teorem 10.7 Anta $<I,R,C>$ er en relativ sannsynlighetsstruktur. Anta $P(\kappa(y))$, $\sigma(\kappa(y))$ og Π er definert som tidligere. Anta $y\hat{e}Pt(I)=U$ er et utsagn som oppfyller kravene M1 - M3 ovenfor for alle x og z. og at $\kappa(y)\hat{e}Dom(\Pi)$. Da er $\Pi(\kappa(y))$ multiplikativt, dvs. oppfyller kravene i Definisjon 8.3

Bevis: Før vi starter med selve beviset minner vi om at under forutsetningene i satsen vil $<I,R,\Pi>$ være, som vi har bevist, en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom og den kanoniske sådan bestemt av $<I,R,C>$.

Vi setter (1) $\alpha= \kappa(y)$. Vi har da fra forutsetningene at (1.1) $\alpha\hat{e}Dom(\Pi)$. La β være et vilkårlig utsagn der (2) $\beta\hat{e}[\Pi(\alpha)];2\ \&\ [\Pi(\alpha)];3(\beta) > 0$. Vi må da vise at de følgende påstander holder

(I) $[\Pi(\beta)];2\ \ Inkl\ \ [\Pi(\alpha)];2$

(II) $(A\gamma)(\gamma\hat{e}[\Pi(\beta)];2\ \rightarrow\ [\Pi(\alpha)];3(\gamma) = [\Pi(\alpha)];3(\beta) * [\Pi(\beta)];3(\gamma))$

(III) $(A\gamma)(\gamma\hat{e}[\Pi(\alpha)];2\ \rightarrow\gamma\Omega\beta\hat{e}[\Pi(\beta)];2)$

(IV) $\beta\ \hat{e}Dom(\Pi)$

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Siden vi antar α=κ(y)êDom(Π) følger det at det må finnes noe a slik at (3) <α,a>êΠ. Fra dette og definisjonen av Π følger det at det må finnes noe z der vi har:

(4) zêU & α= κ(z) ≠ø & (Ev)(<v,z>êDom(C) & a= <κ(z), σ(κ(z)), P(κ(z))>

Fra (1) har vi (5) α=κ(y). Fra (3) kan man slutte, siden det følger fra forutsetningene og tidligere teoremer at Π er en funksjon at Π(α)=a, og siden man fra (5) og den andre konjunkten i (4) kan man slutte at κ(y)=κ(z), følger ved hjelp av den siste konjunkten i (4) at

(6) Π(α) = <κ(y), σ(κ(y)), P(κ(y))>

Nå har vi fra (2) at βê[Π(α)];2 . Dette og (6) impliserer (7) β êσ(κ(y)). Fra dette og definisjonen av σ(κ(y)) følger at det finnes noe r2 slik at (8) <β,r2>êP(κ(y)). I sin tur følger fra dette ved hjelp av definisjonen av P(κ(y)) at det må finnes noe x slik at

(9) xêU & β=xΩκ(y) & C(xΩκ(y), κ(y))=r2

Fra (2) og (6) følger (10) [Π(α)];3(β)=P(κ(y))(β)=r2 >0. Fra dette at r2>0 og den siste konjunkten i (9) kan man slutte at

(11) xΩκ(y)≠ø

Ved hjelp av et lemma vi tidligere viste, Lemma 9.1, følger fra (11) at

(12) κ(xΩy) = xΩκ(y) Da ved hjelp av (11):

(12.1) κ(xΩy) = xΩκ(y)≠ø

Fra den siste konjunkten i (9) følger <xΩκ(y),κ(y)>êDom(C). Fra dette kan man så ved hjelp av Teorem 10.1 c slutte <x,y>êDom(C) Fra dette og Teorem 10.1 d følger <x,κ(y)>êDom(C). Herav følger så ved hjelp av D7 at C(x,κ(y))= C(xΩκ(y),κ(y)). Fra det at <x,y>êDom(C) følger også ved hjelp av F3 at C(x,y)=C(x,κ(y)). Fra det vi her har nevnt ser man at vi må ha

C(x,y)=C(xΩκ(y),κ(y))=r2 >0 i lys av (9)

Fra M1 følger <x,y>êDom(C) & C(x,y)>0 → <x,xΩy>êDom(C)

Siden vi har C(x,y)>0 &<x,y>êDom(C) følger

(12.2) <x,xΩy>êDom(C)

og derfor (Ez)(<z,xΩy>êDom(C). Fra dette kan man ved hjelp av Teorem 10.2 slutte at

(12.3) <κ(xΩy), σ(κ(xΩy)), P(κ(xΩy))> er et sannsynlighetsrom over κ(xΩy).

Fra (12.1) - (12.3) og definisjonen av Π følger:

(13) Π(κ(xΩy)) = <κ(xΩy), σ(κ(xΩy)), P(κ(xΩy))>

Siden β=xΩκ(y)= κ(xΩy) i følge (9) og (12.1) følger ved hjelp av (13) at βêDom(Π). Dette viser at (IV) ovenfor holder.

Fra (13) og det at β=κ(xΩy) følger også:

(14) [Π(β)];2 = σ(κ(xΩy))

(a) Anta nå for vilkårlig γ at (15) γê[Π(β)];2. Da følger ved hjelp av (14) at γêσ(κ(xΩy)). Fra dette og definisjonen av σ(κ(xΩy)) følger at det må finnes z og r' der:

(16) γ= zΩκ(xΩy) & C(zΩκ(xΩy), κ(xΩy))=r'

Fra dette følger:

(16.1) γ= zΩκ(xΩy) & <zΩκ(xΩy), κ(xΩy)>êDom(C)

Fra dette følger fordi xΩκ(y) = κ(xΩy)

(16.2) γ= zΩxΩκ(y) & <zΩxΩκ(y), xΩκ(y)>êDom(C)

Nå har vi ovenfor bevist at C(x,y)>0 & <x,y>êDom(C). Fra dette siste og F3 følger C(x,y)=C(x,κ(y)) og derfor C(x,κ(y)) >0. Men fra <x,y>êDom(C) og Teorem 10.1d har vi <x,κ(y)>êDom(C). Vi har derfor (*) <x,κ(y)>êDom(C) & C(x,κ(y))>0. Fra dette, siste konjunkt i (16.2) og M2 følger: <zΩxΩκ(y)Ωx, κ(y)>êDom(C), med andre ord:

(16.3) <zΩxΩκ(y), κ(y)>êDom(C)

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Men sammen med (16.2) impliserer dette $\gamma = z\Omega x\Omega\kappa(y)$ & $\langle z\Omega x\Omega\kappa(y), \kappa(y)\rangle \hat{e} Dom(C)$
Ved hjelp av definisjonen av $\sigma(\kappa(y))$ kan man fra dette slutte, i lys av (6), at

$\gamma \hat{e} \sigma(\kappa(y)) = [\Pi(\kappa(y))];2 = [\Pi(\alpha)];2$

Dette viser at (I) ovenfor holder.

(b) Vårt neste mål er å vise at (II) ovenfor holder. Anta derfor for vilkårlig γ at $\gamma \hat{e} [\Pi(\beta)];2$
Da har vi som under (a) at det må finnes z,r' slik at

(17.1) $\gamma = z\Omega\kappa(x\Omega y)$ & $C(z\Omega\kappa(x\Omega y), \kappa(x\Omega y)) = r'$

Siden $x\Omega\kappa(y) \neq \emptyset$ ifølge (11) og derfor $\kappa(x\Omega y) = x\Omega\kappa(y)$ følger fra (17.1) at

(17.2) $\gamma = z\Omega x\Omega\kappa(y)$ & $C(z\Omega x\Omega\kappa(y), x\Omega\kappa(y)) = r'$

Fra det vi har vist under (a) fremgår det at $\gamma \hat{e} [\Pi(\alpha)];2$. Fra dette kan man slutte ved hjelp av (6) og definisjonen av $P(\sigma(\kappa(y))$ at det finnes r3 der

(17.3) $[\Pi(\alpha)];3(\gamma) = P(\kappa(y))(\gamma) = C(z\Omega x\Omega\kappa(y), \kappa(y)) = r3$

Fra (17.1) følger ved hjelp av definisjonen av $P(\kappa(x\Omega y))$ at

(17.4) $[\Pi(\beta)];3(\gamma) = P(\kappa(x\Omega y))(\gamma) = C(z\Omega\kappa(x\Omega y), \kappa(x\Omega y)) = C(z\Omega x\Omega\kappa(y), x\Omega\kappa(y)) = r'$

Tilslutt fremgår det fra (9) og (10) ovenfor at

(18) $[\Pi(\alpha)];3(\beta) = P(\kappa(y))(\beta) = C(x\Omega\kappa(y), \kappa(y)) = r2$

Fra (17.3) følger

(19) $\langle z\Omega x\Omega\kappa(y), \kappa(y)\rangle \hat{e} Dom(C)$. Fra dette og Teorem 10.1 c kan man slutte:

(20) $\langle z\Omega x, y\rangle \hat{e} Dom(C)$

Fra dette kan man så ved hjelp av F3 slutte:

(20.1) $C(z\Omega x, y) = C(z\Omega x, \kappa(y))$

Men fra (20) og Teorem 10.1 d følger $\langle z\Omega x, \kappa(y)\rangle \hat{e} Dom(C)$. Fra dette, (20.1) og D7 følger

(20.2) $C(z\Omega x, y) = C(z\Omega x\Omega\kappa(y), \kappa(y))$

På tilsvarende vis kan man vise:

(20.3) $C(z\Omega x\Omega\kappa(y), x\Omega\kappa(y)) = C(z\Omega x, x\Omega y)$. Endelig har man:

(20.4) $C(x\Omega\kappa(y), \kappa(y)) = C(x, y)$

Nå har man $\langle z\Omega x, y\rangle \hat{e} Dom(C)$ og $\langle x, y\rangle \hat{e} Dom(C)$ & $C(x,y) > 0$
Fra dette kan man ved hjelp av M3 slutte

(21) $C((z\Omega x)\Omega x, y) = C(z\Omega x, x\Omega y) * C(x, y)$. Herav:

(21.1) $C(z\Omega x, y) = C(z\Omega x, x\Omega y) * C(x, y)$

Nåvel, fra (21.1), (20.2) - (20.4) samt (17.3), (17.4) og (18) kan man slutte det vi ønsker:

$[\Pi(\alpha)];3(\gamma) = [\Pi(\alpha)];3(\beta) * [\Pi(\beta)];3(\gamma)$

Dette viser at (II) holder.

(c) Vi ønsker å vise (III) holder. Anta derfor (22) $\gamma \hat{e} [\Pi(\alpha)];2$. Da har vi ved hjelp av (6) at (23) $\gamma \hat{e} \sigma(\kappa(y))$ og derfor i lys av definisjonen av $\sigma(\kappa(y))$ at det finnes z og r slik at

(24) $\gamma = z\Omega\kappa(y)$ & $C(z\Omega\kappa(y), \kappa(y)) = r$

Nå har vi fra (9) at (25) $\beta = x\Omega\kappa(y)$. Vi har derfor:

(26) $\gamma\Omega\beta = (z\Omega x)\Omega\kappa(y)$

Fra (24) følger $\langle z, y\rangle \hat{e} Dom(C)$ ved hjelp av Teorem 10.1. Videre har vi:

(27) $\langle x, y\rangle \hat{e} Dom(C)$ & $C(x,y) > 0$

Fra dette og M1 kan man slutte at

(28) $\langle z, x\Omega y\rangle \hat{e} Dom(C)$. Men fra dette følger ved hjelp av Teorem 10.1 c:

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(29) $\langle z\Omega\kappa(x\Omega y), \kappa(x\Omega y)\rangle \hat{e} Dom(C)$

Fra (26) og det faktum at $x\Omega\kappa(y)=\kappa(x\Omega y)$ siden $x\Omega\kappa(y)\neq\emptyset$ følger

(30) $\gamma\Omega\beta = z\Omega\kappa(x\Omega y)$.

Fra (29), (30) og (13) samt definisjonen av $\sigma(\kappa(x\Omega y))$ følger $\gamma\Omega\beta\hat{e}[\Pi(\beta)];2$. Dette viser at (III) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Ovenfor har vi vist at dersom vi starter med en relativ sannsynlighetsstruktur $S=\langle I,R,C\rangle$ og så konstruerer den kanoniske preordningsstrukturen med assosierte sannsynlighetsrom $S'=\langle I,R,\Pi\rangle$ bestemt av S, og dernest definerer den relative sannsynlighetsfunksjonen C* som i Definisjon 8.2 så er $C=C^*$.

Det vi nå skal gjøre er å vise at noe helt analogt gjelder om vi starter med en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom $S=\langle I,R,\Pi\rangle$ og konstruerer den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen $S'=\langle I,R,C\rangle$. Det er da mulig å definere en funksjon Π^* nøyaktig som ved Definisjon 10.2 og vise at $\Pi^*=\Pi$. Dette innebærer at om S' er den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av preordningsstrukturen med assosierte sannsynlighetsrom $S=\langle I,R,\Pi\rangle$ og S'' er den kanoniske preordningsstrukturen med assosierte sannsynlighetsrom som er bestemt av S' så er S'' faktisk identisk med S, ie. S''=S.

Den satsen vi har i tankene kan formuleres på følgende måte:

Teorem 10.8 Anta $\langle I,R,H\rangle$ er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom. La C være definert ved hjelp av H slik som i Definisjon 8.2 i §8. Definer, om $y\hat{e}U$, $P(\kappa(y))$ og $\sigma(\kappa(y))$ på følgende måte:

(i) $P(\kappa(y)) = Mg(\langle a,r\rangle: (Ex)(x\hat{e}U \,\&\, a= x\Omega\kappa(y) \,\&\, C(x\Omega\kappa(y),\kappa(y))=r))$

(ii) $\sigma(\kappa(y)) = Mg(a: (Er)(\langle a,r\rangle \hat{e} P(\kappa(y))))$

Definer tilslutt Π^* ved:

(iii) $\Pi^* = Mg(\langle z,a\rangle: (Ey)(y\hat{e}U \,\&\, z=\kappa(y)\neq\emptyset \,\&\, (Ev)(\langle v,y\rangle \hat{e} Dom(C)) \,\&\, a = \langle \kappa(y), \sigma(\kappa(y)), P(\kappa(y))\rangle))$

Gitt disse forutsetningene har man at følgende holder:

$\Pi=\Pi^*$

Bevis: Anta forutsetningene i satsen holder. Vi beviser først inklusjonen mot høyre i konklusjonen i satsen, med andre ord beviser vi først:

(+) Π Inkl Π^*

Anta derfor at (1) $\langle z,a\rangle \hat{e} \Pi$ for vilkårlige z,a. Siden det følger fra forutsetningene at Π er en funksjon har man da:

(2) $z\hat{e}Dom(\Pi)$.

(3) $\Pi(z)$ er et sannsynlighetsrom over over z.

Det følger fra (2) (når man husker på vår notasjon i forbindelse med n-tupler) at:

(4) $\Pi(z) = \langle z, [\Pi(z)];2, [\Pi(z)];3\rangle$

Siden $z\hat{e}Dom(\Pi)$ følger også ved hjelp av definisjonen av Π at

$z\hat{e}UN(Mg(Pt([w];R)-\{\emptyset\}: w\hat{e}I)$

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Det følger fra dette siste at det må finnes w0 der

(5) zê(Pt([w0];R) - {ø}) & w0êI

Fra dette følger at det må finnes noe yêU slik at (6) ø≠z= Max(R,y) = κ(y). Fra (4) og (6) følger: (7) a= Π(κ(y)) = <κ(y), [Π(κ(y))];2, [Π(κ(y))];3>

Vi må nå vise at <z,a>êΠ*. Som man ser fra forutsetningene i teoremet vil det være tilstrekkelig å bevise de følgende påstander:

(a) P(κ(y)) = [Π(κ(y))];3

(b) σ(κ(y)) = [Π(κ(y))];2

(c) z=κ(y) ≠ ø & (Ev)(<v,z>êDom(C)) & a = <κ(y),σ(κ(y)),P(κ(y)) >

Når det gjelder disse tre påstandene vil det i sin tur være tilstrekkelig å bevise (a) og (b). Fra disse to påstandene og (7) følger den siste konjunkten i (c). Den første konjunkten i (c) følger fra (6). Den andre konjunkten følger fordi vi har at Π(κ(y)) er et sannsynlighetsrom. Ved hjelp av definisjonen av C har man da

yΩκ(y)ê [Π(κ(y))];2 & [Π(κ(y))];3(yΩκ(y))=1 & ø≠κ(y)êDom(Π)

Fra dette følger C(y,y)=1 og derfor <y,y>êDom(C). Herav den andre konjunkten (Ev)(<v,z>êDom(C)). Vi konkluderer derfor med at det er tilstrekkelig å vise (a) og (b).

Ad (a): Anta for vilkårlige b, r at (8.1) <b,r>ê [Π(κ(y))];3. Da følger at bê [Π(κ(y))];2. Videre følger det siden [Π(κ(y))];2 er en naturlig boolsk algebra over κ(y) at κ(y)ê[Π(κ(y))];2. Fra dette og det at bê [Π(κ(y))];2 kan man slutte at b Inkl κ(y) og derfor:

(8.2) bΩκ(y)= b ê [Π(κ(y))];2

Nå har man fra (8.1): [Π(κ(y))];3(b)=r. Fra dette og (8.2) kan man slutte at

(8.3) [Π(κ(y))];3(bΩκ(y)) =r

Fra (6) og (2) følger (8.4) ø≠κ(y)êDom(Π). Fra (8.2), (8.3) og (8.4), samt definisjonen av C følger C(bΩκ(y),κ(y))=r & b=bΩκ(y). Fra dette og definisjonen av P(κ(y)) som er gitt blandt forutsetningene kan man så slutte <b,r>êP(κ(y)).

La oss så vise inklusjonen den andre veien. Anta <b,r>êP(κ(y)) for vilkårllige b og r. Fra definisjonen av P(κ(y)) kan man da slutte at det finnes noe x slik at

(8.5) b=xΩκ(y) & C(xΩκ(y),κ(y))=r

Ved hjelp av definisjonen av C har vi da:

(8.6) (xΩκ(y))Ωκ(κ(y)) ê [Π(κ(κ(y)))];2 &
[Π(κ(κ(y)))];3(xΩκ(y))Ωκ(κ(y)) =r

Siden κ(κ(y)) =κ(y) om κ(y)≠ø er dette ekvivalent med:

(8.7) (xΩκ(y)) ê [Π(κ(y))];2 & [Π(κ(y))];3(xΩκ(y)) =r

Siden b=xΩκ(y) ifølge (8.5) følger fra (8.7) at <b,r>ê [Π(κ(y))];3. Dette viser at (a) ovenfor holder.

Ad (b): Vi må naturligvis også vise at σ(κ(y)) = [Π(κ(y))];2. Dette er likefrem fordi vi har:

bêσ(κ(y)) ↔ (Er)(<b,r>êP(κ(y)))
↔ (Er)(<b,r>ê [Π(κ(y))];3) (fordi (a) ovenfor holder.)
↔ bê[Π(κ(y))];2

Den siste bikondisjonalen holder fordi Π(κ(y)) er et sannsynlighetsrom. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for (+).

Vi må også bevise at (++) Π* Inkl Π. Anta derfor (9) at <z,a> êΠ* for vilkårlige z og a. Ved hjelp av definisjonen Π* følger da at det finnes yêU slik at

(10) z=κ(y)≠ø & (Ev)(<v,y>êDom(C)) & a = <κ(y), σ(κ(y)), P(κ(y))>

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Fra den andre konjunkten i (10) og definisjonen av C følger:

(11) $z=\kappa(y) \hat{e} Dom(\Pi)$

På samme måte som ovenfor kan man vise

(12.1) $P(\kappa(y)) = [\Pi(\kappa(y))];3$

(12.2) $\sigma(\kappa(y)) = [\Pi(\kappa(y))];2$

Nå har vi $z \hat{e} Dom(\Pi)$. Videre kan vi på samme måte som vi beviste (4), bevise at $\Pi(z) = <z, [\Pi(z)];2, [\Pi(z)];3>$. Det følger fra dette, (10), (12.1) og (12.2) at $\Pi(z)=a$ og derfor at $<z,a> \hat{e} \Pi$. Dette viser at (++) holder.

Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

§11 Om forholdet mellom preordningsstrukturer med assosierte sannsynlighetsrom og relative sannsynlighetsstrukturer.

Anta $S=<I,R,\Pi>$ er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom. Da er *den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av S* slik som definert i §9 entydig bestemt. Forkorter vi uttrykket " S' er den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av S " med "F(S',S)" har vi derfor at $(Ey)(y= (iS')F(S',S))$ om S er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom. Betegner vi klassen av alle preordningsstrukturer med assosierte sannsynlighetsrom med Φ kan vi definere en funksjon ψ ved å sette:

$\psi = Mg(<S',S> : F(S',S) \ \& \ S \hat{e} \Phi)$

Er da $S \hat{e} \Phi$ har vi at $\psi(S)$ er den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av S.

På tilsvarende vis: Anta $S=<I,R,\Pi>$ er en relativ sannsynlighetsstruktur Da er *den kanoniske preordningsstrukturen med assosierte sannsynlighetsrom bestemt av S* slik som definert i §10 entydig bestemt. Forkorter vi uttrykket " S' er den kanoniske preordningsstrukturen med assosierte sannsynlighetsrom bestemt av S " med "G(S',S)" har vi derfor at $(Ey)(y= (iS')G(S',S))$ om S er en relativ sannsynlighetsstruktur. Betegner vi klassen av alle relative sannsynlighetsstrukturer med Γ kan vi definere en funksjon φ ved å sette:

$\varphi = Mg(<S',S> : G(S',S) \ \& \ S \hat{e} \Gamma)$

Er da $S \hat{e} \Gamma$ har vi at $\varphi(S)$ er den kanoniske preordningsstrukturen med assosierte sannsynlighetsrom bestemt av S.

Fra det vi har skrevet ovenfor og definisjonene av kanonisk relativ sannsynlighetsstruktur og kanonisk preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom fremgår det både φ og ψ er funksjoner og at domenet til φ er klassen av alle relative sannsynlighetsstrukturer, ie. Γ og at domenet til ψ er klassen av alle preordningsstrukturer med assosierte sannsynlighetsrom. Vi har derfor:

Teorem 11.1 (a) $Func(\varphi) \ \& \ Dom(\varphi)=\Gamma$

(b) $Func(\psi) \ \& \ Dom(\psi)=\Phi$

Anta $S=<I,R,\Pi>$ er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom. Da følger det umiddelbart fra Teorem 9.4 og de definisjonene vi har gitt ovenfor at $\psi(S) \hat{e} \Gamma$. Tilsvarende har man ved hjelp av Teorem 10.3 og Teorem 10.4 at dersom $S=<I,R,C>$ er en relativ sannsynlighetsstruktur så er $\varphi(S) \hat{e} \Phi$, dvs den kanoniske preordningsstrukturen med assosierte

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

sannsynlighetsrom er faktisk en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom, det vil si et element i Φ. Det følger fra dette at Teorem 11.1 kan forsterkes til:

Teorem 11.2 (a) $\varphi: \Gamma \rightarrow \Phi$
(b) $\psi: \Phi \rightarrow \Gamma$

Anta nå at $S \hat{e} \Gamma$, ie at S er en relativ sannsynlighetsstruktur. Da vil, som man ser fra Teorem 11.2, $\varphi(S) \hat{e} \Phi$ og $\psi(\varphi(S)) \hat{e} \Gamma$. Men det følger ved hjelp av Definisjon 10.4 og Teorem 10.6 at $\psi(\varphi(S)) = S$ om $S \hat{e} \Gamma$. Tilsvarende, anta at S er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom, med andre ord at $S \hat{e} \Phi$. Da har vi ved hjelp av Teorem 11.2 at $\psi(S) \hat{e} \Gamma$ og at $\varphi(\psi(S)) \hat{e} \Phi$. Men ved hjelp av Teorem 10.8 følger at $\varphi(\psi(S)) = S$. Dette viser at følgende sats holder:

Teorem 11.3 (a) $(AS)(S \hat{e} \Gamma \rightarrow \psi(\varphi(S)) = S)$
(b) $(AS)(S \hat{e} \Phi \rightarrow \varphi(\psi(S)) = S)$

Fra Teorem 11.1 og Teorem 11.2 fremgår det at ψ bare er en avbildning av Φ inn i Γ og at φ bare er en avbildning av Γ inn i Φ. Det er imidlertid mulig å vise at ψ også er en en-entydig avbildning av Φ på Γ og tilsvarende at φ er en en-entydig avbildning av Γ på Φ. Dette innebærer at følgende sats holder:

Teorem 11.4 (a) $\varphi : \Gamma \text{ -(1-1,på)} \rightarrow \Phi$
(b) $\psi : \Phi \text{-(1-1,på)} \rightarrow \Gamma$

Bevis: Vi har allerede godtgjort at φ er en funksjon fra Γ inn i Φ. La oss vise at den er en-entydig. Anta derfor at (1) $\langle S1,S\rangle, \langle S2,S\rangle \hat{e} \varphi$. Da følger siden φ er en funksjon at (2) $\varphi(S1)=S=\varphi(S2)$. Vi ønsker å vise at S1=S2. Fra (1) følger at $S \hat{e} \Phi$. Fra dette, (2) og Teorem 11.3 følger (3) $\psi(S)=\psi(\varphi(S1)) = S1$. Tilsvarende har vi at (4) $\psi(S)= \psi(\varphi(S2))=S2$. Men fra (3) og (4) har man åpenbart at S1=S2. Dette viser at φ er en-entydig.

På samme måte viser man at ψ er en-entydig. Anta (5) $\langle S1,S\rangle,\langle S2,S\rangle \hat{e} \psi$. Vi må da vise at S1=S2. Fra (5) følger at (6) $\psi(S1)= S = \psi(S2)$ siden ψ er en funksjon. Det følger også at $S \hat{e} \Gamma$. Ved hjelp av Teorem 11.3 og (6) har man da $\varphi(S)=\varphi(\psi(S1)) = S1$ og tilsvarende at $\varphi(S)=\varphi(\psi(S2))=S2$. Men herav har vi igjen at S1=S2. Dette viser at ψ også er en-entydig.

La oss nå vise at φ avbilder Γ *på* Φ. Anta $S \hat{e} \Phi$ for vilkårlig S. Da har vi at $\psi(S) \hat{e} \Gamma$. Men fra Teorem11.3 har vi at $(AS)(S \hat{e} \Gamma \rightarrow \varphi(\psi(S))=S)$. Det følger at $\varphi(\psi(S))=S \ \& \ \psi(S) \hat{e} \Gamma$. Vi har derfor at $(ES')(S' \hat{e} \Gamma \ \& \ \varphi(S')=S)$. Men dette er nøyaktig hva som menes med at φ avbilder Γ på Φ. Ved hjelp av Teorem 11.3 kan man på en helt tilsvarende måte vise at ψ avbilder Φ på Γ. **QED**.

Et enkelt korollar til Teorem 11.3 og Teorem 11.4 er at φ og ψ er gjensidig inverse funksjoner. Vi har med andre ord at:

Teorem 11.5 (i) $\varphi = \psi;-1 \quad \text{og} \quad \psi=\varphi;-1$

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Bevis: Fra Teorem 11.3 har vi $\varphi(\psi(S))= S$ om $S \hat{e} \Phi$. Ved hjelp av Teorem 11.4 følger da $\psi(S) = \varphi;-1(S)$ og derfor $\psi = \varphi-1$. En tilsvarende begrunnelse kan gis for at $\varphi= \psi;-1$. **QED**.

§12 Alternative aksiomatiseringer av den svake og den sterke teorien om akseptanse og sannsynlighet.

I §3 definerte vi helt presist to førsteordens teorier, nemlig *den svake teorien om akseptanse og sannsynlighet* og det vi kalte *den sterke teorien om akseptanse og sannsynlighet*. Som man husker betegner L;e språket til mengdelære. Vi definerte Δ som den predikatmengden som bare inneholder de tre predikatene "w er en logisk mulig verden", "w er en mulig verden som har minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som verdenen w' " og "z er den sannsynlighet som det forholdet utsagnet x beskriver har gitt at utsagnet y representerer all den evidens som foreligger". Språket L;e utvidet med predikatene i Δ betegnet vi med L;e(Δ). ZFC;u(L;e(Δ)) var da det mengdeteoretiske systemet ZFC;u over L;e(Δ) utvidet med alle instanser av utsondringsaksiomet og substitusjonsaksiomet. I §3 spesifiserte vi en rekke formler i språket L;e, nemlig grunnsetningene W1,W2, E1 - E3, D1 - D8, F1 -F5 og endelig grunnsetningene M1 - M3. Vi betegnet mengden av formler i L;e(Δ) som bare inneholdt formelene W1,W2, E1 - E3, D1 - D8 og F1-F5 med θ;1. Den mengden vi får når θ;1 utvides med de tre aksiomene M1 - M3 kalte vi θ;2. Den svake teorien om akseptanse og sannsynlighet er da teorien ZFC;u(L;e(Δ))[θ;1], og den sterke teorien om akseptanse og sannsynlighet er den som fremkommer ved å legge til denne teorien aksiomene M1 - M3 som ytterligere ikke- logiske aksiomer, det vil si ZFC;u(L;e(Δ))[θ;2]. Slutningsreglene i de to teoriene er naturligvis bare modus ponens og universell generalisering. Vi skal nå formulere to teorier. Den første er ekvivalent med den svake teorien om akseptanse og sannsynlighet. Den andre er ekvivalent med den sterke versjonen av denne teorien.

Vi skal først se på en alternativ aksiomatisering av den svake om akseptanse og sannsynlighet. Språket til denne alternative aksiomatiseringen er L;e(Δ) som vi nevnte ovenfor. De ikke-logiske aksiomene i teorien i tillegg til de rent mengdeteoretiske er blandt dem vi har nevnt tidligere, nemlig aksiomene for mulige verdener, W1 og W2, samt aksiomene for enkelhetsrelasjonen E1 - E3. I tillegg til disse aksiomene inneholder den alternative aksiomatiseringen bare ett aksiom, nemlig aksiomet P1 som vi nå skal angi. La oss først gjøre det klart at Uttrykkene "R", "R*", "Ekv;R", "[w];R", "Max(R,y)", "κ(y)" og U er definert nøyaktig som i §3. Man bør også merke seg at disse uttrykkene utelukkende er definert ved hjelp av rent mengde teoretiske predikater og de to predikatene "w er en logisk mulig verden" og "w er en verden som har minst like stor grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som verdenen w' ". Sannsynlighetspredikatet er på ingen måte involvert i definisjonene av disse uttrykkene.

La oss nå vende tilbake til vårt nye aksiom P1. Det bør understrekes at vi i det følgende bruker uttrykket "SRom(x,y)" som forkortelse for "x er et sannsynlighetsrom over mengden x". Som det fremgår av hva vi tidligere har skrevet i §7, man kan konsultere Definisjon 7.1 og Definisjon 7.2, er dette et rent mengdeteoretisk begrep. Vi finner det nå hensiktsmessig å betrakte konjunksjonen av de følgende betingelser, åpne setninger, i språket L;e(Δ) og forklare hva de innebærer. Vi betrakter:

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(1) Func(f)
(2) Dom(f) Inkl UN(Mg(Pt([w];R) - {ø}: wêI))
(3) (Ay)(yêDom(f) → SRom(f(y),y))

Man ser at disse kravene er helt analoge med kravene (b), (c) og (d) i Definisjon 8.1 i §8.

Det første av disse kravene sier bare at f er en funksjon, noe som ikke i seg selv sier så mye. Det andre kravet sier noe om domenet til denne funksjonen, nemlig som man ser, at dette domenet skal være inkludert i mengden UN(Mg(Pt([w];R) - {ø}: wêI)). Man bør ha helt klart for seg hva dette er for slags mengde. Anta wêI. Da er [w];R mengden av alle de mulige verdenene som er like enkle som verdenen w. Siden Enk;R er en ekvivalensrelasjon over mengden av alle mulige verdener I inndeler den I i en samling ikke-tomme innbyrdes disjunkte ekvivalensmengder som som samlet uttømmer I. Enhver slik ekvivalensmengde a vil være identisk med [w];R for noe wêI. Vi skal kalle disse ekvivalensmengdene for enkelhetsnivåene over I. Som man skjønner er da Pt([w];R) mengden av alle delmengder av enkelhetsnivået [w];R. Pt([w];R) -{ø} er så mengden av alle ikke-tomme delmengder av dette enkelhetsnivået. UN(Mg(Pt([w];R) - {ø}: wêI)) er så unionen av de diverse Pt([w];R) - {ø} ettersom w gjennomløper I. Alt dette innebærer at dersom xêDom(f) så vil x≠ø og det vil finnes en wêI slik at x er inkludert i enkelhetsnivået til w.

Det tredje kravet ovenfor sier at dersom y er med i domenet til f så skal f(y), verdien til funksjonen f for argumentet y, være et sannsynlighetsrom over f.

Vi skulle nå ha klarlagt hva kravene (1) - (3) ovenfor innebærer. Det gjenstår imidlertid et siste krav. Anta f oppfyller kravene (1) - (3). Da er det siste kravet dette:

(4) Cd(z,x,y) ↔ . x,yêU& ø ≠ κ(y)êDom(f)& rêReell
xΩκ(y)ê[f(κ(y))];2 & [f(κ(y))];3(xΩκ(y)) =r

La oss se på hva dette innebærer i det vi forutsetter at f er en funksjon som oppfyller kravene (1) - (3). Kravet innebærer at z er sannsynligheten til utsagnet x relativt til utsagnet y hvis og bare hvis man har at r er et reellt tall og x og y er utsagn. Videre krever vi at snittet av utsagnet x og de enkleste verdnene i y, ie. xΩκ(y) er med i den naturlige boolske algebraen som inngår som annen komponent i det sannsynlighetsrommet f tilordner utsagnet κ(y), med andre ord at xΩκ(y)ê [f(κ(y))];2. Endelig må det være tilfelle at sannsynlighetsfunksjonen i det sannsynlighetsrommet som f tilordner κ(y), det vil si [f(κ(y))];3, tilordner xΩκ(y) det reelle tallet r. Dette innebærer at [f(κ(y))];3(xΩκ(y)) =r. Definerer vi C på den måten vi gjorde i §3, nemlig som C= Mg(<x,y>,r>: Cd(r,x,y)), kan dette kravet reformuleres slik:

C=Mg(<<x,y>,r>: x,yêU& ø ≠ κ(y)êDom(f)& rêReell
xΩκ(y)ê[f(κ(y))];2 & [f(κ(y))];3(xΩκ(y)) =r))

Vårt aksiom P1 sier nå ikke noe annet enn at det finnes en funksjon f som oppfyller kravene (1) - (4) som vi nå har spesifisert og kommentert. Grunnsetningen kan formaliseres slik:

P1 (Ef)(Func(f) & (Ay)(yêDom(f) → yêUN(Mg(Pt([w];R)-{ø}: wêI))) &
(Ay)(yêDom(f) → SRom(f(y),y)) &
C=Mg(<<x,y>,r>: x,yêU& ø ≠ κ(y)êDom(f)& rêReell
xΩκ(y)ê[f(κ(y))];2 & [f(κ(y))];3(xΩκ(y)) =r))

Den teorien vi nå betrakter er ZFC;u(L;e(Δ)) utvidet med aksiomene W1,W2, E1 - E3 og P1 som nye ikke-logiske aksiomer. Med andre ord teorien: ZFCu(L;e(Δ))[W1,W2,E1 - E3, P1]

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Teorem 12.1 Anta α er en formel i L;e(Δ). Da har man at α er et teorem i teorien T1= ZFCu(L;e(Δ))[θ;1] hvis og bare hvis α er et teorem i teorien T2=ZFCu(L;e(Δ))[a] der a={W1,W2,E1 - E3, P1}

Bevis: Det vil åpenbart være tilstrekkelig å vise at aksiomene i T1 kan utledes i T2 og omvendt. For å vise at aksiomene i T1 kan utledes i T2 vil det åpenbart være tilstrekkelig å vise at D1 - D8 og F1 - F5 kan utledes i T2. Fra T2 følger selvfølgelig P1 siden dette er et aksiom i teorien. Fra P1 følger så at det finnes en funksjon f som oppfyller kravene (1) -(4) som vi nevnte ovenfor. Fra dette og definisjonen av preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom som vi innførte i §8 følger det at <I,R,f> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom. Fra P1 kan man selvfølgelig også utlede at

C=Mg(<<x,y>,r>: x,yêU& ø ≠ κ(y)êDom(f)& rêReell
xΩκ(y)ê[f(κ(y))];2 & [f(κ(y))];3(xΩκ(y)) =r))

Da har man <I,R,C> er den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av <I,R,f> i lys av Definisjon 9.1. Fra dette og Teorem 9.1 følger umiddelbart at aksiomene D1 og D2 kan utledes i T2. Videre følger da ved hjelp av Teorem 9.2 at aksiomene D3 - D8 kan utledes i T2. Dette følger fordi de nevnte teoremer er rent mengdeteoretiske og derfor selv er teoremer i T2. Fra Teorem 9.3, som også kan utledes i T2 fordi det er en rent mengdeteoretisk sats, og det forhold at <I,R,C> er den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av <I,R,f> følger at F1 -F5 også kan utledes i T2. Vi kan altså utlede alle aksiomene i T1 i T2. Det følger at ethvert teorem i T1 er et teorem i T2.

La oss så vise det omvendte, at ethvert teorem i T2 er et teorem i T1. Det vil være tilstrekkelig å vise at P1 kan utledes i T1. Sett S=<I,R,C> der I,R og C er definert som i §3 ved hjelp av de primitive predikatene i T1. Man ser da lett fra definisjonen av "relativ sannsynlighetsstruktur" som gitt ved Definisjon 4.1 i §4 at S er en relativ sannsynlighetsstruktur. Vi definerer nå Π som ved Definisjon 10.2 i §10. Det følger da ved hjelp av Definisjon 10.3 at <I,R,Π> er den kanoniske preordningsstrukturen bestemt av <I,R,C>. Ved hjelp av Teorem 10.3 og Teorem 10.4 har man da at <I,R.Π> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom. Fra dette og Definisjon 8.1 følger det at Π oppfyller kravene (1) - (3) ovenfor. Definer C* som i Definisjon 10.4 i §10. Da følger ved hjelp av Teorem 10.6 at C=C*. Dette innebærer at

C = Mg(<<x,y>,r>: x,yêU & ø≠κ(y)êDom(Π) &
xΩκ(y)ê[Π(κ(y))];2 &[Π(κ(y))];3(xΩκ(y))=r)

Fra dette kan man slutte at Π oppfyller kravet (4) som vi nevnte ovenfor. Fra det at Π oppfyller kravene (1) - (4) kan man slutte at P1 er utledbar i T1. Det følger at ethvert teorem i T2 er et teorem i T1. De to teoriene er følgelig deduktivt ekvivalente. **QED**.

Vi skal se på nok en betingelse i tillegg til dem vi har sett på, nemlig (1) - (4). Betingelsen er den følgende:

(5) (Ay)(yêDom(f) → (Ax)(xê[f(y)];2 & [f(y)];3(x)>0 →.
xêDom(f) &
[f(x)];2 Inkl [f(y)];2 &
(Az)(zê[f(y)];2→ zΩxê[f(x)];2) &
(Az)(zê[f(x)];2 → [f(y)];3(z) = [f(y)];3(x)* [f(x)];3(z))))

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Hvis f oppfyller betingelsene (1)-(4) har vi at <I,R,f> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom. Har vi i tillegg at f oppfyller kravet (5) er ethvert element y i domenet til funksjonen f slik at sannsynlighetsrommet f(y) er multiplikativt slik dette begrep ble definert i §8. Føyer vi til dette kravet i aksiomet P1 får vi en sterkere påstand, nemlig denne:

P2 (Ef)(Func(f) & (Ay)(yêDom(f) → yêUN(Mg(Pt([w];R)-{ø}: wêI))) &
(Ay)(yêDom(f) → SRom(f(y),y)) &
(Ay)(yêDom(f) → (Ax)(xê[f(y)];2 & [f(y)];3(x)>0 →.
xêDom(f) &
[f(x)];2 Inkl [f(y)];2 &
(Az)(zê[f(y)];2→ zΩxê[f(x)];2) &
(Az)(zê[f(x)];2 → [f(y)];3(z) = [f(y)];3(x)* [f(x)];3(z))) &
C=Mg(<<x,y>,r>: ø ≠ κ(y)êDom(f)&
xΩκ(y)ê[f(κ(y))];2 & [f(κ(y))];3(xΩκ(y)) =r))))

Fjerner vi aksiomene D1- D8, F1-F5 og M1 - M3 fra den sterke teorien om akseptanse og sannsynlighet og erstatter disse med P2 får vi en teori som er deduktivt ekvivalent. Man ser forøvrig at P2 i likhet med P1 er en formel i språket L;e(Δ). Vi skal nå vise

Teorem 12.2 Anta α er en formel i L;e(Δ). Da har man at α er et teorem i teorien T1= ZFCu(L;e(Δ))[θ;2] hvis og bare hvis α er et teorem i teorien T2=ZFCu(L;e(Δ))[a] der a={W1,W2,E1 - E3, P2}

Bevis: Det vil åpenbart være tilstrekkelig å vise at aksiomene i T1 kan utledes i T2 og omvendt. For å vise at aksiomene i T1 kan utledes i T2 vil det åpenbart være tilstrekkelig å vise at D1 - D8, F1 - F5 og M1 - M3 kan utledes i T2. Fra T2 følger selvfølgelig P2 siden dette er et aksiom i teorien. Fra P2 følger så at det finnes en funksjon f som oppfyller kravene (1) - (5) som vi nevnte ovenfor. Fra dette og definisjonen av preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom som vi innførte i §8 følger det at <I,R,f> er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom. Fra P1 kan man selvfølgelig også utlede at

C=Mg(<<x,y>,r>: x,yêU& ø ≠ κ(y)êDom(f)& rêReell
xΩκ(y)ê[f(κ(y))];2 & [f(κ(y))];3(xΩκ(y)) =r))

Da har man at <I,R,C> er den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av <I,R,f> i lys av Definisjon 9.1. Fra dette og Teorem 9.1 følger umiddelbart at aksiomene D1 og D2 kan utledes i T2. Videre følger da ved hjelp av Teorem 9.2 at aksiomene D3 - D8 kan utledes i T2. Dette følger fordi de nevnte teoremer er rent mengdeteoretiske og derfor selv er teoremer i T2.

Fra Teorem 9.3, som også kan utledes i T2 fordi det er et rent mengdeteoretisk sats, og det forhold at <I,R,C> er den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av <I,R,f> følger at F1 -F5 også kan utledes i T2. Vi må også vise at M1- M3 kan utledes. Anta derfor at (i) (Ev)(<v,y>êDom(C)) for vilkårlig y. Da følger ,siden f oppfyller kravet (4), at ø≠κ(y)êDom(f). Siden f oppfyller kravet (5) følger det at f(κ(y)) er multiplikativt. Fra dette og det at <I,R,C> er den kanoniske relative sannsynlighetsstrukturen bestemt av <I,R,f> har man ved hjelp av Teorem 9.4 at

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(a) $\langle z,y\rangle,\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C) \& C(x,y) > 0 \rightarrow \langle z,x\Omega y\rangle \hat{e} Dom(C)$

(b) $\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C) \& C(x,y) > 0 \rightarrow (\langle z,x\Omega y\rangle \hat{e} Dom(C) \rightarrow \langle z\Omega x,y\rangle \hat{e} Dom(C)$

(c) $\langle z,y\rangle,\langle x,y\rangle \hat{e} Dom(C) \& C(x,y) > 0 \rightarrow C(z\Omega x,y) = C(z,x\Omega y)*C(x,y)$

holder for alle z,x. Vi har altså at kondisjonalen med (i) som antesedent og konjunksjonen av (a) - (c) som konsekvent holder for alle y,x og z. Men denne kondisjonalen er ekvivalent med M1 - M3.

Vi kan altså utlede alle aksiomene i T1 i T2. Det følger at ethvert teorem i T1 er et teorem i T2.

La oss så vise det omvendte, at ethvert teorem i T2 er et teorem i T1. Det vil være tilstrekkelig å vise at P2 kan utledes i T1. Sett $S=\langle I,R,C\rangle$ der I,R og C er definert i §3 ved hjelp av de primitive predikatene i T1. Man ser da lett fra definisjonen av "relativ sannsynlighetsstruktur" som gitt ved Definisjon 4.1 i §4 at S er en relativ sannsynlighetsstruktur. Vi definerer nå Π som ved Definisjon 10.2 i §10. Det følger da ved hjelp av Definisjon 10.3 at $\langle I,R,\Pi\rangle$ er den kanoniske preordningsstrukturen bestemt av $\langle I,R,C\rangle$. Ved hjelp av Teorem 10.3 og Teorem 10.4 har man da at $\langle I,R,\Pi\rangle$ er en preordningsstruktur med assosierte sannsynlighetsrom. Fra dette og Definisjon 8.1 følger det at Π oppfyller kravene (1) - (3) ovenfor. Definer C* som i Definisjon 10.4 i §10. Da følger ved hjelp av Teorem 10.6 at C=C*. Dette innebærer at

$$C = Mg(\langle\langle x,y\rangle,r\rangle: x,y\hat{e}U \& \ \emptyset\neq\kappa(y)\hat{e}Dom(\Pi) \& x\Omega\kappa(y)\hat{e}[\Pi(\kappa(y))];2 \&[\Pi(\kappa(y))];3(x\Omega\kappa(y))=r)$$

Fra dette kan man slutte at Π oppfyller kravet (4) som vi nevnte ovenfor. Det gjenstår å vise at f(y) er multiplikativt for ethvert utsagn $y\hat{e}Dom(\Pi)$. Nå har vi at M1 - M3 holder i T1 siden de er aksiomer i denne teorien. Det følger at $\langle I,R,C\rangle$ oppfyller disse kravene. Anta nå at $y\hat{e}Dom(\Pi)$ for vilkårlig y. Da har vi at $y=\kappa(y)\hat{e}Dom(\Pi)$. Siden y er er et utsagn oppfyller det kravene M1-M3 for alle x,z. Fra dette og Teorem 10.7 følger at $\Pi(\kappa(y))=\Pi(y)$ er multiplikativt, dvs. oppfyller konsekventen i krav (5). Men siden y var vilkårlig følger det at Π oppfyller krav (5). Vi har nå vist at Π oppfyller alle kravene (1) - (5).

Fra dette kan man slutte at P2 er utledbar i T1. Det følger at ethvert teorem i T2 er et teorem i T1. De to teoriene er følgelig deduktivt ekvivalente. **QED**.

§13 Noen avsluttende refleksjoner

Det viktigste i dette skrift har vært å gi en systematisk og presis beskrivelse og definisjon av de to teoriene som vi har omtalt som den svake (begrensede) teorien om akseptanse og sannsynlighet og den sterke (fulle) teorien om akseptanse og sannsynlighet. I tillegg til dette har vi fremlagt, i Del II, en rekke formelle resultater om forholdet mellom det vi på den ene side har kalt relative sannsynlighetsstrukturer og på den annen side den strukturklassen som vi kalte for preordningsstrukturer med assosierte sannsynlighetsrom. Som man ser fra definisjonen av en relativ sannsynlighetsstruktur av speiler denne typen av strukturer nøyaktig strukturen til den begrensede teorien om akseptanse og sannsynlighet. I lys av de resultater vi har bevist ovenfor i Del II om sammenhengen mellom relative sannsynlighetsstrukturer og preordningsstrukturer med assosierte sannsynlighetsrom innebærer dette at vi kan formulere visse alternative aksiomatiseringer til våre to hovedteorier. Dette resultat er ikke trivielt og kaster naturlig nok lys over våre hovedteorier. Man forstår tross alt en teori bedre, ikke bare

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

når man får et dypere innblikk i hva som følger fra den, men også når man kan se hvordan teorien kan formuleres på radikalt andre måter.

Noen ytterligere refleksjoner bør vies til det vi i vårt arbeid har kalt prinsippet om indre koherens, harmoni og enkelhet, eller det som vi kortere omtalte som enkelhetsprinsippet. Vi ga to formuleringer av dette prinsipp i forbindelse med kommentarene til vår hovedteori. Den ene formuleringen var denne:

Et utsagn x er fornuftig å akseptere gitt at utsagnet y representerer all den evidens man har hvis og bare hvis de enkleste, mest harmoniske og koherente verdenene i sannhetsmengden til utsagnet y er inkludert i sannhetsmengden til utsagnet x og det faktisk finne visse enkleste, mest harmoniske og koherente verdener i sannhetsmengden til y.

Den andre formuleringen, som tidligere ble gitt i formalisert form, var denne:

Det er fornuftig å akseptere et utsagn x gitt at utsagnet y representerer all den evidens man har hvis og bare hvis det finnes et enkleste totalsystem av kausallover som er kompatibelt med utsagnet y og utsagnet x er implisert av konjunksjonen av disse kausallovene og utsagnet y.

Disse to prinsippene er ekvivalente om vi utvider teorien om akseptanse og sannsynlighet med aksiomene L1 - L6 slik vi gjorde rede for tidligere og definerer enkelhetsrelasjonen slik som vist i §5.3. Strengt tatt er da aksiomene E1 - E3 overflødige i den resulterende teori siden de kan utledes fra de øvrige aksiomene og denne definisjonen av enkelhetsrelasjonen. Fra teorien om akseptanse og sannsynlighet alene (hva enten det dreier seg om den sterke eller svake versjonen) kan man imidlertid ikke utlede det siste prinsippet siden predikatet "x er en kausallov som gjelder i verdenen w" og de andre predikatene vi nevnte i §5.3 ikke inngår i vokabularet til disse teoriene.

Begge prinsippene ovenfor ovenfor gir oss et kriterium for når det er fornuftig å akseptere et utsagn x relativt til et annet y. Selvom disse kriteriene ikke på noen måte er effektive eller operasjonelle gir de en likevel visse vink om hva som i praksis er fornuftig å akseptere gitt en viss evidens. Vi ga en ganske omfangsrik mengde med eksempler i §5.4 og behøver derfor ikke å gi flere eksempler akkurat her.

Vi ga tidligere, i §5.5, en meget generell definisjon av hva som menes med en induktiv slutning. Det skulle være unødvendig å gi denne definisjonen på nytt. Det er imidlertid vanskelig å se hvordan man kan argumentere for at denne definisjonen er inadekvat eller uhensiktsmessig. Den synes å omfatte, noe vi skissemessig forsøkte å vise, alt det som tradisjonelt har blitt karakterisert som induktive slutninger og den ekskluderer de slutningene som er logisk gyldige, noe som åpenbart er rimelig. Med andre ord kan alle konsistente slutninger inndeles i to gjensidig eksklusive klasser: de deduktive (som er logiske gyldige) og de induktive (som ikke er logisk gyldige).

Nåvel. Gitt dette skillet mellom logisk gyldige og induktive slutninger virker det ytterst rimelig og inndele de induktive slutningene i to underklasser, nemlig de akseptable og de uakseptable alt ettersom konklusjonen i en induktiv slutning er et utsagn som det er fornuftig å akseptere relativt til konjunksjonen av premissene i slutningen eller ikke. Dette innebærer at teorien om de akseptable induktive slutningene kan reduseres til teorien om akseptanserelasjonen og at det derfor finnes en apriori teori om akseptable induktive slutninger. Dette i sin tur innebærer at det finnes et system av akseptable induktive slutninger

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

og derfor noe som med full rett kan kalles induktiv logikk. Man kan trygt si at dette er i overensstemmelse med allminnelig sunn fornuft. Ordene "fornuft" og "fornuftig" er ikke superord som bare filosofer har rett til å bruke, analysere og utlegge. De har en like prosaisk bruk som ord i likhet med "tro", "vite", "sten" og "hvis". Enhver lærer å bruke disse ordene og talløse andre som inngår i vårt språk, noen mindre bra, andre bedre, men ingen spesielle privilegier er gitt filosofene som gir dem spesiell rett til å bestemme deres betydning. Like opplagt som det er for en uhildet person at en sten nødvendigvis må oppta en viss plass i rommet, eller at en sten har romlig utstrekning, like opplagt må det være at en person er ufornuftig om vedkommende tror at en flaske fylt med vann er slik at vannet ikke vil renne ut av den om man snur flasken opp ned og tar ut korken, forutsatt at vedkommende vet alt det som vanlige folk vet ved det nåværende tidspunkt. Det følger derfor i kraft av den betydning som ordet "fornuftig" har at relativt til den kunnskap som de fleste er i besittelse av er det fornuftig å akseptere at en fylt vannflaske med kork kan tømmes på normalt vis ikke bare om fjorten dager, men også om hundre år om forholdene på jordens overflate er som nå. At dette er således er ikke noe man finner ut ved empiriske undersøkelser, eksperimenter eller ved innsamling av statiske data, men utelukkende ved å reflektere over betydningen til ordet "fornuftig". At man kan innse nødvendige sannheter ved dyptgående refleksjon over betydningen til ord er naturligvis noe visse filosofer, for eksempel Quine, benekter. Men det er noe man ikke uten videre kan betrakte som et argument mot det standpunkt som presenteres her.

Når det gjelder hva som er fornuftig å akseptere relativt til en gitt evidens (forutsatt at det er fornuftig å akseptere noe) synes det rimelig å hevde: (i) at det er fornuftig å akseptere denne evidens, og (ii) at det er fornuftig å akseptere enhver påstand som logisk sett følger fra denne evidens. Dette er helt i overenstemmelse med den teorien om akseptanse og sannsynlighet som har blitt fremsatt her.

En langt sterkere tese er den følgende: Nemlig de to påstander vi har nevnt ovenfor supplementert med denne tesen, nemlig: Det *eneste* som det er fornuftig å akseptere relativt til et utsagn y som representerer all tilgjengelig evidens er det som logisk sett følger fra utsagnet y samt dette utsagnet y selv.

Denne sterkere tesen kan formaliseres innenfor den rammen vi har arbeidet med her på følgende måte:

(+) $Ba(x,y) \leftrightarrow (x,y \hat{e} U \ \& \ y \neq \emptyset \ \& \ y \ Inkl \ x)$

Man ser at denne påstanden er en bikondisjonal. Dersom den er riktig kunne den i prinsippet brukes som en definisjon av akseptanserelasjonen Ba. Tesen er imidlertid svært sterk. Legges (+) til som et nytt aksiom til den akseptanseteorien vi har beskrevet utførlig tidligere kan man vise at den impliserer at enhver logisk mulig verden har nøyaktig den samme grad av indre koherens, harmoni og enkelhet som enhver annen mulig verden. Den impliserer også at ingen av de eksemplene vi tidligere har gitt på utsagn som det er fornuftig å akseptere relativt til den evidens vi har nå er utsagn som det er fornuftig å akseptere. For det tredje impliserer den, om man definerer "akseptabel induktiv slutning" på den måten som vi har gjort, at induktive slutninger i det vesentlige faller sammen med deduktive slutninger, eller for å være mer nøyaktig, at akseptable induktive slutninger i den betydning vi har innført egentlig ikke finnes.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Hvis man kort skal karakterisere det empiristiske standpunkt i filosofien kan man si at en empirist hevder at all kunnskap må kunne tilbakeføres til erfaringen. Noe forenklet kunne man si at hva en person vet ved et gitt tidspunkt *enten* må være noe vedkommende vet ved direkte sanseiaktagelse ved dette tidspunkt *eller* så må det være noe som logisk sett følger fra det vedkommende vet ved direkte sanseiaktagelse (ved dette tidspunkt). Dette gir en ikke bare en tilstrekkelig betingelse for å vite noe, det gir en enn mer en nødvendig betingelse. At disse betingelsene er tilstrekkelige for å vite noe innser enhver. At de derimot er nødvendige er ikke noe som på noen måte kan sies å være innlysende. Vi skal imidlertid ikke gi noen mer utførlig drøftelse av denne tesen på dette punkt.

La oss nå kalle, men bare i de følgende avsnitt, alle de utsagn som man ved tidspunktet t vet at er tilfelle ved direkte sanseiaktagelse for den evidens man har ved tidspunktet t. Den empiristiske doktrine kan da i lys av denne definisjonen omformes slik: Et utsagn representerer viten ved et gitt tidspunkt t hvis og bare hvis det enten er en del av den evidens man har ved tidspunktet t eller logisk sett følger fra de påstander som er elementer i denne evidens.

Det følger fra den empiristiske tese, og det skulle være ganske åpenbart, at generelle, kausalt pregede, lovmessigheter, hva enten de er av rent teoretisk natur eller empiriske lover, ikke er påstander man ved noe tidspunkt kan ha sikker viten om. Uansett ved hvilket tidspunkt man befinner seg og uansett hvor omfattende den evidens man har er ved dette tidspunkt vil det ikke være mulig å vise at disse lovmessigheter logisk sett kan utledes fra denne evidens.

Nå er den empiristiske tese en teori om viten. Den sier ikke noe direkte om hva fornuft er eller hva det er fornuftig å akseptere gitt en viss evidens. Fra en empiristisk synsvinkel tildeles imidlertid den menneskelig fornuft en ganske beskjeden rolle. Det man kan innse ved fornuften er i høyden logiske og matematiske sannheter. Det man derfor kan finne ut ved hjelp av fornuften er kun disse fornuftssannhetene selv, samt hva som følger fra dem sammen med den evidens man har. Dette innebærer at for en empirist vil det være fornuftig å akseptere en påstand ved et gitt tidspunkt t hvis og bare hvis denne påstanden følger logisk fra den evidens man har ved tidspunktet t. Sagt på en annen måte: det er fornuftig å akseptere en påstand x relativt til den evidens man har ved tidspunktet t hvis og bare hvis utsagnet x er en logisk konsekvens av den evidens man har ved dette tidspunktet t. Erstatter man i den siste setningen uttrykket "den evidens man har ved tidspunktet t" med "utsagnet y", og legger til at y må være et konsistent utsagn, får man formuleringen (+) ovenfor. Dette innebærer at (+) kan oppfattes som et generelt prinsipp som passer meget godt sammen med den empiristiske grunntanke.

Vi nevnte ovenfor endel konsekvenser av (+). En konskevens var at dersom tesen legges til vår teori om akseptanse og sannsynlighet impliserer den at enkelhetsrelasjonen er en ekvivalensrelasjon over mengden av de mulige verdener og at mengden av mulige verdener utgjør den eneste ekvivalensklasse som er indusert av denne relasjonen. Dette er åpenbart absurd. Man står derfor strengt tatt ovenfor to alternativer. Enten forkaster man den (begrensede eller fulle) teorien om akseptanse og sannsynlighet som vi har presentert eller så aksepterer man denne teorien. I det siste tilfelle må man forkaste (+), og om (+) er implisert av den empiristiske tese vi har nevnt ovenfor, må man også forkaste denne. Holder man imidlertid fast ved det empiristiske standpunkt er det klart at enkelhet for en empirist ikke i seg selv kan brukes til å rettferdiggjøre teorier som kronisk går utover den evidens man har ved noe tidspunkt. Man kan kun velge den enkleste teori av rent tankeøkonomiske grunner: En teori som er enklere enn en annen er som oftest lettere å teste, den er mindre anstrengende å tenke igjennom, den er lettere å huske og koster mindre av slit og strev om man skal forklare

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

den for andre forskere. Kort sagt er den mer behagelig å arbeide med, og gir en mer valuta for mindre strev. For en empirist har ikke enkelhet noen dypere erkjennelsesteoretisk funksjon enn akkurat dette.

Det er også endel andre konsekvenser av det empiristiske standpunkt som kan nevnes. Gitt at det man vet ved ethvert tidspunkt er det man vet ved sanseiaktagelse ved dette tidspunkt pluss det som logisk følger fra de data man har fått ved sanseiaktagelse kan man trekke den slutning at en generell nomotetisk teori alltid går utover totaliteten av det man vet. Den får derfor preg av å være en evigvarende hypotese såsant den ikke strider mot de nye iaktagelser man etterhvert gjør. Det følger derfor at uansett hvor mange iherdige forsøk på gjendrivelse en generell hypotese har overlevd må den ved ethvert tidspunkt betraktes med mistenksomhet fordi det alltid er mulig at man i fremtiden kan gjøre iaktagelser som tvinger en til å revidere den. Enhver teori eller hypotese som stemmer med de iaktagelser som man så langt har gjort må derfor anses som en tentativ hypotese, en mer eller mindre dristig gjetning. Dette kan forekomme en, mildt sagt, mindre rimelig. Ohms lov, lovene i elektristetslæren eller den rent geometriske optikk (for bare å trekke frem noen vilkårlige eksempler) og mange andre empiriske lovmessigheter har ikke, i lys av den evidens vi har ved det nåværende tidspunkt, karakter av å være gjetninger eller mer eller mindre grunnløse antagelser. En ingeniør som planlegger strømforsyningen til en avsidesliggende bygd vil neppe oppfatte elektristetslærens grunnsetninger som "tentative hypoteser". Ingen har i løpet av den tid man har bygd kraftledninger gitt noen evidens for at den praktiske anvendelse av disse teoretiske lovene ikke fungerer, og man ville åpenbart bli betraktet som en temmelig eksentrisk person om man for *alvor* betvilte dette. Forøvrig gjelder dette alle de eksemplene på empiriske lovmessigheter som vi nevnte tidligere (i §5.4). Gitt den evidens man har nå er det ingen grunn til å betvile dem, men tvertimot all mulig grunn til å akseptere dem. Men dette innebærer såvidt vi kan se at det ikke er korrekt å se på dem som "tentative hypoteser " eller "dristige gjetninger".

La oss avslutte våre refleksjoner med noe vi har nevnt og delvis understreket tidligere. Fra det forhold at det det er fornuftig å akseptere elektrisitetslærens eller den geomtriske optikks lover relativt til den evidens man har ved det nåværende tidspunkt følger det ikke på noen måte at det er fornuftig å akseptere disse lovene relativt til den evidens man sitter inne med om femti eller hundre år inn i fremtiden. Bildet kan da være et annet. Man bør imidlertid merke seg at man fra dette forhold ikke kan slutte at det er fornuftig å akseptere relativt til den evidens vi har nå at vi en eller annen gang i fremtiden vil ha evidens som strider mot de lovene som det nå er fornuftig å akseptere. Heller ikke følger det fra det at det er fornuftig å akseptere disse lovene nå at det vil være fornuftig å akseptere disse lovene relativt til den evidens man har ved ethvert senere tidspunkt. Endelig er det verdt å gjøre oppmerksom på at selvom det er logisk mulig å tenke seg at man i fremtiden har evidens som falsifiserer en teori som er konsistent med den evidens man har nå, så kan man ikke fra dette slutte at det ikke er fornuftig å akseptere denne teorien. Fra det forhold at det er logisk mulig at jeg sover nå følger det ikke at det er usikkert at jeg er våken nå, like lite som det fra det faktum at jeg er våken nå følger at det er logisk nødvendig at jeg er våken.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

DEL V

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

DEL V

Evidens og definitiv evidens

§1 Innledning.

Et menneske er ikke en rent fysisk ting. Man kan kanskje si at en persons legemsdeler, f.eks. personens hender, ben, fingre, tær osv. er fysiske objekter og at en person *har* et legeme. Men dette legemet som en person har er i mange henseende under personens kontroll. Dette innebærer at det er helt avhengig av personens vilje. De fysisk-kjemiske prosesser som skjer i min mage etter at jeg har spist et eple er helt hinsides min kontroll, men at jeg spiste eplet var en frivillig handling som man eventuelt måtte ha brukt makt for å forhindre. Hvis man derfor innrømmer at et en persons legeme er en fysisk gjenstand må man også innrømme at det er en i høyeste grad uvanlig fysisk gjenstand, og at det ikke er noen grunn til å tro at de fysiske lover som gjelder for døde fysiske objekter uten videre skulle gjelde for kroppen til en levende og tenkende person. La oss derfor understreke noen vesentlige trekk ved mennesket.

For det første er et menneske istand til å lære et språk og derfor istand til å meddele budskap til sine medmennesker. Ikraft av denne evnen til å beherske et språk er et menneske også i stand til å argumentere, trekke følgeriktige slutninger fra oppgitte premisser, gi mer eller mindre presise beskrivelser av de objekter som omgir det og overbevise sine medmennesker om riktigheten av visse oppfatninger og tanker ved logisk oppbygde tankerekker. For det andre er et menneske istand til å handle. Dette innebærer at det kan legge planer, vurdere disse planer mot alternative planer, og velge hvilken plan det vil ta sikte på å realisere. Dessuten kan det vurdere hvilke midler det er mest hensiktsmessig å bruke for å oppnå de mål det har satt seg. Et menneske er derfor i stand til å utvikle og bruke redskaper av alle mulige slag for å kunne forbedre og trygge sin livssituasjon. Men kanskje det viktigste trekk ved mennesket er at det kan sanse, se, iakta, observere og innrette sin tenkning, planer og handlinger etter det det faktisk observerer. En viktig betingelse for dette er imidlertid den indre strøm av opplevelser, sanseinntrykk, forestillingsbilder og annet mentalt innhold som fremtrer for bevisstheten til den som observerer, tenker og handler. Denne bevissthetsstrøms realitet er uomtvistelig og kan ikke reduseres til noe fysisk.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Vi skal kalle elementene i denne strømmen av mentalt innhold for bevissthetsinntrykk, og om vi taller om bevissthetsinntrykkene som fremtrer for en person ved et gitt tidspunkt bruker vi dette uttrykket i en vid betydning. Det inkluderer alle mulige sanseinntrykk, visuelle, taktile, osv. inkludert sanseopplevelser i og over forskjellige deler av kroppen, videre alle erindringsopplevelser, erindringsbilder og forestillingsbilder og den nesten kontinuerlige strømmen av indre tale. Videre omfatter klassen av bevissthetsinntrykk lystopplevelser av forskjellig karakter og styrke, følelser av behag velvære og avslapning. Vanligvis vil et bevissthetsinntrykk ha en viss varighet i tid. En smerteopplevelse kan for eksempel vare noen sekunder for så å avta i styrke og intensitet inntil den forsvinner helt. Det gir da en viss mening å snakke om denne smerteopplevelsens tilstand ved et gitt tidspunkt t. Vi skal kalle denne momentane tilstanden for et momentant bevissthetsinntrykk som fremtrer for individet. Selve smerteopplevelsen er da en sammenkjedning av disse momentane bevissthetsinntrykk som utgjør tilstanden til den ved hvert tidspunkt i det tidsintervallet den varer.

Mengden av alle de momentane bevissthetsinntrykk som fremtrer for individet x ved tidspunktet t kaller vi for den momentane totalopplevelsen til x ved tidspunktet t. *Den totale indre strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for personen x i tidsintervallet fra og med t1 til og med tidspunktet t2* kan da identifiseres med den funksjonen f som tilordner ethvert tidspunkt i dette intervallet [t1,t2] den momentane totalopplevelsen til x ved tidspunktet t. Vi skal også kalle den totale strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for x i intervallet [t1,t2] for *den totale indre erfaring til x i tidsintervallet [t1,t2]*.

Vi har nå i en viss forstand definert hva som menes med den totale indre erfaring til individet x i tidsintervallet [t1,t2] i verdenen w. La oss se på mengden av alle de verdener w' der vi har at den totale indre erfaring til x i intervallet [t1,t2] i verdenen w' er identisk med den totale indre erfaring til x i intervallet [t1,t2] i verdenen w. Mengden av alle disse mulige verdenene w' vil være sannhetsmengden til et utsagn som beskriver den totale indre erfaring til x over intervallet [t1,t2] i verdenen w. Vi skal betegne dette utsagnet med "M;[t1,t;2](x,w)".[84] Betrakter vi tidsintervallet <-inf,t], som er mengden av alle tidspunkter som kommer før eller er identisk med t,istedet for [t1,t2], vil M;<-inf, t](x,w) være det utsagnet som beskriver den totale indre erfaringen til x i verdenen w fra unfangelses-tidspunktet frem til, og inkludert, tidspunktet t.[85]

Det virker nå som det er ytterst rimelig å kreve at om y er et finstrukturert utsagn som x vet er riktig ved tidspunktet t i verdenen w at *utsagnet* som har samme sannhetsmengde som y, ie μ;-1(μ;f(y)) må være et utsagn som det er fornuftig å akseptere relativt til utsagnet M;<-inf,t](x,w). Med andre ord må x ved tidspunktet t i verdenen w ha *evidens* for utsagnet som har samme sannhetsmengde som y.

Det er imidlertid et sterkere krav man kan stille til viten og det er at man ikke bare må ha evidens for det man vet, men *definitiv evidens*. At x har definitiv evidens for utsagnet y ved tidspunktet t innebærer to ting: for det første må vedkommende ved tidspunkt t ha evidens for at y er et sant utsagn, for det andre må det også være slik at utsagnet y er et som det er fornuftig å akseptere for uansett hva x opplever etter tidspunktet t.[86]

84 For en formell definisjon kan man konsulterer Definisjon2.2.2 i §2.2 nedenfor.

85 Er t;d unfangelsestidspunktet til x i verdenen w vil x ikke ha noen bevissthetssinntrykk ved noe tidspunkt t som kommer før t;d. Dette innebærer at i så fall vi M;[t,t;d](x,w) være den funksjonen som til ethvert tidspunkt i [t, t;d] tilordner ø-mengden.

86 Vi gir en formell definisjon i §3 nedenfor. Se Definisjon 3.2.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Vi kan nå gi en oversikt over innholdet i denne delen av vårt arbeid. I §1.1 betrakter vi nødvendige betingelser for viten som vi ikke har studert tidligere og trekker frem evidens og definitiv evidens. I §1.2 gir vi en redegjørelse for strømmen av den indre erfaring til en person. I §1.3 gir vi en utførlig redegjørelse for skillet mellom evidens og definitiv evidens og hvorfor de begge er nødvendige betingelser for viten.

I §2 begynner vi å gi en formell fremstilling av vår teori om evidens og definitiv evidens. §2.1 inneholder de viktigste grunnsetningene om insidens-relasjonen i det vi innfører predikatet "verdenen w faller sammen med verdenen w ved tidspunktet t" som et nytt grunnbegrep i vår teori. I §2.2 innfører vi predikatet " y er et momentant bevissthets-inntrykk som fremtrer for personen x ved tidspunktet t i verdenen w", - "Frem;(w,t)(y,x)" og fremsetter de viktigste grunnsetningene for dette predikatet som vi har bruk for. Dessuten fremsetter vi grunnsetninger som forbinder dette predikatet med insisdens-predikatet som vi introduserte i §2 og §2.1. I dette avsnittet definerer vi også presist begrepet "Strømmen av bevissthetsinntrykk som fremtrer for x i tidsintervallet X i verdenen w", forkortet "M;X(x,w)" og beviser en rekke satser om dette viktige begrep. I §2.3 tar vi opp til drøftelse en rekke elementer i strømmen av bevissthetsinntrykk. Vi ser blandt annet i detalj på strømmen av visuelle inntrykk og strømmen av auditive inntrykk (hørselsinntrykk). Vi drøfter også ganske utførlig hvordan man kommer fra den indre mentale strøm av bevissthetsinntrykk "ut" til den ytre objektive verden av fysiske objekter. Dette skjer ikke ved at vi "konsistuerer" noen ytre verden på basis av vår indre strøm av "elementæropplevelser", men ved at vi ikraft av vår fornuft, etter å ha lært å tale, resonnere og argumentere ved hjelp av språket, innser at vi har definitiv evidens for at det finnes en hard og objektiv ytterverden som vil bestå i umåtelige tidsrom etter at vi mennesker har tatt våre siste åndedrag.

I §3 utvikler vi ytterligere vår teori om evidens og defintiv samt drøfter og kommenterer noen viktige grunnsetninger som ikke så langt har blitt nevnt. I §3.1 viser vi en rekke viktige satser om evidens og definitiv evidens. I §3.2 defiinerer vi to utsagnsfunksjoner Ev*;(x,t) og DEv*(x,t) ved hjelp av predikatene "Ev;(w,t)(x,y)" og "DEv;(w,t)(x,y)" som ble introdusert i §3. Vi viser her en rekke teoremer som er analoge med de elementær-teoremer og iterasjonsteoremene som vi beviste i forbindelse med de epistemiske relasjonene i Del III. Disse teoremene avslutter vårt arbeid. §4 inneholder noen avsluttende refleksjoner.

§1.1 Nødvendige betingelser for viten.

Det primære formålet med denne delen av vårt arbeid er å formulere og drøfte endel nødvendige betingelser for at en person skal kunne vite at et utsagn er sant, gi en analyse av disse nødvendige betingelser, og utvikle konsekvensene av den teori man får når man klargjør dem.

Vi har tidligere formulert en rekke *tilstrekkelige* betingelser for viten. Man kan i denne forbindelse for eksempel konsultere Figur 1 i Del III, §1. Men de eneste nødvendige betingelser for viten vi har nevnt har bare vært to stykker: For det første må en person for kunne sies å vite at et utsagn er sant også *tro*, eller være overbevist om, at dette utsagnet er sant. For det andre er det nødvendig at dersom en person skal vite at et utsagn er sant så må det være slik at *dette utsagnet faktisk er sant*. Sagt på en annen måte: Usanne utsagn kan ikke være objekter for viten.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Man kan ikke si om disse to betingelsene at de er spesielt opplysende og gir noen virkelig dypere innsikt i kunnskapens og erkjennelsens natur. Det er derfor nødvendig å gjøre i det minste et forsøk på å grave noe dypere.

I det følgende skal vi se på to andre betingelser som virker nødvendige for at man skal kunne snakke om viten. Den første betingelsen vi vil betrakte er *evidens*. For at en person skal kunne sies å vite at et utsagn y er sant ved et gitt tidspunkt er det nødvendig at *denne personen ved dette tidspunkt har, eller er i besittelse av, evidens for at dette utsagnet y er sant*. Det virker som nevnt rimelig å se på dette som en nødvendig betingelse. Det skulle imidlertid være innlysende at denne betingelsen alene, og heller ikke i kombinasjon med tro og sannhet, er noen tilstrekkelig betingelse for viten.

Den andre betingelsen vi vil betrakte er sterkere. Anta y er et utsagn som en person vet er riktig ved et gitt tidspunkt. Da er det ikke bare nødvendig at vedkommende har evidens for at dette utsagnet er sant, det er også nødvendig at vedkommende har *definitiv evidens* for at utsagnet er sant. Har en person definitiv evidens for at et utsagn er sant må vedkommende selvfølgelig også ha evidens for at dette utsagnet er sant. Man kan derfor sammenfatte ved å si at viten impliserer definitiv evidens som i sin tur impliserer evidens.

Så langt har vi selvfølgelig ikke gitt noe som ligner på en definisjon av hva som menes med evidens og definitiv evidens. Vi har bare basert oss på de fleste har en intuitiv, om en vag, forståelse av disse to begrepene og finner de påstandene vi har nevnt ovenfor rimelige, i det minste ved første øyekast. I det følgende vil forsøke å analysere disse begrepene mer utførlig ved å knytte dem nærmere til den teorien om akseptanse som vi har utførlig gjort rede for i Del IV av dette arbeid, samt en teori om den strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for en person i et gitt tidsintervall som vi vil gjøre rede for i det følgende.

§1.2 Strømmen av indre erfaring

Anta t og t' er to tidspunkter der tidspunktet t' kommer etter tidspunktet t. Anta videre at w er en mulig verden og at x er en person.

Vi skal under disse omstendigheter tale om *den totale indre strøm av bevissthets-inntrykk som fremtrer for personen x i tidsintervallet [t,t'] i verdenen w*. Dette er en entitet som åpenbart har en viss common-sense realitet og som derfor ikke kan ignoreres eller viftes vekk som noe som ikke eksisterer. For å lette lesbarheten i det følgende kan være hensiktsmessig å bruke et kortere og mer pregnant uttrykk istedet for det forholdsvis lange uttrykket ovenfor som vi har satt i kursiv. Vi skal istedet bruke *den indre erfaring til personen x i tidsintervallet [t,t'] i verdenen w*. Det bør understrekes at vi bruker disse to uttrykkende synonymt og at det siste, når det brukes, er valgt av stilistiske grunner.

La oss nå tenke oss at w er en fiksert verden og la oss tenke oss at vi betrakter den indre erfaring til personen x i tidsintervallet [t,t'] i denne verdenen w. Det er da intet som forhindrer oss fra å ytterligere betrakte alle de mulige verdener w' der den indre erfaring til x i intervallet [t,t'] i w' er identisk med den indre erfaring til x i verdenen w. Dette vil naturligvis være en mengde av mulige verdener og som sådan er det i lys av vår teori om utsagn

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

sannhetsmengden til et entydig bestemt utsagn. Dette utsagnet skal vi kalle for *det utsagnet som beskriver den indre erfaringen til personen x i intervallet [t,t'] i verdenen w*.

Ovenfor kan intervallet [t,t'] erstattes med et hvilket som helst annet halvåpent eller åpent tidsintervall. for eksempel <t,t'] , [t,t'> eller <t,t'>. Begrepene vi har innført vil uansett gi mening. Dette vil også være tilfelle om man betrakter et intervall av typen <-inf, t][87] og ser på den indre erfaing til x i intervallet <-inf, t] i verdenen w. Hvis x er en vanlig person som lever ved tidspunktet t må det selvfølgelig finnes et tidspunkt t;f der vedkommende fødes og hvor derfor t;f <t. Før dette tidspunktet t;f gir det neppe noen mening å si at noen bevissthetsinntrykk fremtrer for x. I intervallet <-inf, t;f> er derfor den indre erfaring til x i en viss forstand tom eller "null".[88] Det samme gjelder for fremtidige tidspunkter. Anta x lever og virker ved tidspunktet t og la oss betrakte den indre erfaring til x i intervallet [t,+inf>. Normal vil da x avgå ved døden ved et tidspunkt t;d der t <t;d. Ser vi da på den indre erfaring til x over intervallet <t;d ,+inf> vil også dette være et intervall hvor x rimligvis ikke har noen erfaringer i det hele tatt og hvor den indre erfaring over dette intervallet derfor kunne sies å være "tom" eller "null".

§1.3 Evidens og definitiv evidens

Vi har tidligere, i Del IV, utførlig omtalt relasjonen som består mellom to utsagn x og y hvis og bare hvis *det er fornuftig å akseptere at utsagnet x er sant gitt at utsagnet y representerer all den evidens som kan tas for gitt*. Som man husker kalte vi denne relasjonen for *akseptanserelasjonen* og vi betegnet den med "Ba". Vi tar det nå for gitt at leseren er fullt ut kjent med det vi Del IV har skrevet om denne relasjonen.

Det virker nå som det er mulig å gi en definisjon av evidens gitt de begrepsdannelsene vi har innført ovenfor. Den følgende påstand virker rimelig:

Personen x har ved tidspunktet t i verdenen w evidens for at utsagnet y er sant hvis og bare hvis det er fornuftig å akseptere utsagnet y gitt at det utsagnet som beskriver den indre erfaringen til x i intervallet <-inf,t] i verdenen w representerer all den evidens som kan tas for gitt. Dette kan også uttrykkes slik: En person x er i besittelse av evidens for at utsagnet y er sant hvis og bare hvis det er fornuftig å akseptere utsagnet y relativt til det utsagnet som beskriver den indre erfaring som x har hatt i løpet av hele sitt liv. Denne påstanden er en bikondisjonal. Tenker man seg nøye om virker kondisjonalen mot venstre i denne bikondisjonalen ytterst rimelig. Det er imidlertid heller ikke direkte urimelig å akseptere kondisjonalen mot høyre: Har man virkelig evidens for en påstand må det være fornuftig å akseptere denne påstanden gitt all den indre erfaring man har, med andre ord må det være fornuftig å akseptere påstanden gitt den totale strøm av bevissthetsinntrykk som har vist seg for en i løpet av livet.

Vi har nå sett på hva det vil si at personen x ved tidspunktet t har *evidens* for at utsagnet y er sant i verdenen w. La oss derfor gå over til å se på hva det eventuelt måtte innebære at en person har *definitiv evidens* for at et utsagn er sant. Har man definitiv evidens for noe må man

87 <-inf,t> er definert som mengden av alle de tidspunkter som kommer før tidspunktet t, ie. vi setter <-inf,t> = Mg(t': t'êT & t'<t). Tilsvarende er <t,+inf> definert som Mg(t': t'êT & t<t').
88 Vi vil gi en presis mening til dette når vi senere formaliserer vår teori.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

åpenbart ha evidens for dette, men det må også komme noe i tillegg. Hva som må komme i tillegg er det vi nå vil forsøke å gjøre rede for.

Anta y er et utsagn som det er fornuftig å akseptere relativt til det utsagn som beskriver den indre erfaring til individet x i intervallet <-inf, t] i verdenen w. Da har x evidens (i verdenen w ved tidspunktet t) for at utsagnet y er sant. Men for at x skal ha definitiv evidens for utsagnet y synes det å måtte være slik at uansett hva x erfarer etter tidspunktet t kan ikke dette sammen med det han har erfart før tidspunktet t eller ved t på noen måte omstøte at det fremdeles er fornuftig å akseptere utsagnet y. Når dette siste kommer i tillegg til det at x har evidens for y er det at man kan si at vedkommende har *definitiv evidens* for at utsagnet y er sant. Det er dette siste som det nå er nødvendig å utdype.

I denne sammenheng finner vi det hensiktsmessig å innføre begrepet insidens mellom mulige verdener. Vi sier at en *verden w er insident med med verdenen w' ved tidspunktet t* hvis og bare hvis verdenene w og w' faller sammen ved tidspunktet t. (Men de behøver ikke å være sammenfallende ved noen andre tidspunkter.) Videre sier vi, dersom X er en vilkårlig mengde med tidspunkter, at verdenene w, w' er insidente med hensyn på X hvis og bare hvis w og w' er insidente ved alle tidspunktene i mengden X. I prinsippet kan X her være en vilkårlig mengde med tidspunkter, men det er naturlig i denne forbindelse å betrakte intervaller av typen <t, t'>, <t, t'], [t, t'>, [t, t'], [t, +inf>, <-inf, t> etc. At to verdener er insidente i intervallet [t,t'] innebærer derfor ikke noe annet enn at de faller sammen ved alle tidspunkter i dette intervallet.

Vi kan nå gi en mer presis definisjon av definitiv evidens.

Vi sier at x ved tidspunktet t i verdenen w har *definitiv evidens* for at utsagnet y er sant hvis og bare hvis de følgende to betingelser er oppfylt: (a) utsagnet y er et som det er fornuftig å akseptere relativt til det utsagnet som beskriver x's indre erfaring i tidsintervallet <-inf,t] i verdenen w. (b) For alle verdener w' og alle tidspunkter t' der t' >t og hvor verdenen w' er insident med verdenen w med hensyn på tidsintervallet <-inf, t] har man at det er fornuftig å akseptere utsagnet y relativt til det utsagnet som er konjunksjonen av (1) det utsagnet som beskriver x's indre erfaring i intervallet <-inf, t] i verdenen w og (2) det utsagnet som beskriver den indre erfaring til x i intervallet <t, t'] i verdenen w'.

Dermed har vi fullført den oppgaven som besto i å gi en definisjon av definitiv evidens.

Vi har nå innført to begreper som er forholdsvis klare nemlig insidensrelasjonen og akseptanserelasjonen.

Er X en mengde med tidspunkter ser man lett at insidens mellom to mulige verdener med hensyn på X er en ekvivalensrelasjon. Dette gjelder også for insidensrelasjonen mellom mulige verdener med hensyn på et tidspunkt t. Det skulle også være lett å se at insidens med hensyn på en mengde med tidspunkter kan defineres ved hjelp av insidens med hensyn på et bestemt tidspunkt.

Det andre begrepet vi har innført er akseptanserelasjonen, det vil si den relasjonen som består mellom to utsagn x og y hvis og bare hvis x er et utsagn som det er fornuftig å akseptere gitt at utsagnet y representerer alt det som kan tas for gitt. Når det gjelder denne

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

relasjonen har vi utarbeidet og utførlig kommentert en teori om denne i Del IV. Det skulle derfor være unødvendig å ytterligere kommentere dette begrepet her.

Definisjonen av definitiv evidens som vi har gitt ovenfor benytter seg av begge disse begrepene, men det er også ytterligere et begrep i denne definisjonen som må avklares i større grad. Vi har i tankene begrepet 'den indre erfaring til individet x i tidsintervallet [t,t'] i verdenen w'. Vi skal i det følgende kommentere dette begrepet litt mer utførlig.

Som man husker brukte vi uttrykket "den indre erfaring til individet x i tidsintervallet [t, t'] i verdenen w" som en forkortelse for det lengere uttrykket "den totale indre strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for individet x i tidsintervallet [t, t'] i verdenen w"

Det er to bemerkninger som vi gjerne vil fremsette i forbindelse med det sistnevnte uttrykket. For det første nevner vi at uttrykket "bevissthetsinntrykk", som kan virke uvanlig, er ganske omfattende. Det omfatter sanseinntrykk av alle slag som for eksempel inntrykk av lukt og smak, men selvfølgelig også synsinntrykk, hørselsinntrykk og inntrykk av berøring. Videre omfatter det slike ting som smerteopplevelser lokalisert til forskjellige deler av kroppen og med varierende intensitet. Dessuten omfatter det opplevelser av kulde og varme. Videre vil opplevelser av angst kunne regnes som bevissthetsinntrykk, men også fornemmelser av velvære av forskjellig art. I begrepet 'bevisssthetsinntrykk' inkluderer vi imidlertid også slike ting som forestillingsbilder, erindringsbilder og etterbilder, med andre ord mentale inntrykk som ikke direkte er knyttet til sanseinntrykk som dannes ved direkte påvirkninger av det fysiske sanseapparat. La oss også nevne at vi blandt bevissthets-inntrykkene også regner den mer eller mindre uavbrutte strøm av indre tale.

Det andre vi vil bemerke i forbindelse med den totale indre strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for en person i et gitt tidsintervall er at denne kan oppfattes som en fremadskridende kontinuerlig sekvens av momentane tilstander. La oss anta at S er den totale indre strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for individet x i intervallet [t, t'] i verdenen w. Anta nå at r er et tidspunkt i intervallet [t, t']. Da virker det rimelig å tenke seg at strømmen S befinner seg i en gitt tilstand ved tidspunktet r som vi kan betegne med S(r). Det virker også rimelig å si at strømmen S selv kan representers ved de diverse S(r) ettersom r gjennomløper tidspunktene i intervallet [t, t']. S(r) vil representere en momentan "del" av S, og det virker ikke unaturlig å kalle S(r) for *den momentane indre totalopplevelsen* som fremtrer for individet x i verdenen w. Hvis man holder fast ved denne terminologien kan man derfor si at den totale indre strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for x i intervallet [t, t'] i verdenen w er summen av alle de momentane indre totalopplevelsene som x har ved tidspunktet r i verdenen w ettersom r gjennomløper alle tidspunktene i intervallet [t, t'].

Hva er så *den momentane indre totalopplevelsen* som fremtrer for individet x i verdenen w? Det er nærliggende å si at den er mengden av alle de momentane bevisthetsinntrykk som fremtrer for x ved dette tidspunktet t i verdenen w. Men dette innebærer at vi kan definere hva som menes med den momentane indre totalopplevelsen som fremtrer for individet x ved tidspunktet t ved hjelp av predikatet: "y er et momentant bevissthetsinntrykk som fremtrer for personen x ved tidspunktet t i verdenen w". La oss kalle dette uttrykket for fremtredelses-predikatet. Det vi har skrevet ovenfor impliserer derfor også den totale indre strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for x i intervallet [t, t'] i verdenen w kan defineres ved hjelp av dette predikatet. Men dermed kan vi også ved hjelp av dette predikat gi en definisjon av utsagnet som beskriver den totale indre strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for x i intervallet [t, t'] i verdenen w.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

La oss forkorte uttrykket " y er et momentant bevissthetsinntrykk som fremtrer for personen x ved tidspunktet t i verdenen w" med "Frem;(w,t)(y,x)". Da kan vi definere den momentane indre totalopplevelsen som fremtrer for individet x ved tidspunktet t som Mg(y: Frem;(w,t)(y,x)). Videre vil den totale indre strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for x i intervallet [t, t'] i verdenen w kunne identifiseres med funksjonen:

Mg(<t1, Mg(y: Frem;(w,t1)(y,x))> : t1ê[t, t'])

Endelig kan det utsagnet som beskriver den totale indre strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for x i intervallet [t, t'] i verdenen w identifiseres med det utsagn hvis sannhetsmengde er:

Mg(w': w'êI & (Ar)(rê[t, t'] → (Ay)(Frem;(w,r)(y,x) ↔ Frem;(w',r)(y,x))))

Dette utsagnet skal vi betegne med "M;[t,t'](x,w)".

I neste avsnitt skal vi fremstille teorien om insidens og teorien for predikatet "Frem;(w,t)(y,x)" helt formelt og detaljert og gi helt presise definisjoner innenfor den rammen vi setter opp av evidens og definitiv evidens. Men vi konstaterer allerede på dette punkt at vi nå har avklart de vesentlige begrepene som inngår i de definisjonene (som er av en noe uformell karakter) av evidens og definitiv evidens som vi har gitt ovenfor.

§2 Formel fremstilling av teorien om evidens og definitiv evidens

Vi skal nå gi en mer rigorøs og formell fremstilling av den teorien som ble fremstilt på en mer skissemessig måte i de foregående paragrafer. Det kan være gunstig å starte med å avgrense det språket vi vil arbeide innenfor. La L være språket til den kunnskapsteorien som ble lagt frem i Del II. Vi utvider dette pråket med tre nye predikater. Det første predikatet er (1) "w er en mulig verden som er insident med verdenen w' ved tidspunktet t". Vi forkorter dette predikatet med "Ins;t(w,w')". Det andre predikatet vi innfører er (2) "x er et utsagn som det er fornuftig å akseptere gitt at utsagnet y representerer all den evidens som kan tas for gitt". Vi bruker "Ba(x,y)" som forkortelse for denne konstruksjonen. Det tredje predikatet vi innfører er "y er et momentant bevissthetsinntrykk som fremtrer for personen x ved tidspunktet t i verdenen w". Når det gjelder dette predikatet skal vi forkorte det med "Frem;(w,t)(y,x)". Det språket vi nå er arbeider innenfor er derfor språket til kunnskapsteorien, L, utvidet med disse tre nye predikatene og ingen andre. Det skulle være ganske klart at de predikatene vi har nevnt her ikke uten videre kan defineres ved hjelp av dem som allerede inngår i vokabularet til L

Vi skal starte med å formulere endel grunnsetninger om insidens mellom mulige verdener som virker temmelig innlysende.

§2.1 Grunnsetninger om insidens

Utfra selve lesemåten til uttrykket "w er en verden som er insident med verdenen w' ved tidspunktet t " forekommer det rimelig å si at w og w' må være logisk mulige verdener og t et tidspunkt. Vi skal ta dette for gitt. Den følgende grunnsetning, som uttrykker denne tanke, kan derfor formaliseres slik:

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Ins1 Ins;t(w,w') → w,w'êI & têT

Her er selvfølgelig T mengden av tidspunkter og I mengden av alle logisk mulige verdener.

Nå skulle det videre være temmelig opplagt at denne insidensrelasjonen mellom mulige verdener ved et gitt tidspunkt burde være en ekvivalensrelasjon. I så fall skulle de følgende tre grunnsetninger fortone seg ytterst rimelige, nærmest trivielle:

Ins2 wêI &têT → Ins;t(w,w)
Ins3 Ins;t(w,w') & Ins;t(w',w") → Ins;t(w,w")
Ins4 Ins;t(w,w') → Ins;t(w',w)

Det første av disse tre aksiomene sier at insidensrelasjonen er refleksiv. De to andre sier at relasjonen henholdsvis er transitiv og symmetrisk. Dette innebærer at aksiomene samlet impliserer at er en ekvivalensrelasjon og den derfor inndeler mengden av mulige verdener i en mengde av ikke-tomme ekvivlensmengder som er innbyrdes disjunkte og som samlet uttømmer mengden av mulige verdener.

Før vi går videre kan det være nyttig å si noe om den notasjonen vi bruker i forbindelse med tidsintervaller. Er t1 ogt2 to tidspunkter betegner [t1, t2] mengden av alle de tidspunkter som kommer etter eller er identisk med t1 og som kommer før eller er identisk med tidspunktet t2. <t1, t2] betegner mengden av alle de tidspunkter som kommer etter t1 og som kommer før eller er identisk med t2. <t1, t2> betegner mengden av alle de tidspunkter som kommer etter t1 og som kommer før t2. Tidspunktene t1 og t2 er ikke selv elementer i <t1, t2>. Videre betegner [t1, t2> mengden av alle de tidspunktene som enten er lik t1 eller kommer etter t1, men som kommer før t2. Tidspunktet t2 er derfor ikke noe element i intervallet [t1, t2>. La oss tilslutt nevne at <-inf, t] betegner alle tidspunktene som kommer før eller er identisk med tidspunktet t, og at [t,+inf> betegner alle tidspunktene som kommer etter eller er identisk med tidspunktet t. Tilsvarende betegner <-inf,t> mengden av alle tidspunkter som kommer før t, men tidspunktet t er ikke med. <t,+inf> betegner mengden av alle tidspunkter som kommer etter t.

Anta nå at X er en ikke-tom mengde med tidspunkter. Vi sier da at to mulige verdener w og w' er insisdente med hensyn på X hvis og bare hvis de er insisdente med hensyn på ethvert tidspunkt t som er med i mengden X. Vi betegner denne relasjonen med Ins;X(w,w') og gir den følgende formelle definisjon:

Definisjon2.1.1 Anta ø≠X Inkl T og w,w'êI Da setter vi:
Ins;X(w,w') ↔ (At)(têT → Ins;t(w,w')

Gitt denne definisjonen av Ins;X er det meget lett å vise denne relasjonen, i likhet med Ins;t er en ekvivalensrelasjon. Det bør også bemerkes at vi i det følgende ikke så mye vil operere med en vilkårlig mengde X med tidspunkter i forbindelse med denne relasjonen men vil betrakte intervaller av tidspunkter som [t, t'], [t, t'>, [t, +inf>, [-inf, t] osv. og derfor også viø arbeide med insidensrelasjoner av typen Ins;[t, t'](w,w'), Ins;<-inf, t](w,w') osv.

La oss nå gå over til å betrakte hva vi innenfor den språkrammen vi har avgrenset kan si om bevissthetsinntrykk.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

§2.2 Bevissthetsinntrykk og indre erfaring

Den følgende grunnsetning skulle være totalt opplagt i lys av betydningen til predikatet "y er et momentant bevisshetsinntrykk som fremtrer for personen x ved tidspunktet t i verdenen w":

Bev1 $\quad Frem;(w,t)(y,x) \rightarrow wêI \,\&\, têT \,\&\, xêP$

Her er I mengden av mulige verdener, T mengden av tidspunkter og P mengden av personer. Akiomet sier selvfølgelig at w er en mulig verden, t et tidspunkt og x en person dersom vi har Frem:(w,t)(y,x), dvs. at y er et momentant bevissthetsinntrykk som fremtrer for personen x ved tidspunktet t i verdenen w.

Vår neste grunnsetning forbinder predikatene "Ins;t(w,w')" og "Frem;(w,t)(x,y)". Den sier at dersom w er en mulig verden som er insident med verdenen w' ved tidspunktet t så er det slik at dersom y er et momentant bevissthetsinntrykk som fremtrer for x ved tidspunktet t i verdenen w så må også dette momentane bevissthetsinntrykket fremtre for x ved tidspunktet t i verdenen w' og omvendt. Denne setningen kan uttrykkes slik:

Bev2 $\quad Ins;t(w,w') \rightarrow \; (Frem;(w,t)(y,x) \leftrightarrow Frem;(w',t)(y,x))$

Også denne grunnsetningen skulle være innlysende: Faller to mulige verdener sammen ved tidspunktet t kan det ikke ved tidspunktet t fremtre et momentant bevissthetsinntrykk for x i w som ikke også fremtrer for x ved t i verdenen w'.

Anta wêI, têT og xêP. Da kan vi ikke fra noen av de aksiomene vi har nevnt ovenfor, eller i den teorien vi forøvrig har fremstilt, utlede at Mg(y: Frem;(w,t)(y,x)) er en mengde. Dette er imidlertid et aksiom vi har bruk for. Vi postulerer derfor at denne mengden eksisterer om w, t, og x er slik at <w,t,x>êIxTxP. Grunnsetningen kan formaliseres slik:

Bev3 $\quad wêI \,\&\, têT \,\&\, xêP \;\rightarrow\; M(Mg(y: Frem;(w,t)(y,x)))$

Den neste grunnsetningen sier at momentane bevissthetsinntrykk er strengt private, med andre ord har man at dersom y er et momentant bevissthetsinntrykk som fremtrer for x ved tidspunktet t kan ikke y være et bevisshetsinntrykk som fremtrer for en annen distinkt person ved noe som helst tidspunkt. Dette kan formaliseres slik:

Bev4 $\quad Frem;(w,t)(y,x) \,\&\, zêP \,\&\, x \neq z. \;\rightarrow \neg(Et')(t'êT \,\&\, Frem;(w,t')(y,z))$[89]

Vår neste grunnsetning sier at dersom et momentant bevissthetsinntrykk fremtrer for individet x ved tidspunktet t i verdenen w så kan ikke dette bevissthetsinntrykket y fremtre for x ved

89 Man kan diskutere om ikke Bev4 kan forsterkes til

Bev4* $\quad Frem;(w,t)(y,x) \,\&\, zêP \,\&\, z \neq x. \;\rightarrow \sim(Ew')(Et')(w'êI \,\&\, t'êT \,\&\, Frem;(w',t')(y,z))$

Man ser at Bev4* impliserer Bev4. Vi skal ikke ta stilling til dette her. Men det må innrømmes at vi finner Bev4* temmelig plausibel. Imidlertid er det ikke noe i det som følger som tilsier at Bev4 ikke er tilstrekkelig for å utlede de teoremene vi skal presentere i det følgende.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

noe annet tidspunkt i verdenen w. Dette innebærer at ethvert momentant bevissthetsinntrykk i en viss forstand er unikt. Man vil aldri senere ha dette inntrykk og man har aldri tidligere hatt det.

Denne grunnsetningen kan formaliseres slik:

Bev5 Frem;(w,t)(y,x) & t'êT & t≠t' → ¬Frem;(w,t')(y,x)

Dermed har vi formulert de grunnsetningene om relasjonen Frem som vi har bruk for i det følgende.

Mengden av alle de momentane bevissthetsinntrykk y der vi har at det finnes en wêI, et têT og en xêP slik at Frem;(w,t)(y,x) kaller vi for mengden av alle logisk mulige bevissthetsinntrykk. Vi betegner denne mengden med S og gir den følgende definisjon:

Definisjon 2.2.1 S = Mg(y: (Ew)(Et)(Ex)(wêI & têT & xêP & Frem;(w,t)(y,x)))

I det følgende bruker vi notasjonen Pt(S)^X, der det forutsettes at X er en ikke-tom mengde med tidspunkter. Pt(S)^X er mengden av alle de funksjoner f der man har at domenet til f er X og at verdiområdet til f er er inludert i Pt(S). Dette innebærer at

Pt(S)^ X = Mg(f: Func(f) & Dom(f) =X & Rgn(f) Inkl Pt(S))

Har vi derfor at fêPt(S)^X og têX følger det at f(t) er en mengde av logisk mulige momentane bevissthetsinntrykk i den betydning vi har definert ovenfor.

Er fêPt(S)^X kaller vi f for *en potensiell strøm av bevissthetsinntrykk over X*. Med andre ord er Pt(S)^X mengden av alle potensielle strømmer av bevissthetsinntrykk over X. Er fêPt(S)^X sier vi at *f er realisert i verdenen w med hensyn på individet x* hvis og bare hvis man har (At)(têX → f(t) = Mg(y: Frem;(w,t)(y,x)). Man ser lett fra denne definisjonen at dersom f og g er funksjoner i Pt(S)^X og begge er realisert i verdenen w med hensyn på individet x så har man at funksjonene er identiske, ie. at f=g. Enhver potensiell strøm av bevissthetsinntrykk over tidspunktmengden X som er realisert i en verden w med hensyn på et individ x er derfor entydig bestemt.

Anta igjen at ø≠XêPt(T), dvs. at X er en ikke-tom mengde med tidspunkter. Da kaller vi λ/têX/(Mg(y: Frem;(w,t)(y,x)) for den totale indre strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for x over tidspunktmengden X i verdenen w. La oss med en gang bemerke at X godt kan være et intervall av tidspunkter, for eksempel [t, t'] der t,t' êT og t =<t'.

Setter man f = λ/têX/(Mg(y: Frem;(w,t)(y,x)) ser man umiddelbart at fêPt(S)^X og at f er en potensiell strøm av bevissthetsinntrykk som er realisert i verdenen w med hensyn på individet x.

La oss se på mengden av alle de verdener w' der vi har:

λ/têX/(Mg(y: Frem;(w',t)(y,x)))= λ/têX/(Mg(y: Frem;(w,t)(y,x)))

Dette innebærer at vi betrakter mengden av alle de verdener w' der den indre strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for individet x over tidspunktmengden X i verdenen w' er

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

identisk med den indre strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for individet x over tidspunktmengden X i verdenen w. Denne mengden av mulige verdener vil være sannhetsmengden til et utsagn. Vi skal betegne dette utsagnet med "M;X(x,w)". Dette utsagnet er altså sant i nøyaktig de og bare de verdenene w' der den totale indre strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for x over tidspunktmengden X i verdenen w foreligger realisert i verdenen w' med hensyn x. Vi skal kalle dette utsagnet for *utsagnet som entydig beskriver den totale indre strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for x over mengden av tidspunkter X i verdenen w*. Eller kortere utsagnet som entydig beskriver den indre erfaring til til x over X i verdenen w. Vi definerer "M;X(x,w)" formelt slik:

Definisjon 2.2.2 Anta ø≠ XêPt(T), xêP og wêI. Da setter vi:

M;X(x,w) = μ;-1[Mg(w': wêI &
λ/têX/(Mg(y: Frem;(w',t)(y,x)))= λ/têX/(Mg(y: Frem;(w,t)(y,x))))]

Denne definisjonen kan formuleres enklere slik:

(+) M;X(x,w) = μ;-1[Mg(w': w'êI &
(At)(têX → (Ay)(Frem;(w',t)(y,x) ↔ Frem;(w,t)(y,x))))]

Man ser lett at høyre side i (+) er ekvivalent med definiens i Definisjon 2.2.2.

Det følgendee teorem viser noen viktige, men elementære egenskaper til operasjonen M:

Teorem 2.2.1 (a) Anta ø≠XêPt(T) & xêP. Sett per definisjon:

E = Mg(<w,w'>: w,w'êI & w' ╞ M;X(x,w))

Da har man E er en ekvivalensrelasjon:

(i) wêI → E(w,w)
(ii) E(w,w') → E(w',w)
(iii) E(w,w') & E(w',w") → E(w,w")

(b) Anta X;1, X;2êPt(T) og X;1≠ø & X;2≠ø. Anta w,w'êI. Da har man:

X;1 Inkl X;2 → Ins;X;2(w,w') → w ╞M;(X;1)(x,w')

Bevis: *Ad (a)*: Fra definisjonen av E i forutsetningene og (+) ovenfor skulle det ikke være vanskelig å se at man har:

(1) E(w,w') ↔ w,w'êI & (At)(têX → (Ay)(Frem;(w',t)(y,x) ↔ Frem;(w,t)(y,x)))

Anta (2) wêI. Da har man åpenbart (At)(têX → (Ay)(Frem;(w,t)(y,x) ↔ Frem;(w,t)(y,x))). Men fra dette og (1) følger E(w,w). Dette viser at (i) holder.

Anta E(w,w'). Da følger ved hjelp av (1) at (3) w,w'êI & (At)(têX → (Ay)(Frem;(w',t)(y,x) ↔ Frem;(w,t)(y,x)))

Fra dette følger (4) w',wêI & (At)(têX → (Ay)(Frem;(w,t)(y,x) ↔ Frem;(w,'t)(y,x)))

Herav har vi så ved hjelp av (1) at E(w',w). Dette viser at (ii) holder.

Anta E(w,w') & E(w',w"). Da har vi ved hjelp av (1) at

(5.1) w,w'êI & (At)(têX → (Ay)(Frem;(w',t)(y,x) ↔ Frem;(w,t)(y,x)))
(5.2) w',w"êI & (At)(têX → (Ay)(Frem;(w",t)(y,x) ↔ Frem;(w',t)(y,x)))

Men fra (5.1) og (5.2) følger åpenbart:

(6) w,w"êI & (At)(têX → (Ay)(Frem;(w",t)(y,x) ↔ Frem;(w,t)(y,x)))

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

og derfor E(w,w") i lys av (1). Dette viser at (iii) holder. Dermed har vi vist at punkt (a) holder.

Ad (b): Anta forutsetningene i (b) holder. Anta (1) X;1 Inkl X;2 & Ins;X;2(w,w') Fra den siste konjunkten i (1) og definisjonen av Ins;(X;2) følger:

(2) (At)(têX;2 → Ins;t(w,w')). Men fra dette følger ved hjelp av (1):

(3) (At)(têX;1 → Ins;t(w,w'))

Vi må vise w ⊨ M;(X;1)(x,w'). I lys av (+) ovenfor vil det være tilstrekkelig å vise

(4) w'êI &(At)(têX;1 → (Ay)(Frem;(w',t)(y,x) ↔ Frem;(w,t)(y,x))))

Anta têX;1 for vilkårlig t. Da følger fra (3) at Ins;t(w,w'). Men fra dette og Bev2 følger

(5) (Ay)(Frem;(w',t)(y,x) ↔ Frem;(w,t)(y,x))

Siden t var vilkårlig kan man slutte at den andre konjunkten i (4) holder. At w'êI følger fra forutsetningene i (b). Dette viser at også punkt (b) holder. **QED**.

Vi skal bevise ytterligere noen setninger om operasjonen M. Satsene er av en ganske generell natur og forsåvidt relatert til den ovenfor, men de fortjener spesiell oppmerksomhet fordi de vil bli brukt senere i forbindelse med noen (ganske elementære) satser vil vise om definitiv evidens. Den første setningen er denne:

Teorem 2.2.2 Anta ø≠X êPt(T) og at w,w'êI & xêP. Da gjelder:
Ins;X(w,w') → M;X(x,w) = M;X(x,w')

Bevis: Anta forutsetningene holder og at (1) Ins;X(w,w'). Fra dette og definisjonen av Ins;X kan man slutte: (2) (At)(têX → Ins;t(w,w')). Anta nå for vilkårlig w" at (3) w" ⊨ M;X(x,w). Da følger ved hjelp av definisjonen av M at

(4) (At)(têX → (Ay)(Frem;(w,t)(y,x) ↔ Frem;(w",t)(y,x)))

Fra dette, (2) og grunnsetningen Bev2 følger:

(5) (At)(têX → (Ay)(Frem;(w',t)(y,x) ↔ Frem;(w",t)(y,x)))

Men fra dette og definisjonen av M kan man slutte w" ⊨ M;X(x,w'). Dette viser inklusjonen mot høyre. Inklusjonen den andre veien vises på nøyaktig samme måte. **QED**.

Vårt neste teorem er dette:

Teorem 2.2.3 Anta X;1,X;2êPt(T) & X;1≠ø & X;2≠ø. Anta videre at w,w' êI, xêP og at Ins;(X1)(w,w'). Da gjelder:

(a) M;(X;1UX;2)(x,w) = M;(X;1)(x,w)ΩM;(X;2-X;1)(x,w)

(b) M;(X;1UX;2)(x,w) = M;(X;1)(x,w')ΩM;(X;2-X;1)(x,w)

Bevis: Fra den siste forutsetingen følger: (1) (At)(têX;1 →Ins;t(w,w'))

Ad (a): La w" være en vilkårlig mulig verden. Det vil da, i lys av definisjonen av M, være tilstrekkelig å bevise at de følgende to betingelser er ekvivalente:

(2) (At)(têX;1 U X;2 → (Ay)(Frem;(w,t)(y,x) ↔ Frem;(w",t)(y,x)))

og

(3.1) (At)(têX;1 → (Ay)(Frem;(w,t)(y,x) ↔ Frem;(w",t)(y,x)))

(3.2) (At)(tê(X;2 -X;1) → (Ay)(Frem;(w,t)(y,x) ↔ Frem;(w",t)(y,x)))

Vi må altså vise at (2) impliserer konjunksjonen av (3.1) og (3.2) og at denne konjunksjonen impliserer (2)

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

At (2) impliserer (3.1) og (3.2) er opplagt. Vi behøver derfor ikke føre noe detaljert bevis for dette. La oss nå vise at (3.1) og (3.2) impliserer (2).

Anta derfor for vilkårlig t at (4) tê X;1UX;2. Siden X;1UX;2= X;1U(x;2-X1) er det to muligheter enten at têX;1 eller at têX;2-X;1. I det første tilfelle følger (Ay)(Frem;(w,t)(y,x) ↔ Frem;(w",t)(y,x)) ved hjelp av (3.1). I det andre tilfelle følger dette ved hjelp av (3.2). Siden t var vilkårlig følger det at (2) holder. Dermed har vi gitt et fulstendig vbevis for punkt (a).

Ad (b): Dette følger umiddelbar fra (1) og punkt (a) ved hjelp av Teorem 2.2.2 **QED**.

Teorem 2.2.4 Anta X;1,X;2êPt(T) & X;1≠ø & X;2≠ø. Anta w0,w1,w2êI og at xêP og anta

(i) Ins;(X;1)(w0,w1) & Ins;(X;1UX;2)(w1,w2)

Da gjelder:

(a) M;(X;1UX;2UX;3)(x,w2) = M;(X;1)(x,w2) Ω M;(X;2-X;1)(x,w2) Ω M;(X;3-(X;1UX;2))(x,w2)

(b) M;(X;1UX;2UX;3)(x,w2) = M;(X;1)(x,w0) Ω M;(X;2-X;1)(x,w2) Ω M;(X;3-(X;1UX;2))(x,w2)

(c) M;(X;1UX;2UX;3)(x,w) = M;(X;1)(x,w1) Ω M;(X;2-X;1)(x,w1) Ω M;(X;3-(X;1UX;2))(x,w2)

Bevis: *Ad (a)*: La w" være en vilkårlig mulig verden. Det vil da, i lys av definisjonen av M, være tilstrekkelig å bevise at de følgende to betingelser er ekvivalente, nemlig:

(1) (At)(têX;1 U X;2U X;3 → (Ay)(Frem;(w,t)(y,x) ↔ Frem;(w",t)(y,x)))

og konjunksjonen av de følgende tre setninger.

(2.1) (At)(têX;1 → (Ay)(Frem;(w,t)(y,x) ↔ Frem;(w",t)(y,x)))

(2.2) (At)(tê (X;2-X;1) → (Ay)(Frem;(w,t)(y,x) ↔ Frem;(w",t)(y,x)))

(2.3) (At)(tê(X;3 -(X;1UX;2)) → (Ay)(Frem;(w,t)(y,x) ↔ Frem;(w",t)(y,x)))

At (1) impliserer hver og en av (2.1) - (2.3), og derfor konjunksjonen av dem, skulle være opplagt. At konjunksjonen av (2.1) - (2.3) impliserer (1) følger fra det faktum at

(3) X;1UX;2UX;3 = X;1 U (X2-X;1) U (X;3-(X;1UX;2))

Leseren kan selv sjekke at (3) holder.

Ad (b): Fra forutsetning (i) følger (1) Ins;(X;1)(w0,w2), siden vi fra Ins;(X;1UX;2)(w1,w2) kan slutte Ins;(X;1)(w1,w2). Men fra dette og forutsetningen Ins;(X;1)(w0,w1) følger åpenbart (1), siden Ins;(X;1) er en transitiv relasjon. Men fra (1) og Teorem 2.2.2 følger M;(X;1)(x,w2)= M;(X;1)(x,w0). Fra dette og punkt(a) følger så punkt (b) i satsen.

Ad (c): Fra forutsetningene kan vi, som vi så under (b), utlede Ins;(X,1)(w0,w2). Siden Ins;(X;1)(w0,w1) inngår blandt forutsetningene i denne satsen følger at (1) Ins;(X;1)(w2,w1) siden Ins;(X;1) er en ekvivalensrelasjon. Men fra (1) og Teorem 2.2.2 kan man slutte at (2) M;(X;1)(x,w2) = M;(X;1)(x,w1). Fra forutsetningen Ins;(X;1UX;2)(w1,w2) og det faktum at X;2-X;1 Inkl X;1UX,2 følger Ins;(X;2-X;1)(w1,w2). Fra dette og Teorem 2.2.2 følger så at (3) M;(X;2-X;1)(x,w2) = M;(X;2-X;1)(x,w1). Fra punkt (a), samt (2) og (3) følger så punkt (c) i satsen. **QED**.

Vi skal se på to korollarer til Teorem 2.2.3 og Teorem 2.2.4. Det første er det følgende som er et korollar til Teorem 2.2.3:

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Korollar 2.2.1 Anta t0,t1êT & t0< t1. Anta videre at w,w' êI, xêP og at Ins;<-inf, t0](w,w'). Da gjelder:

(a) M;<-inf, t1](x,w) = M;<-inf, t0](x,w)ΩM;<t0, t1](x,w)

(b) M;<-inf, t1](x,w) = M;<-inf, t0](x,w')ΩM;<t0, t1](x,w)

Bevis: Dette fås fra Teorem 2.2.3 ved å sette X;1=<-inf, t0] og X;2= <t0, t1]. **QED**.

Det andre korollaret er det følgende, som er et korrolar til Teorem 2.2.4

Korollar 2.2.2 Anta t0,t1,t3êT og at t0 < t1 < t2. Anta w0,w1,w2êI og at xêP. Anta

(i) Ins;<-inf,t0](w0,w1) & Ins;<-inf, t1](w1,w2)

Da gjelder:

(a) M;<-inf,t2] (x,w2) = M;<-inf,t0](x,w2) Ω
M;<t0,t1](x,w2) Ω M;<t1,t2](x,w2)

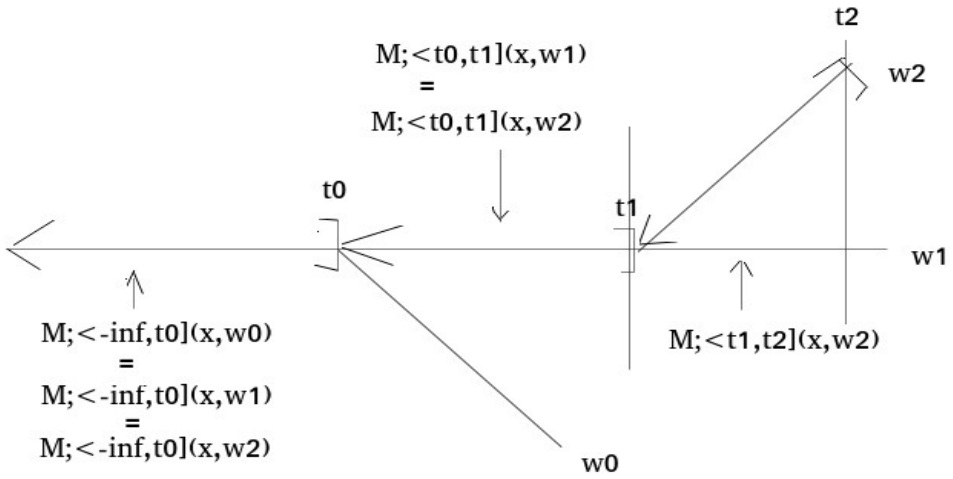
(b) M;<-inf,t2] (x,w2) = M;<-inf,t0](x,w0) Ω
M;<t0,t1](x,w2) Ω M;<t1,t2](x,w2)

(c) M;<-inf,t2] (x,w2) = M;<-inf,t0](x,w1) Ω
M;<t0,t1](x,w1) Ω M;<t1,t2](x,w2)

Man får denne satsen fra Teorem 2.2.4 ved å sette X;1= <-inf,t0], X;2=<t0,t1] og X;3 = <t1,t2]

Den følgende figur er ment å gi en illustrasjon til Korollar 2.2.2:

Figur 1



Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

§2.3 Elementer i den indre erfaringen til en person

For å nevne noe vi allerede har sagt nok en gang. Det vi kaller den indre erfaringen til en person x over et tidsintervall [t,t'] i verdenen w, der t,t'êT og t<t', er nøyaktig det samme som det vi omtaler som den totale indre strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for x over tidsintervallet [t,t'] i verdenen w. Disse to uttrykkene betegner nøyaktig det samme og det siste uttrykket "den totale indre strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for x over tidsintervallet [t,t'] i verdenen w" er det man kunne kalle den "offisielle" uttrykksmåten.

For å oppsummere har vi nå satt opp en velavgrenset språkramme (Se §2, §2.1 og §2.2) og gitt innenfor denne rammen en formelt sett presis definisjon av det siste uttrykket, nemlig λ/sê[t,t']/(Mg(y: Frem;(w,s)(y,x))). Ved hjelp av denne definisjonen og de aksiomene vi har formulert om insidens og momentane bevissthetsinntrykk er det mulig å utlede en rekke satser om den totale strøm av bevissthetsinntrykk, noe vi har forsøkt å vise i den foregående paragraf og som vi også skal vise i den neste.

Nåvel. "Bevissthetsinntrykk" slik vi bruker ordet omfatter ikke bare sanseinntrykk assosiert med de fem sanser som synsinntrykk, hørselsinntrykk, inntrykk av lukt, smak og berøring, men også annet mentalt innhold som fremtrer for bevisstheten som erindringsbilder, forestillingsbilder og etterbilder. Det er forøvrig nærliggende å se på etterbilder, den type innstrykk som man kan ha etter å stirret på noe og dernest lukker øynene, som en slags synsinntrykk. Men vi skal ikke drøfte dette nærmere her. Også den slags inntrykk som oppleves når man drømmer er det nærliggende å se på som bevissthetsinntrykk. La oss dessuten nevne at vi oppfatter den indre strøm av tale som kontinuerlig fremtrer for bevisstheten til en normal person som en strøm av bevissthetsinntrykk. Dette gjelder også smerteopplevelser i den utstrekning de oppstår fra andre kilder enn berøring og har sitt opphav i for eksempel de indre organer, muskler, ledd eller lignende.

I strømmen av sanseinntrykk er det særlig to typer vi ønsker å omtale mer utførlig. Dette er på den ene side synsinntrykkene som fremtrer for en, på den annen side strømmen av hørselsinntrykk. Det kan være hensiktsmessig å starte med strømmen av synsinntrykk. Det virker rimelig å si følgende: Ved ethvert tidspunkt hvor man er våken og er istand til å iakta og observere fremtrer det for ens bevissthet et totalt synsinntrykk. Vi skal kalle dette *det momentane totale synsinntrykk som fremtrer for ens bevissthet ved dette tidspunkt*. Det er to hovedpåstander vi vil fremsette i denne forbindelse. Tenker vi oss at x er en person, w en mulig verden og t et tidspunkt og i tillegg at x ved tidspunktet t i verdenen w er våken, istand til å observere og har synsinntrykk ved dette tidspunkt fremtrer det for vedkommende ett og bare ett momentant totalt synsinntrykk ved dette tidspunktet (i denne mulige verden w). Dette er den første hovedpåstanden. Den andre er denne: Er y et momentant totalt synsinntrykk som fremtrer for x ved tidspunktet t i verdenen w finnes det et entydig bestemt *bilde* med et entydig bestemt origo samt en naturlig bestemt X- akse og Y-akse som representerer dette momentane synsinntrykket y. Dette er som man skjønner en langt mer dristig påstand enn den første. Det første spørsmålet som oppstår i denne forbindelse er følgelig hva man i denne sammenheng forstår med et bilde. Vi skal i denne sammenheng benytte oss av den følgende definisjon: Vi skal med et (to-dimensjonalt) bilde forstå en funksjon som til ethvert punkt i planet tilordner dette en farge. Det neste spørsmålet blir da selvfølgelig hva man forstår med en farge. I denne forbindelse skal vi med en farge forstå et triple <x;1,x;2,x;3> der x;i er et

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

naturlig tall >= 0 og =< 255.[90] Vi kan representere planet (det to-dimensjonale evklidiske plan) med mengden av alle par av reelle tall, med andre ord er planet Reell^2. Et bilde er derfor alik vi definerer der her en funksjon f der fê ((255)^3)^(Reell^2) eller, skrevet på en annen måte en funksjon f der vi har:

fê Mg(g: g : Reell^2 → 255^3)

Det er mulig å formalisere betraktningene ovenfor. Vi betegner klassen av bilder i denne tekniske betydningen med "Bilde" og gir den følgende formelle definisjon:

Definisjon 2.3.1 Vi setter:

Bilde = Mg(g: g : Reell^2 → 255^3)

Vi innfører nå to nye predikater i tillegg til dem vi allerede har innført For det første innfører vi predikatet "y er et momentant totalt synsinntrykk som fremtrer for x ved tidspunktet t i verdenen w". Dette forkorter vi med "TSyn;(w,t)(y,x)". Det andre predikatet er dette: "x er et bilde som representerer det totale momentane synsinntrykket y". Vi forkorter dette predikatet med "Rep(x,y)". Vi tenker oss nå at vi utvider det språket som ble beskrevet og definert i §2 med disse to nye predikatene.

Det er nå i første omgang tre påstander vi nå skal se på og som kan formaliseres innenfor den rammen vi nettopp har satt opp. Den første på standen sier at et momentant totalt synnsinntrykk som fremtrer for x ved tidspunktet t også er et momentant bevisshetsinntrykk som fremtrer for x ved tidspunktet t. Det er vanskelig å tenke seg noen som helst fornuftige innvendinger mot denne påstanden. Vi skal kalle den Syn1 og den kan i symboler uttrykkes slik:

Syn1 TSyn;(w,t)(y,x) → Frem;(w,t)(y,x)

Den andre påstanden vi betrakter er en versjon av noe vi ovenfor som en rimelig påstand. Den sier følgende: Er y1 og y2 momentane totale synsinntrykk som fremtrer for personen x ved tidspunktet t i verdenen w må y1 være identisk med y2.

Denne tanken kan formaliseres slik:

Syn2 TSyn;(w,t)(y1,x) & TSyn;(w,t)(y2,x) → y1=y2

Den tredje påstanden er den vi nevnte like før vi ovenfor forklarte og ga en definisjon av et bilde. Den sier at dersom y er et momentant totalt synsinntrykk som fremtrer for x ved tidspunktet t i verdenen w så finnes det et entydig bestemt bilde som representerer det momentane totale synsinntrykket y. Denne påstanden kan reformuleres slik i symboler:

Syn3 TSyn;(w,t)(y,x) → (E!z)(zêBilde & Rep(z,y))

90 Merk at vi her bruker von Neumanns tall. Da har man at 0=ø, 1= {0}, 2= {0,1}, 3={0,1,2} , ... , 256 = {0,1,2, ... , 255}. Med andre ord er ethvert naturlig tall mengden av alle sine forgjenger i den naturlige tallrekken.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Man kan diskutere Syn3 mer inngående, men vi tror at påstanden, om leseren nøye reflekterer over den, vil fortone seg rimelig. I det minste virker det rimelig hvis man tar det for gitt at dersom et momentant totalt synsinntrykk kan representeres ved et bilde så kan det bare representeres ved ett slikt bilde og ikke to som er forskjellige.

Hørselsinntrykk kan gi opphav til refleksjoner av samme type som dem vi har gjort osss ovenfor i forbindelse med synsinntrykk. Naturlig nok er evnen til å høre minst like viktig som evnen til å se. I forbindelse med hørselsinntrykk virker det også rimelig å tale om det momentane *totale* hørselsinntrykk en person har ved et gitt tidspunkt. Likeledes virker det ikke urimelig å påstå at dersom y er det totale momentane hørselsinntrykk som fremtrer for x ved tidspunktet t så er dette totale inntrykket entydig bestemt. Med andre ord er y1 og y2 momentane totale hørselsinntrykk som fremtrer for x ved tidspunktet t i verdenen w så må man ha at y1= y2.

En annen selvfølgelighet som kan nevnes her er at dersom y er et momentant totalt hørselsinntrykk som fremtrer for x ved tidspunktet t i verdenen w så er også y et momentant bevissthetsinntrykk som fremtrer for x ved t i verdenen w.

Begge disse to påstandene kan formaliseres. Vi bruker uttrykket "THør;(w,t)(y,x)" som forkortelse for predikatet "y er et momentant totalt hørselsinntrykk som fremtrer for personen x ved tidspunktet t i verdenen w". Dette predikatet innføres nå, i likhet med de to som ble innført tidligere, som et nytt primitivt predikat. Dette innebærer at vi ikke vil forsøke å gi noen definisjon av dette predikatet ved hjelp av dem vi har innført tidligere.

Når det gjelder de to påstandene vi nyss nevnte kan den siste formaliseres slik:

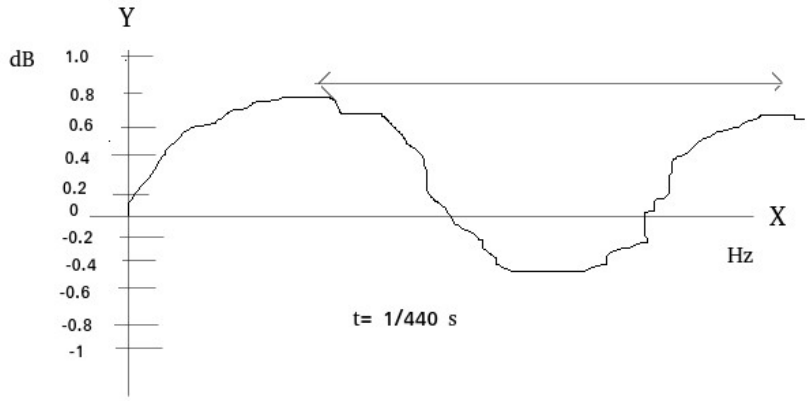
H1 $THør;(w,t)(y,x) \rightarrow Frem;(w,t)(y,x)$

Den førstnevnte på standen om entydigheten av momentane totale hørselsinntrykk kan formaliseres slik:

H2 $THør;(w,t)(y1,x) \ \& \ THør;(w,t)(y2,x) \ \rightarrow y1=y2$

Vi så ovenfor at det kunne være mulig å representere et momentant totalt synsinntrykk ved et bilde i den matematiske betydningen vi definerte ovenfor. Det virker vanskeligere å finne noe som representerer et hørselsinntrykk på den samme måten. Men gitt at vi vet at lyder er bølgebevegelser som forplanter seg i luften og setter i bevegelse trommehinnene i øret på grunn av varierende trykk virker det ikke direkte søkt å representere strømmen av momentane totale hørselsinntrykk som en person har i intervallet [t,t'] i verdenen w ved en funksjon f der domenet er [t,t'] og hvor verdiområdet er inkludert i mengden av de reelle tall, Reell. Siden trommehinne vibrerer i positiv og negativ retning fra en bestemt normaltilstand er det nærliggende å tenke seg f som en kontinuerlig funksjon hvor høyden til lyden bestemmes av frekvensen til f og hvor styrken til lyden representeres ved amplituden til f. Skjematisk kunne en slik funksjon representeres ved en grafe av typen:

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes



På figuren representerer Y-aksen amplituden målt i decibel og X-aksen frekvensen målt i Herz. Man har at 1 Hz er en svingning per sekund. En ren sinusfunksjon med en frekvens på 440 Hz vil da representere den enstrøkne A, eller det som også kalles kammertonen.

Ovenfor tenkte vi oss at momentane totale synsinntrykk kunne representeres ved bilder. Denne representasjonen er ikke en-entydig. Gitt at s er et momentant totalt synsinntrykk som fremtrer for x ved tidspunktet t i verdenen w finnes det i lys av Syn3 ett og bare ett bilde som representerer s. Men dette forhindrer ikke at man kan ha at TSyn;(w,t;1)(y1,x) og at TSyn;(w,t;2)(y2,x) men likevel at

(iz)(zêBilde & Rep(z,y1) = (iz)(zêBilde & Rep(z,y2).

Med andre ord utelukker ikke de aksiomene vi har formulert ovenfor at to forskjellige momentane totale synsinntrykk kan representeres ved det samme bilde.

Vi kan nå definere hva vi mener med *den totale visuelle historien til individet x over tidsintervallet [t1,t2] i verdenen w* i analogi med det vi har gjort tidligere. Denne historien, eller strøm av synsinntrykk vil være: λ/tê[t1,t2](Mg(y:TSyn;(w,t)(y,x)). Tilsvarende vil strømmen av totale hørselsinntrykk som fremtrer for individet x over tidsintervallet [t1,t2] i verdenen w være λ/tê[t1,t2](Mg(y:THør;(w,t)(y,x)).

Utsagnet som beskriver den totale visuelle strømmen til individet x over tidsintervallet [t1,t2] i verdenen w betegner vi med "Syn;[t1,t2](x,w)". Dette er definert slik:

Definisjon 2.3.2: Syn;[t1,t2](x,w) =
μ;-1(Mg(w': λ/tê[t1,t2](Mg(y:TSyn;(w',t)(y,x)) = λ/tê[t1,t2](Mg(y:TSyn;(w,t)(y,x))

Man ser at denne definisjonen er helt analog med den vi ga tidligere av utsagnet M;[t1,t2](x,w). Faktisk er det lett å vise på basis av de aksiomene vi har presentert at man har følgende om t1,t2 êT, t1 < t2, og <x,w>êPxI:

⊨ M;[t1,t2](x,w) => Syn;[t1,t2](x,w)

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

På samme måte som rett ovenfor kan man også definere Hør;[t1,t2](x,w), dvs. det utsagnet som beskriver strømmen av totale hørselsinntrykk som fremtrer for x over intervallet [t1,t2] i verdenen w. Er X en vilkårlig ikke-tom mengde med tidspunkter kan man på samme måte som i tidligere paragrafer definere Syn;X(x,w) og Hør;X(x,w) med andre ord henholdsvis utsagnet som beskriver strømmen av totale synsinntrykk som fremtrer for x over tidspunktene i mengden X i verdenen w og utsagnet som beskriver strømmen av totale hørselsinntrykk som fremtrer for x over tidspunktene i mengden X i verdenen w. Man kan også for disse operasjonene bevise satser som er helt analoge med dem vi formulerte i §2.2. Men vi skal ikke gå nærmere inn på dette her.

Vi skal imidlertid innføre nok et begrep. Ovenfor har vi nevnt at vi fant det rimelig at et momentant totalt visuelt inntrykk (som fremtrer for et individ i en mulig verden) kan en-tydig representeres ved et bilde (i den betydningen vi definert ovenfor). Man kan derfor tale, om man legger den fremlagte teori til grunn, om *det* bildet som representerer det totale momentane synsinntrykket som fremtrer for x ved tidspunktet t i verdenen w. Vi skal betegne enhetsmengden som inneholder dette bildet med B;(w,t)(x). Da vil λ/têX/(B;(w,t)(x)) være en funksjon som representerer de enkelte elementene i λ/têX/(Mg(y: TSyn;(w,t)(y,x))). Det bør bemerkes at Mg(y: TSyn;(w,t)(y,x)) alltid vil være en enhetsmengde om den ikke er tom. Dette følger ved hjelp av grunnsetningen Syn2. La oss definere uttrykket "B;(w,t)(x)". Dette skjer ved den følgende definisjon:

Definisjon 2.3.3 Anta <w,t,x>ê IxTxP. Da setter vi:
B;(w,t)(x) = Mg(z: zêBilde & (Ey)(Rep(z,y) & TSyn;(w,t)(y,x)))

Vi kan gå noe videre på dette punkt og definere en begrepsdannelse i forbindelse med B;(w,t)(x) som ligner på Syn;X(x,w) der XêPt(T). Vi setter rett og slett:

Definisjon 2.3.4 Anta <w,t,x>ê IxTxP og ø ≠ XêPt(T). Da setter vi:
BSek;X(x,w) = μ;-1(Mg(w': λ/têT/(B;(w',t)(x) = λ/têT/(B;(w,t)(x)))

Uttrykket "BSek;X(x,w)" kan leses "utsagnet som beskriver den visuelle billedsekvensen assosiert med individet x over tidspunktene i mengden X i verdenen w". Det virker som om denne lesemåten ikke skulle kunne gi noen villedende assosiasjoner.

Det man nå kan lure på er hvordan utsagnene BSek;X(x,w) og Syn;X(x,w) er relatert til hverandre. Det er naturlig å tro at disse utsagnene er identiske. Vi skal straks bevise et teorem som sier dette, men det bør understrekes at vi bare kan vise dette teoremet om vi antar at følgende holder:

Syn 4 zêBilde & Rep(z,y1) & TSyn;(w',t)(y1,x) &
Rep(z,y2) & TSyn;(w,t)(y2,x). → y1=y2

Det denne setningen sier er, som man ser, at dersom et bilde z representerer det momentane totale synsinntrykk y1 som x har ved tidspunktet t i verdenen w' og det samtidig også representerer det det momentane totale synsinntrykket y2 som fremtrer for x ved tidspunktet t i verdenen w så er disse to inntrykkene y1 og y2 identiske. Denne påstanden virker ikke så opplagt som Syn1 - Syn3. På den annen side er det vanskelig å komme på noen virkelig

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

avgjørende argumenter mot den. I våre øyne virker den plausibel. Det skulle være ganske klart at den ikke kan utledes fra Syn1 - Syn3.

La oss så formulere det teoremet vi har i tankene og gi et bevis for det:

Teorem 2.3.1: Anta ø ≠ XêPt(T) og <w,x>IxP. Da har man:
BSek;X(x,w) = Syn;X(x,w)

Bevis: Vi viser først: (#) μ(BSek;X(x,w)) Inkl μ(Syn;X(x,w)). Anta derfor for vilkårlig w' at (1) w'ê μ(BSek;X(x,w)). Fra dette og definisjonen av operasjonen BSek følger:
(2) (At)(têX → B;(w't)(x) = B;(w,t)(x))
Ved hjelp av definisjonen av B, Definisjon 2.3.3 følger herav:
(3) (At)(têX → (Az)(zêBilde & (Ey)(Rep(z,y) & TSyn;(w',t)(y,x))
↔ zêBilde & (Ey)(Rep(z,y) & TSyn;(w,t)(y,x))))
Det vi må vise er at w'ê μ(Syn;X(x,w)). Det vil, i lys av definisjonen av Syn være tilstrekkelig å vise:
(+) (At)(têX → (Ay)(TSyn;(w',t)(y,x) ↔ TSyn;(w,t)(y,x)))
La oss vise at (+) holder.
(a) Vi tar først for oss kondisjonalen mot høyre i (+). Anta derfor for vilkårlige t,y at (4) têX & TSyn;(w',t)(y,x). Fra (4) og Syn3 kan man da slutte at det finnes z1 slik at
(5) z1êBilde & Rep(z1,y). Fra dette, (4) og (3) kan man så slutte at det finnes y2 der vi har (6) z1êBilde & Rep(z1,y2) & TSyn;(w,t)(y2,x). Men fra (4),(5),(6) og Syn4 følger y=y2. Fra dette og den siste konjunkten i (6) følger TSyn;(w,t)(y,x). Siden t,y var vilkårlig valgt har vi vist den ene halvdelen av (+).
(b) Den andre halvdelen bevises helt på samme måte. Merk at man også under beviset for denne delen også må benytte aksiomet Syn4.

Vi har nå vist μ(BSek;X(x,w)) Inkl μ(Syn;X(x,w)). Man må imidlertid også vise:
μ(Syn;X(x,w)) Inkl μ(BSek;X(x,w))
Anta for vilkårlig w' at w'êμ(Syn;X(x,w)). da følger ved hjelp av definisjonen av Syn:
(At)(têX → (Ay)(TSyn;(w',t)(y,x) ↔ TSyn;(w,t)(y,x)))
Men fra dette følger umiddelbart (3) ovenfor og derfor w' ê μ(BSek;X(x,w)). Dette viser at satsen holder. **QED**.

Spørsmålet om hvordan man kommer fra strømmen av bevissthetsinntrykk som fremtrer for en ut til den ytre fysiske verden av fysiske objekter, landskaper, skoger, trær, hus, veier og mennesker som bor i disse hus og ferdes i i disse landskaper, er naturlig nok et spørsmål man kan stille. Det er imidlertid et spørsmål som det er lettere å stille enn å besvare på en adekvat måte.

Man kan besvare det på to måter. Det korte svaret er dette: Ethvert menneske har fornuft og ethvert fornuftig menneske innser at den strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for ham, og som har fremtrådt for ham i løpet av hans livstid, representerer definitiv evidens for at det eksisterer en ytre verden som han lever og virker i sammen med sine medmennesker. Og han innser også at den påstanden at denne strømmen av bevissthetsinntrykk utgjør definitiv evidens for at han lever og virker sammen med andre i en felles ytre verden er en nødvendig

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

sannhet. Endelig innser han også at dersom han har definitiv evidens for at en påstand er sann så er den sann.

Dette er det korte svaret. Men man kan gi et svar som er lengere ved å besvare spørsmålet om når et menneske er i besittelse av fornuft. Forsåvidt virker det rimelig å si at fornuften er det samme som evnen til å tenke og det er denne evnen til å tenke som skiller mennesket markant fra andre dyr. Det er imidlertid også rimelig å si at evnen til å tenke ikke eksisterer hvis et individ ikke er istand til å lære et språk og ved hjelp av dette språk er istand til å meddele andre at visse forhold foreligger, er istand til å fremsette påstander og er istand til, fremfor alt, å skille mellom sanne og falske påstander. Mestrer man et språk er man i stand til alt dette, men man er også i stand til å skille mellom påstander man mer eller mindre direkte kan kontrollere sannhetsverdien til, som for eksempel en påstand om at det ligger elleve kniver i øverste kjøkkenskuff eller en påstand om at en pakke paracetamol koster mindre enn tredve kroner, og påstander som man ikke direkte kan kontrollere. Men dette er selvfølgelig ikke alt. En person som virkelig behersker et språk er i stand til å føre en samtale med en annen som taler dette språk, er istand til å stille den andre spørsmål og å lytte til og vurdere de svar han blir gitt. Videre vil en slik person være istand til å besvare spørsmål som andre stiller ham, kunne planlegge de svar han gir og kunne vurdere de svar han bør gi. Enn mer vil han være istand til å gjengi det en annen har sagt enten ordrett eller indirekte, og i høy grad vite når han har gjengitt den andre korrekt og når han har fordreid den annens budskap.

Fremfor alt vil en person som i stor grad behersker et språk ikke bare være istand til å innse forskjellen mellom sanne og usanne påstander, men vedkommende vil også i stor grad ha evnen til å innse hvilke påstander som er logisk nødvendig sanne og hvilke som er kontradiktoriske. Videre vil vedkommende i stor grad være istand til se hva som logisk sett følger fra en påstand og hva som ikke følger fra den.

En person som mestrer et språk og derfor kan bruke dette språket når vedkommende skal argumentere og resonnere vil nødvendigvis ha et stort ordforråd og kjenne til bruken og betydningen til de diverse ordene og konstruksjonene som inngår i dette forråd. Blandt de tusenvis av ord som en normal språkbruker vanligvis kjenner til vil være alle de uttrykk som man bruker når man vil beskrive den fysiske verden, ord som "sten", hus", "tre", "busk", etc., men også uttrykk som brukes for å beskrive de romlige forhold mellom objekter som for eksempel "foran", "bak", "ved siden av", "tett inntil", "høyre" "venstre", "meter", "centimeter" for bare å nevne noen. Man kan også nevne alle de ord som vi i hverdagen bruker for å beskrive tidsforhold som "for lenge siden", " for en stund siden", "nå", "straks", "om ikke lenge", "om to timer", "for et år siden", "når solen går ned", " før", "etter" osv.

Det er imidlertid umulig å forestille seg en person som mestrer et språk som ikke også kjenner til betydningen av slik konstruksjoner som "sier", "ser", "vet", "hører", "tenker", "hører", "føler", "kjenner" etc. Dette er uttrykk som man nødvendigvis må kjenne til for å kunne bruke språket til å meddele budskap til andre, for å kunne fremsette påstander; kort sagt vil sosialt samarbeid være totalt umulig om man ikke behersket bruken av disse ord.

Men fremfor alt vil en person som til fulle behersker språket innse at dersom han fremsetter en påstand som er sann vil denne påstanden fortsette å være sann. Om noen benektet den i

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

fortiden kan man bare si om dem at de tok feil, og om noen en gang i fremtiden benekter den vil også de ta feil. Tilsvarende vil en person som til fulle behersker et språk vite at dersom en påstand er usann vil enhver som i fortiden hevdet at den var sann ta feil, og enhver som i fremtiden hevder det samme nødvendigvis også ta feil. En påstand endrer ikke sin sannhetsverdi med tiden. En person som mestrer språket innser at virkeligheten er totaliteten av alt som er tilfelle og derfor at totaliteten av alle sanne påstander gir en entydig beskrivelse av den. Det viktigste er imidlertid dette: En person som mestrer språket og derfor er istand til å tenke fornuftig innser at det ved ethvert tidspunkt er en rekke påstander som beskriver den ytre virkelighet som det er fornuftig å akseptere gitt den indre erfaring vedkommende har hatt inntil dette tidspunkt. Og ikke bare det, vedkommende vil innse at disse påstandene vil være fornuftige å akseptere uansett hva han opplever etter dette tidspunkt. Og han vil innse, nettopp fordi han kjenner betydningen til uttrykket "Det er fornuftig å akseptere" at disse påstandene derfor er sanne. Enhver person som derfor mestrer språket vil følgelig innse at han har definitiv evidens for en rekke påstander som beskriver den ytre virkelighet og at det vil dreie seg om ufattelig mange påstander. Jeg har definitiv evidens for at jeg nå befinner meg i min bolig, at jeg sitter ved skrivebordet og med jevne mellomrom ser ut av vinduet. Jeg ser at taket på et hus som befinner seg på den andre siden av veien er snødekt og at min kone er inne på sitt arbeidsrom. Dette er derfor uforanderlige realiteter og viser at jeg er en del av en realitet utenfor meg selv som vil fortsette å være der lenge etter at jeg er død, og som har vært der lenge før jeg ble født. Det er på denne måten man kommer fra den indre erfaring ut til den ytre virkelighet og frem til den innsikt at man lever et liv sammen med talløse andre. Dette avslutter det lange svaret som vi ønsket å gi.

§3 Viten og definitiv evidens

I det følgende skal vi bruke "Ev;(w,t)(x,y)" som forkortelse for "x har ved tidspunktet t i verdenen w evidens for at utsagnet y er sant". Tilsvarende brukes "DEv;(w,t)(x,y)" som forkortelse for "x har ved tidspunktet t i verdenen w definitiv evidens for at utsagnet y er sant". Som man husker formulerte vi i §1.3 tentative definisjoner av evidens og definitiv evidens, med andre ord ga vi definisjoner av de to predikatene som vi nå har nevnt. Disse definisjonene bør oppfattes som tentative selvom de, såvidt vi kan se, virker relativt plausible. Det eneste nye her er at vi gir formaliserte versjoner av disse definisjonene. I denne forbindelse starter vi med definisjonen av "Ev;(w,t)(x,y)". Definisjonen er som følger:

Definisjon 3.1 Anta <w,t,x,y>êIxTxPxU. Da setter vi:

$$Ev;(w,t)(x,y) \leftrightarrow yêU \ \&\ Ba(y, M;<\text{-inf}, t](x,w))$$

Som man ser sier definisjonen at personen x har, ved tidspunktet t i verdenen w, evidens for at utsagnet y er sant hvis og bare hvis det er fornuftig å akseptere utsagnet y relativt til det utsagnet som beskriver den totale indre strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for x i intervallet <-inf,t] i verdenen w. Som vi nevnte tidligere virker kondisjonalen mot venstre svært rimelig. Kondisjonalen mot høyre virker også rimelig nok, men den kan neppe sies å være direkte innlysende.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Den definisjonen vi ga av definitiv evidens i §1.3 kan nå formaliseres slik:

Definisjon 3.2 Anta <w,t,x,y>êIxTxPxU. Da setter vi:

$$DEv;(w,t)(x,y) \leftrightarrow yêU \,\&\, Ba(y, M;<\text{-inf}, t](x,w)) \,\&\, (Aw')(At')(Ins;<\text{-inf},t](w,w') \,\&\, t<t' . \rightarrow Ba(y, M;<\text{-inf}, t](x,w) \,\Omega\, M;<t, t'](x,w')))$$

Denne definisjonen er en smule komplisert. Som man ser sier den at x ved tidspunktet t i verdenen w har definitiv evidens for at utsagnet y er sant hvis og bare hvis de følgende to krav er oppfylt:

(i) $yêU \,\&\, Ba(y, M;<\text{-inf}, t](x,w))$

(ii) $(Aw')(At')(Ins;<\text{-inf},t](w,w') \,\&\, t<t' . \rightarrow Ba(y, M;<\text{-inf}, t](x,w) \,\Omega\, M;<t, t'](x,w')))$

Det første kravet er naturligvis det som utgjør definiens i Definisjon 3.1 og uttrykker at det er fornuftig å akeptere utsagnet y relativt til det utsagnet som beskriver den totale erfaring til x over tidsintervallet <-inf, t] i verdenen w. Med andre ord er det nødvendig for at x skal ha definitiv evidens for at utsagnet y er sant at vedkommende også har evidens for at det er sant. Men dette er ingen tilstrekkelig betingelse. Det er også nødvendig at kravet (ii) er oppfylt. Hva uttrykker så denne formelen? Den sier at dersom w' er en vilkårlig verden som sammenfaller med verdenen w ved alle tidspunkter som kommer før t inkludert tidspunktet t selv og t' er et tidspunkt som kommer etter tidspunktet t så skal det være slik at det er fornuftig å akseptere utsagnet y relativt til konjunksjonen av de to utsagnene $M;<\text{-inf}, t](x,w)$ og $M;<t, t'](x,w')$. Her er $M;<\text{-inf}, t](x,w)$ utsagnet som beskriver den total erfaringen til x i intervallet <-inf,t] verdenen w og $M;<t, t'](x,w')$ utsagnet som beskriver den totale erfaring til x i intervallet <t,t'] i verdenen w'.

Man kan sammenfatte disse to kravene (i) og (ii) uten å være unødvendig formell og omstendelig ved å si at *x ved tidspunktet t har definitiv evidens for at utsagnet y er sant* hvis og bare hvis det er fornuftig å akeptere utsagnet y relativt til hele den erfaringsstrøm som x har opplevd inntil og inkludert tidspunktet t og uansett hva x opplever etter tidspunktet t så må det fremdeles være fornuftig å akseptere utsagnet y om denne nye evidens kommer i tillegg. Eller sagt på en annen måte: Dersom x har definitiv evidens for at y er tilfelle ved tidspunktet t må det være rasjonelt å akseptere y relativt til den samlede erfaring x har hatt til og med dette tidspunkt og det må også være rasjonelt å akseptere y uansett hva han i tillegg kommer til å erfare i fremtiden. Enda mindre omstendelig: For at x skal ha definitiv evidens for at et utsagn y er sant må x ikke bare ha evidens for dette utsagnet, det må også være slik at ingen logisk mulig fremtidig evidens kan kullkaste det.

La oss oppsummere et par punkter før vi går videre. Vi startet med å konstatere at vi i de tidligere delene av dette arbeid ikke hadde nevnt noen nødvendige betingelser for viten utover følgende betingelser: det å tro at en påstand er sann er en nødvendig betingelse for å vite at den er sann og det at en påstand er sann er en nødvendig betingelse for å vite at den er sann. Imidlertid har vi i de foregående paragrafer eksplisitt satt opp en teori den totale strøm av indre bevissthetsinntrykk som fremtrer for en person over et tidsintervall i en mulig verden og ved hjelp av de nye grunnbegrepene i denne teori (Se §2) levert grunnlaget for de to

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

definisjonene av evidens og definitiv evidens som vi har formulert ovenfor. Vi har selvfølgelig brukt tid på dette fordi det gjør det mulig å formulere helt presist de to nødvendige betingelse for kunnskap som vi formulerte i §1.1 og dermed gå noe dypere i vår analyse av kunnskapsbegrepet. Disse to nye betingelse for viten var evidens og definitiv evidens. Vi kan nå føye til det at dette er to nødvendige betingelser for viten som nye grunnsetninger i vår teori.

Den første grunnsetningen er denne:

K1 $\quad Vet;(w,t)(x,y) \rightarrow DEv;(w,t)(x,\mu;\text{-}1(\mu;f(y)))$

Denne grunnsetningen sier følgende: Er y et finstrukturert utsagn som beskriver et forhold som x vet ved tidspunktet t at foreligger i verdenen w så har x ved tidspunktet t i verdenen w definitiv evidens for det utsagnet som har samme sannhetsmengde som y, ie. μ;-1(μ;f(y)). Her er selvfølgelig relasjonen DEv definert som i Definisjon 3.2.

Vår neste grunnsetning sier at hvis y er et finstrukturert utsagn som beskriver et forhold som x vet foreligger ved tidspunktet t i verdenen w så har x ved dette tidspunktet i verdenen w også definitiv evidens for det utsagnet som sier at y er et finstrukturert utsagn som x vet er riktig ved tidspunktet t. Denne grunnsetningen virker, ved ettertanke, også temmelig innlysende. Den kan formaliseres slik:

K2 $\quad Vet;(w,t)(x,y) \rightarrow DEv;(w,t)(x,\mu;\text{-}1(Mg(w: Vet;(w,t)(x,y))))$

Den siste av de nye grunnsetningene vi ønsker å betrakte sier at dersom x har definitiv evidens ved tidspunktet t i verdenen w for at utsagnet y er sant så er dette utsagnet y sant.

K3 $\quad DEv;(w,t)(x,y) \rightarrow w \models y$

Det er en rekke bemerkninger som kan gjøres i forbindelse med grunnsetningene ovenfor. Vi skal først se litt på de innbyrdes logiske forhold mellom dem. Ser man på K3 impliserer dette aksiomet, om man setter inn utsagnet $\mu;\text{-}1(Mg(w: Vet;(w,t)(x,y)))$ for y at $DEv;(w,t)(x,\mu;\text{-}1(Mg(w: Vet;(w,t)(x,y)))) \rightarrow w \models \mu;\text{-}1(Mg(w: Vet;(w,t)(x,y)))$. Som man umiddelbart ser impliserer dette:

$DEv;(w,t)(x,\mu;\text{-}1(Mg(w: Vet;(w,t)(x,y)))) \rightarrow Vet;(w,t)(x,y)$

Som sammen med K2 impliserer:

(1) $\quad Vet;(w,t)(x,y) \leftrightarrow DEv;(w,t)(x,\mu;\text{-}1(Mg(w: Vet;(w,t)(x,y))))$

Man ser fra dette at kondisjonalen i K2 kan forsterkes til en bikondisjonal om man aksepterer grunnsetningene K2 og K3. Dette er av en viss interesse fordi vi da kan slutte at $DEv;(w,t)(x,\mu;\text{-}1(Mg(w: Vet;(w,t)(x,y))))$ ikke bare er en nødvendig betingelse for $Vet;(w,t)(x,y)$, men også en tilstrekkelig betingelse. Når det gjelder formelle overveielser av denne typen kan det også bemerkes at K2 faktisk impliserer K1. Grunnen er at man på basis av definisjonen av DEv, ie Definisjon3.2 kan utlede

(2) $\quad DEv;(w,t)(x,y) \,\&\, LK(z,y) \rightarrow DEv;(w,t)(x,z)$

Dette skal vi vise senere. Nå er det imidlertid ikke vanskelig å innse at

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(3) LK(y, μ;-1(Mg(w: Vet;(w,t)(x,y))))

Siden vi jo har Vet;(w,t)(x,y) → w ⊨ μ;-1(μ;f(y)) . Men fra (1), (2) og (3) følger nettopp K1. Dette aksiomet er altså ikke uavhengig av de andre, men følger fra K2. Som man ser trenger vi ikke K3 i dette resonnementet.

Det andre man kan kommentere i forbindelse med K1 - K3 er spørsmålet om disse setningene, som vi her uten videre har kalt grunnsetninger, faktisk er sanne. I denne forbindelse må det med en gang innrømmes at vi ikke uten videre kan innse hvordan disse setningene kan utledes fra andre setninger som for enhver uhildet og rasjonell person vil fortone seg mer innlysende. Men de virker rimelige. *Hvis en person vet at en påstand er riktig* kan ikke denne påstanden omstøtes av hva andre observerer eller av logikken og matematikkens lover. En person som mener seg i ettertid å ha kommet i besittelse av bevismateriale mot den må nødvendigvis ta feil. Dette synes å være helt innlysende om man reflekterer over hvordan ordet "vet" brukes, og dette er hva kravet om definitiv evidens innebærer. Det er i lys av slike overveielser at vi kaller K1 for en grunnsetning. Videre virker det, som vi tidligere har nevnt, og delvis drøftet, innlysende at en person som vet at en påstand er sann også må vite at han vet at denne påstanden er riktig. Men det synes da, i det minste i våre øyne, umulig å benekte at han er i besittelse av defintiv evidens for at han vet at denne påstanden er riktig. Av denne grunn finner vi det ytterst vanskelig å imøtegå K2 med noe som har preg av rasjonelle argumenter.

La oss ikke glemme tese K3. Denne må også kommenteres. Som man ser sier denne tesen at *dersom individet x har definitiv evidens for at utsagnet y er sant ved tidspunktet t i verdenen w så er utsagnet y sant i verdenen w*. Det virker eiendommelig om man skulle benekte at denne tesen har en viss umiddelbar plausibilitet. Det må imidlertid innrømmes at den ikke umiddelbart har det uavviselige preg som visse andre enkle sannheter innenfor logikken og matematikken har. Igjen er det slik at vi i denne forbindelse ikke er i stand til å spesifisere noen mer opplagte teser som man kan utlede K3 fra ved hjelp av generelle logiske prinsipper som alle er enige om. På den annen side er vi heller ikke i stand til å formulere noe sett av plausible teser som man kan utlede negasjonen av K3 fra. Fra dette siste kan man selvfølgelig ikke slutte at at et sett av slike teser ikke finnes. Når det gjelder sannhetsverdien til K3 er det derfor svært lite man står igjen med uten en appell til ens intuisjon. Man kan oppfordre leseren til å tenke seg en påstand som er usann, men som likevel er slik at en eller annen har definitiv evidens for at den er sann. Hvis det er umulig å tenke seg en slik påstand må man medgi at K3 har karakter av å være en nødvendig sann påstand. Men naturligvis er dette ikke noe slags "bevis" i streng betydning.

§3.1 Noen satser om evidens og definitiv evidens I

Vi har utvidet vokabularet til kunnskapsteorien vi fremla i Del I i de foregående paragrafer. Vi innførte de følgende nye predikater, nemlig "w er en verden som er insident med verdenen w' ved tidspunktet t", "s er et momentant bevissthetsinntrykk som fremtrer for individet x ved tidspunktet t i verdenen w". Siden vi ikke har definert disse predikatene nærmere må de naturligvis oppfattes som primitive predikater. I forbindelse med det første predikatet formulerte vi aksiomene Ins1 - Ins4 og i forbindelse med det andre predikatet formulerte vi aksiomene Bev1 - Bev5, som i hovedsaken postulerer at mengden av potensielle bevissthetsinntrykk utgjør en mengde, at bevissthetsinntrykk er strengt private og at de er unike i den forstand at dersom man har et momentant bevissthetsinntrykk ved et gitt tidspunkt

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

kan ikke dette fremtre for en ved noe senere eller tidligere tidspunkt. Dessuten la vi til et aksiom som sier at dersom de to verdenene w og w' er insidente ved tidspunktet t så vil ethvert momentant bevissthetsinntrykk som fremtrer for x i verdenen w ved tidspunktet t i verdenen w også fremtre for vedkommende ved tidspunktet t i verdenen w' og omvendt. Ved hjelp av disse nye predikatene definerte vi en rekke begreper blandt annet begrepet evidens og begrepet definitiv evidens. Vi er nå interessert i å utlede en del satser som gjelder for predikatene "Ev;(w,t)(x,y)" og "DEv;(w,t)(x,y).

Det følgende teorem viser at Ev og DEv har visse trekk til felles med modaloperator av typen K.

Teorem 3.1.1. Anta wêI og têT. Anta xêP og y,zêU. Da gjelder:

(a) Ev;(w,t)(x,y) → Ev;(w,t)(x, μ;-1(I))
(b) Ev;(w,t)(x,y) & Ev;(w,t)(x,y=>z) → Ev;(w,t)(x,z)
(c) DEv;(w,t)(x,y) → DEv;(w,t)(x, μ;-1(I))
(d) DEv;(w,t)(x,y) & DEv;(w,t)(x,y=>z) → DEv;(w,t)(x,z)

La oss bemerke at påstandene i dette teoremet egentlig følger ganske greit fra definisjonene av Ev og Dev dersom man benytter de følgende to lover som gjelder for relasjonen Ba, nemlig

(i) B(x,y) → Ba(μ;-1(I),y)
(ii) Ba(x,y) & Ba(x=>z,y) → Ba(z,y)

For å illustrere bevismetoden beviser vi bare (c) og (d). Gitt bevisene for disse punktene skulle det være enkelt å innse hvordan bevisene for punkt (a) og (b) ser ut:

Bevis: *Ad (c)*: Anta (1) DEv;(w,t)(x,y). Da har vi ved hjelp av definisjonen av DEv at følgende holder:

(2) yêU & Ba(y, M;<-inf, t](x,w))
(3) (Aw')(At')(Ins;<-inf,t](w,w') & t<t' . →
Ba(y, M;<-inf, t](x,w) Ω M;<t, t'](x,w')))

Fra (2) og punkt (i) rett ovenfor kan man slutte:

(4) yêU & Ba(μ;-1(I), M;<-inf, t](x,w))

Anta nå for vilkårlige w' og t' at (5) Ins;<-inf,t](w,w') & t<t'. Da følger ved hjelp av (3):

Ba(y, M;<-inf, t](x,w) Ω M;<t, t'](x,w'))

Men fra dette og punkt (i) ovenfor følger:

Ba(μ;-1(I), M;<-inf, t](x,w) Ω M;<t, t'](x,w'))

Men w',t' var vilkårlige entiteter slik at (5). Det følger derfor at:

(6) (Aw')(At')(Ins;<-inf,t](w,w') & t<t' . →
Ba(μ;-1(I), M;<-inf, t](x,w) Ω M;<t, t'](x,w')))

Fra (4), (6) og definisjonen av DEv følger derfor DEv;(w,t)(x,μ;-1(I)). Dette viser at punkt (c) holder.

Ad (d): Anta (1) DEv;(w,t)(x,y) & DEv;(w,t)(x,y=>z). Da har man ved hjelp av definisjonen DEv at

(2.1) yêU & Ba(y, M;<-inf, t](x,w))
(2.2) (Aw')(At')(Ins;<-inf,t](w,w') & t<t' . →

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Ba(y, M;<-inf, t](x,w) Ω M;<t, t'](x,w')))

og (3.1) y=>z êU & Ba(y=>z, M;<-inf, t](x,w))

(3.2) (Aw')(At')(Ins;<-inf,t](w,w') & t<t' . →
Ba(y=>z, M;<-inf, t](x,w) Ω M;<t, t'](x,w')))

Fra (2.1) og (3.1) følger åpenbart ved hjelp av prinsippet (ii) ovenfor at

(4) zêU & Ba(z, M;<-inf, t](x,w))

Anta for vilkårlige w', t' at (5) Ins;<-inf,t](w,w') & t<t' . Fra (2.2) og (3.2) følger da:

(6) Ba(y, M;<-inf, t](x,w) Ω M;<t, t'](x,w')) og

(7) Ba(y=>z, M;<-inf, t](x,w) Ω M;<t, t'](x,w'))

Men fra (6), (7) og prinsippet (ii) ovenfor kan man konkludere:

(8) Ba(z, M;<-inf, t](x,w) Ω M;<t, t'](x,w'))

Nå var w' og t' vilkårlige entiteter slik at (5). Det følger derfor at

(9) (Aw')(At')(Ins;<-inf,t](w,w') & t<t' . →
Ba(z, M;<-inf, t](x,w) Ω M;<t, t'](x,w')))

Men fra (4), (9) og definisjonen av DEv kan man konkludere emd at

DEv;(w,t)(x,z). Dette viser at punkt (d) holder. **QED**.

Den følgende sats sier at dersom x har definitiv evidens for at utsagnet y er sant ved tidspunktet t, og t' er et tidspunkt som kommer etter t, så vil x også ha definitiv evidens for y ved det senere tidspunktet t', uansett hva som skjer i intervallet fra t til og med t'. Satsen kan mer presist formuleres slik:

Teorem 3.1.2 Anta <x,y>êPxU, w0, w1êI og t0, t1êT.
Da har vi:

DEv;(w0,t0)(x,y) & Ins;<-inf, t0](w0,w1) & t0 < t1 → DEv;(w1,t1)(x,y)

Bevis: Anta (1) DEv;(w0,t0)(x,y) og (2) Ins;<-inf, t0](w0,w1) & t0 < t1 . Da følger ved hjelp av definisjonen av DEv at man må ha:

(3) yêU & Ba(y, M;<-inf, t0](x,w0))

(4) (Aw')(At')(Ins;<-inf,t](w0,w') & t0<t' . →
Ba(y, M;<-inf, t0](x,w0) Ω M;<t0, t'](x,w')))

For å vise DEv;(w1,t1)(x,y) er det nødvendig å bevise:

(5) Ba(y, M;<-inf, t1](x,w1))

La oss gjøre dette: I lys av (2) må man ha at:

(6) M;<-inf, t1](x,w1) = M;<-inf, t0](x,w0) Ω M;<t0, t1](x,w1)

Fra (4) og (2) følger:

(7) Ba(y, M;<-inf, t0](x,w0) Ω M;<t0, t1](x,w1))

Men fra dette og (6) følger åpenbart (5). Dermed har vi vist at (5) holder.

For å gi et fullstendig bevis for satsen vil det nå i lys av (5) og definisjonen av DEv være tilstrekkelig å bevise følgende:

(8) (Aw")(At")(Ins;<-inf,t](w1,w") & t1<t" . →
Ba(y, M;<-inf, t1](x,w1) Ω M;<t1, t"](x,w")))

Anta derfor for vilkårlige w" og t" at

(9) Ins;<-inf, t1](w1,w") og

(10) t1 <t"

Fra (9) og (2) kan man slutte, siden t1 > t0 at

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(11) Ins;<-inf,t0](w0,w")

Fra dette, (4) og det forhold at t0 < t1 <t" følger i sin tur:

(12) Ba(y, M;<-inf, t0](x,w0) Ω M;<t0, t"](x,w")))

Siden (9) holder har vi:

(13) M;<t0,t"](x,w") = M;<t0,t1](x,w1) Ω M;<t1,t"](x,w")

Men fra (6), (12) og (13) kan man slutte at

(14) Ba(y, M;<-inf, t1](x,w1) Ω M;<t1, t"](x,w")))

Dette viser at (8) holder. Dermed har vi gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Det følgende teorem sier at dersom y er et finstrukturert utsagn som beskriver et forhold x vet er tilfelle ved tidspunktet t i verdenen w og t' er et tidspunkt som kommer før t og z er et momentant bevissthetsinntrykk som fremtrer for x ved t' i verdenen w, så har faktisk x ved tidspunktet t i verdenen w definitiv evidens for det utsagnet som sier at dette momentane bevisshetsinntrykket z fremtrer for x ved t' (i verdenen w). Sagt på en litt grovere måte: Man har ved ethvert tidspunkt der man vet noe, definitiv evidens for ethvert momentant bevissthetsinntrykk som fremtrer for en ved et hvilket som helst tidligere tidspunkt. Satsen vi har i tankene er i formalisert form denne:

Teorem 3.1.3. Anta (i) Vet;(w,t)(x,y) for noe yêU;f. Anta (ii) t'ê<-inf,t] og

(iii) Frem;(w,t')(z,x)

Sett per definisjon u0(z) = μ;-1(Mg(w: Frem;(w,t')(z,x))). Da har man

DEv;(w,t)(x, u0(z))

Bevis: Anta forutsetningene holder. Vi skal først vise at:

(+) μ(M;<-inf,t](x,w)) Inkl Mg(w: Frem;(w,t)(z,x))

Anta derfor for vilkårlig w' der w'êI at (1) w'êμ(M;<-inf,t](x,w)). Da har man ved hjelp av definisjonen av uttrykket "M;<-inf,t](x,w)" at

(2) (At")(t" ê <-inf,t] → (Ay)(Frem;(w',t")(y,x) ↔ Frem;(w,t")(y,x)))

Siden vi etter forutsetningene har at t'ê<-inf,t] og Frem;(w,t')(z,x) følger det fra (2) at Frem;(w',t)(z,x). Dette impliserer at w'ê Mg(w: Frem;(w,t)(z,x)). Siden w' var vilkårlig viser dette at (+) holder

Fra (+) kan man slutte:

(++) (M;<-inf,t](x,w) => u0(z)) = μ;-1(I)

Inklusjonen mot er opplagt siden vi fra wêμ(M;<-inf,t](x,w) =>u0(z)) kan slutte at wêMg(w': w'êI & (w'êμ(M;<-inf,t](x,w)) → wêμ(u0(z)))). Men fra dette følger åpenbart at wêI. Antar vi på den annen side for vilkårlig w at wêI. Da har vi åpenbart ved hjelp av (+) at wêMg(w': w'êI & (w'êμ(M;<-inf,t](x,w)) → wêμ(u0(z)))) og derfor

wêμ(M;<-inf,t](x,w) => u0(z)). Dette viser at (++) holder.

Fra forutsetning (i) og aksiomet K1 som sier at

Vet;(w,t)(x,y) → DEv;(w,t)(x,μ;-1(μ;f(y))) holder for alle w,t, x og y, kan man slutte:

(3) DEv;(w,t)(x,μ;-1(μ;f(y))) . Men fra dette og Teorem 3.1.1, punkt (c) kan man slutte (4) DEv;(w,t)(x,μ;-1(I)). Men fra (4) og (++) følger i sin tur:

(5) DEv;(w,t)(x, M;<-inf,t](x,w) => u0(z))

For å fullføre beviset vil det nå være tilstrekkelig å vise at:

(+++) DEv;(w,t)(x, M;<-inf,t](x,w)).

Konklusjonen i teoremet følger i så fall fra (5), (+++) og punkt (d) i Teorem 3.1.1.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

La oss vise at (+++) holder. I lys av definisjonen av DEv må vi vise to ting:

(6) Ba(M;<-inf, t](x,w), M;<-inf, t](x,w))

(7) (Aw')(At')(Ins;<-inf,t](w,w') & t<t' . →
Ba(M;<-inf, t](x,w), M;<-inf, t](x,w) Ω M;<t, t'](x,w')))

Nå har vi fra (3) og definsjonen av DEv at

(8) Ba(μ;-1(μ;f(y)), M;<-inf, t](x,w))

Vi har imidlertid som en generell lov for relasjonen Ba at følgende holder:

(Ax)(Ay)(x,yêU → Ba(x,y) → Ba(y,y)). Fra denne loven og (8) følger derfor (6). Det gjenstår nå bare å vise (7). Fra (3) og definisjonen av DEv kan man slutte:

(9) (Aw')(At')(Ins;<-inf,t](w,w') & t<t' . →
Ba(μ;-1(μ;f(y)), M;<-inf, t](x,w) Ω M;<t, t'](x,w')))

Vi vil vise at (7) følger ved hjelp av (9). Anta derfor for vilkårlige w',t' at

(10) Ins;<-inf,t](w,w') & t<t' . Da følger fra (9) at

(11) Ba(μ;-1(μ;f(y)), M;<-inf, t](x,w) Ω M;<t, t'](x,w'))

Men igjen har vi herfra ved hjelp av loven (Ax)(Ay)(x,yêU → Ba(x,y) → Ba(y,y)) at

(12) Ba(M;<-inf, t](x,w) Ω M;<t, t'](x,w'), M;<-inf, t](x,w) Ω M;<t, t'](x,w'))

Nå skulle det være åpenbart at vi har ved hjelp av ren utsagnslogikk:

╞ M;<-inf, t](x,w) Ω M;<t, t'](x,w') => M;<-inf, t](x,w)

Men fra dette, (12) og den følgende lov som gjelder for Ba, nemlig

(Ax)(Ay)(Az)(x,y,zêU →, Ba(y,x) & ╞ y =>z →Ba(z,x)),

kan man slutte:

(13) Ba(M;<-inf, t](x,w), M;<-inf, t](x,w) Ω M;<t, t'](x,w'))

Men siden w',t' var vilkårlige entiteter som oppfylte (10) følger det at (7) holder.

Vi har nå vist at (6) og (7) holder, men da holder (+++). Fra (+++), (5) og punkt (d) i Teorem 3.1.1 følger så satsen. **QED**.

Det er noen andre satser som det er verdt å nevne i forbindelse med satsen ovenfor. Den første av disse har vi i det vesentlige bevist. Satsen er den følgende:

Teorem 3.1.4. Anta Vet;(w,t)(x,y) for noe yêU;f. Da gjelder:
DEv;(w,t)(x, M;<-inf, t](x,w))

Hva denne satsen sier er at dersom individet x vet noe ved tidspunktet t i verdenen w så har x ved dette tidspunktet i denne verden også definitiv evidens for det utsagnet som beskriver den totale strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for ham over tidsintervallet <-inf,t].

Bevis: Man ser at konklusjonen i teoremet er den samme som formelen (+++) i beviset for forrige teorem. Vi viste at denne formelen holdt under forutsetningene i dette tidligere teorem. En nærmere inspeksjon av dette beviset viser imidlertid at den eneste av forutsetningene vi trenger for å vise (+++) er (Ey)Vet;(w,t)(x,y). Dermed kan vi anse satsen rett ovenfor som bevist. **QED**.

Man merker seg at vi naturligvis trenger aksiomet K1 i dette beviset.

Teorem 3.1.5. Anta (i) Vet;(w,t)(x,y) for noe yêU;f. Anta t', t'' êT og at t'' <t ' <t.
Da gjelder:

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

DEv;(w,t)(x, M;[t",t'](x,w))

La oss igjen se på hva denne setningen sier. Først bør det bemerkes at M;[t",t'](x,w) er det utsagnet som beskriver den totale strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for individet x over tidsintervallet [t", t'] i verdenen w. Dette utsagn vil naturligvis være implisert av det sterkere utsagnet M;<-inf, t](x,w) som er det utsagnet som beskriver den totale strøm av bevisthetsinntrykk som fremtrer for x i verdenen w ved *alle* tidspunkter som kommer før eller er identisk med tidspunktet t. Det satsen sier er derfor at dersom x ved tidspunktet t vet et eller annet og t" og t' er tidspunkter som kommer før tidspunktet t og t" kommer før tidspunktet t' så har x ved tidspunktet t definitiv evidens for det utsagnet som beskriver den totale strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for ham over tidsintervallet [t", t']. Dette innebærer at dersom man er ved bevissthet ved et eller annet tidspunkt har man definitiv evidens for den totale strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for en i ethvert tidsintervall som kommer før t.

Bevis: Teoremet følger fra Teorem 3.1.4 og punktene (c) og (d) i Teorem 3.1.1 fordi man lett kan vise at man har :

$\models$ M;<-inf, t](x,w) => M;[t", t'](x,w)

og fordi det gjelder generelt for alle utsagn y1,y2 at

DEv;(w,t)(x,y1) & $\models$ y1 => y2 → DEv;(w,t)(x,y2). **QED**.

§3.2 Noen satser om evidens og definitiv evidens II

Vi skal i denne paragrafen se litt nærmere på de rent modallogiske egenskapene til visse operasjoner som kan defineres ved hjelp av predikatene "Ev;(w,t)(x,y)" og "DEv;(w,t)(x,y)". Den følgende operasjon "Ev*;(x,t)(y)" kan defineres ved hjelp av predikatet "Ev;(w,t)(x,y)". Definisjonen kan formuleres slik:

Definisjon 3.2.1 Anta <x,t>êPxT og yêU. Da setter vi:

Ev*;(x,t)(y) = μ;-1(Mg(w: wêI & Ev;(w,t)(x,y)))

Merk at Mg(w: wêI & Ev;(w,t)(x,y)) er mengden av alle de verdener w der vi har at x ved tidspunktet t i w har evidens for at utsagnet y er sant. Man ser da at Ev*;(x,t)(y) er utsagnet hvis sannhetsmengde er denne mengden av mulige verdener. Videre iaktar man da at uttrykket "Ev*;(x,t)(y)" kan leses "utsagnet som sier at x ved tidspunktet t har evidens for utsagnet y. Dette innebærer at "Ev*;(x,t)(y)" er en singulær term som betegner et utsagn om alle variabeltegnene i uttrykket er tilordnet bestemte objekter. Vi bemerker også at vi kan definere operasjonen Ev*;(x,t) ved å sette Ev*;(x,t) = Mg(<y, Ev*;(x,t)(y)>: yêU). Det er da lett å se at Ev*(x,t) er en funksjon som avbilder mengden av utsagn inn i mengden av utsagn, ie at man har:

Ev*;(x,t): U → U

Vi har nå betraktet predikatetkonstruksjonen "Ev;(w,t)(x,y)" og den tilsvarende operasjonen Ev*;(x,t). Helt tilsvarende overveielser kan gjøres i forbindelse predikatet "DEv;(w,t)(x,y)"

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Den følgende operasjon "DEv*;(x,t)(y)" kan defineres ved hjelp av predikatet "DEv;(w,t)(x,y)". Definisjonen kan formuleres slik:

Definisjon 3.2.2 Anta <x,t>êPxT og yêU. Da setter vi:
DEv*;(x,t)(y) = μ;-1(Mg(w: wêI & DEv;(w,t)(x,y)))

Merk at Mg(w: wêI & DEv;(w,t)(x,y)) er mengden av alle de verdener w der vi har at x ved tidspunktet t i w har definitiv evidens for at utsagnet y er sant. Man ser da at DEv*;(x,t)(y) er utsagnet hvis sannhetsmengde er denne mengden av mulige verdener. Videre iaktar man da at uttrykket "DEv*;(x,t)(y)" kan leses "utsagnet som sier at x ved tidspunktet t har definitiv evidens for utsagnet y. Dette innebærer at "DEv*;(x,t)(y)" er en singulær term som betegner et utsagn om alle variabeltegnene i uttrykket er tilordnet bestemte objekter. Vi bemerker også at vi kan definere operasjonen DEv*;(x,t) ved å sette:

DEv*;(x,t) = Mg(<y, DEv*;(x,t)(y)>: yêU).

Det er da lett å se at DEv*(x,t) er en funksjon som avbilder mengden av utsagn inn i mengden av utsagn, ie at man har:
DEv*;(x,t): U → U

Det følgende teorem oppsummerer de viktigste egenskapene til operatorene Ev*;(x,t) og DEv*;(x,t). Det kan bevises ved hjelp av Teorem 3.1.1.

Teorem 3.2.1. Anta <x,t>êPxT og at α,β êU. Da har man
(i) ⊨ DEv*;(x,t)(α) => Ev*;(x,t)(α)
(ii) ⊨ DEv*;(x,t)(α) => α
(iii) ⊨ α → ⊨ Ev*;(x,t)(β)=> Ev*;(x,t)(α)
(iv) ⊨ Ev*(x,t)(α) Ω Ev*;(x,t)(α=>β). => Ev*;(x,t)(β)
(v) ⊨ Ev*(x,t)(α) =>¬Ev*;(x,t)(¬α)
(vi) ⊨ α → ⊨ DEv*;(x,t)(β)=> DEv*;(x,t)(α)
(vii) ⊨ DEv*(x,t)(α) Ω DEv*;(x,t)(α=>β). => DEv*;(x,t)(β)

Når det gjelder denne satsen ser man lett at (ii) følger fra aksiomet K1. (Se §3 ovenfor.) Videre er det enkelt å se at (iii) og (iv) følger fra punktene (a) og (b) i Teorem 3.1.1. Videre følger punktene (vi) og (vii) i teoremet ovenfor fra punktene (c) og (d) i Teorem 3.1.1. De punktene som derfor fortjener separat omtale er (i) og (v). Når det gjelder (i) følger dette direkte ved hjelp av definisjonene av predikatene "DEv;(w,t)(x,y)" og "Ev;(w,t)(x,y)".

Når det gjelder (v) er denne påstanden ekvivalent med: Ev;(w,t)(x,y) → ~Ev;(w,t)(x,¬y). Dette er i sin tur ekvivalent med Ba(y, M;<-inf,t](x,w)) → ~ Ba(¬y, M;<-inf,t](x,w)). Men vi har som en generell setning som gjelder om relasjonen Ba at B(x,y) → ~Ba(¬x,y) om x og y er vilkårlige utsagn. Det følger fra dette at også påstanden (v) holder.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

For ytterligere å belyse egenskapene til operasjonene Ev*;(x,t) og DEv*;(x,t) innfører vi to typer av operasjoner. Den første kaller vi for en svak KD-funksjon. Den andre for en svak T-funksjon. La oss gi definisjonene av disse to begrepene:

Definisjon 3.2.3 Vi kaller L for en svak KD-funksjon hvis og bare hvis L oppfyller de følgende fire krav for alle α,βêU:

(i) L: U → U
(ii) ⊨α → ⊨L(β) => L(α)
(iii) ⊨ L(α=>β) =>. L(α)=> L(β)
(iv) ⊨ L(α) => ¬L(¬α)

Ser man nærmere på kravene (ii) - (iv) i denne definisjonen ser man at kravet (ii) er en avsvekking av den vanlige regelen, modal generalisering, |- α → |- Nec(α) som er en regel i alle de vanlige systemer av modallogikk som går under navnet "normale". Ellers svarer kravet (iii) til det vanlige aksiomskjemaet Nec(α→β) → Nec(α) → Nec(β) i normal modallogikk. Dette skjemaet går vanligvis under navnet K. Endelig betegner man ofte skjemaet Nec(α) → Pos(α), eller om Pos(α) defineres som ~Nec(~α), Nec(α)→ ~Nec(~α) med D. Det vanlige utsagnslogiske modalsystemet med umodifisert modal generalisering samt K og D som aksiomsjemaer kalles derfor ofte for KD. Det er fordi kravene (ii) - (iv) korresponderer med aksiomene i dette systemet med en avsvekket regel om modal generalisering at vi kaller en operasjon L som oppfyller kravene (i) - (iv) for en svak KD-funksjon.

Vi definerer så hva vi mener med en svak T-funksjon. Definisjonen er som følger:

Definisjon 3.2.4 Vi kaller L for en svak T-funksjon hvis og bare hvis L oppfyller de følgende fire krav for alle α,βêU:

(i) L: U → U
(ii) ⊨α → ⊨ L(β) => L(α)
(iii) ⊨ L(α=>β) =>. L(α)=> L(β)
(iv) ⊨ L(α) => α

Man ser at kravene (iii) og (iv) svarer til de vanlige aksiomene i modalsystemet T og at (ii) er en avsvekking av den vanlige regelen om modal generalisering som brukes i det setningslogiske modalsystemet T. Det er av denne grunn vi kaller en funksjon som oppfyller kravene i denne definisjonen for en svak T-funksjon.

Siden kravet ⊨ L(α) => α impliserer ⊨ L(α) => ¬L(¬α) følger det fra de definisjonene vi har gitt at alle svake T-funksjoner er svake KD-funksjoner, men det omvendte holder ikke. Vi finner det imidlertid overflødig å levere et detaljert bevis for den siste påstanden akkurat her.

Man ser nå ved hjelp av Teorem 3.2.1 at Ev*;(x,t) er en svak KD-funksjon. Dette følger fra punkt (iii), (iv) og (v) i denne satsen. På tilsvarende måte viser punkt (ii), (vi) og (vii) at DEv*;(x,t) er en svak T-funksjon og derfor selvfølgelig også at den er en svak KD-funksjon. Det følger derfor at alle de satser som gjelder generelt for svake KD- funksjoner også gjelder for Ev*;(x,t) og DEv*;(x,t).

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

I lys av dette kan det derfor være av interesse å se på eksempler på teoremer som faktisk gjelder for svake KD-funksjoner. Vi skal nevne tre slike satser som alle har en rekke underpunkter og som vi her kaller Elementærteorem I - III, for å understreke deres allment kjente og nærmest platte natur. Man bør naturligvis sammenligne disse setningene med Teorem 2.2.1- 2.2.3 som vi nevnte i forbindelse med begrepet K-funksjon som vi introduserte i DEL III, §2.2.

Før vi imidlertid går videre må det imidlertid sies noen ord den duale funksjon CL. Hvis L er en svak KD-funksjon definerer vi den duale funksjonen til L ved å sette: $CL(\alpha)= \neg L(\neg\alpha)$ om $\alpha \hat{e} U$. Hvis klassen av svake KD-funksjoner betegnes med **K** kan C opfattes som en funksjon som til enhver $L \hat{e} \mathbf{K}$ tilordner L en bestemt funksjon i mengden $Mg(f: f: U \rightarrow U)$ og der $C(L) = \lambda/\alpha \hat{e} U/(\neg L(\neg\alpha))$. Man ser da at $C(L)(\alpha) = \neg L(\neg\alpha)$. I stedet for å skrive "C(L)" skriver vi "CL" for å slippe å belaste teksten med alt for mange paranteser. Vi gir den følgende formelle definisjon:

Definisjon 3.2.5: Anta $\alpha \hat{e} U$ og at $L: U \rightarrow U$. Da setter vi:
$$CL(\alpha) = \neg L(\neg\alpha).$$

Det første elementære teoremet vi nevner er nå dette:

Teorem 3.2.2 (Elementærteorem I). Anta $\alpha;i \hat{e} U$ $(i \hat{e} N)$ og at $\beta \hat{e} U$. Anta L er en svak KD-funksjon. Da har vi:

(a) $\models L(\alpha \Omega \beta) \iff L(\alpha) \Omega L(\beta)$
(b) $\models L(SNu/i,1,n/(\alpha;i)) \iff SNu/i,1,n/(L(\alpha;i))$
(c) $\models \alpha \Rightarrow \beta \rightarrow \models CL(\alpha) \Rightarrow CL(\beta)$
(d) $\models \alpha \Rightarrow \beta \rightarrow \models L(\alpha) \Rightarrow L(\beta)$
(e) $\models SNu/i,1,n/(\alpha;i) \Rightarrow \beta \rightarrow \models SNu/i,1,n/(L(\alpha;i)) \Rightarrow L(\beta)$
(f) $\models \alpha \iff \beta \rightarrow \models L(\alpha) \iff L(\beta)$
(g) $\models \alpha \iff \beta \rightarrow \models CL(\alpha) \iff CL(\beta)$

Alle punktene i dette teoremet kan bevises på en måte som ligner svært på den måtenvi ga bevis for de tilsvarende punktene i Teorem 2.2.1 i §2.2 i DEL III. Men en forskjell er der. Overalt hvor vi i disse bevisene brukte den modale generaliseringsregelen $\models \alpha \rightarrow \models L(\alpha)$, må vi nå bruke den avsvekkede formen $\models \alpha \rightarrow \models L(\beta) \rightarrow L(\alpha)$.

Teorem 3.2.3 (Elementærteorem II) Anta $\alpha;i \hat{e} U$ $(i \hat{e} N)$ og at $\alpha,\beta,\gamma \hat{e} U$. Anta L er en svak KD-funksjon. Da har vi:

(i) $\models L(\alpha) \Omega L(\alpha \Rightarrow \beta) \Rightarrow L(\beta)$
(ii) $\models L(SNu/i,1,n/(\alpha;i)) \Rightarrow \beta. \Rightarrow. SNu/i,1,n/(L(\alpha;i)) \Rightarrow \beta$
(iii) $\models L(\alpha \iff \beta) \Rightarrow. (L(\alpha) \iff L(\beta))$
(iv) $\models L(\alpha \iff \beta) \Rightarrow. L(\alpha \circ \gamma) \iff L(\beta \circ \gamma)$
(v) $\models L(\alpha \iff \beta) \Rightarrow. L(\gamma \circ \alpha) \iff L(\gamma \circ \beta)$
(vi) $\models L(\alpha \iff \beta) \Rightarrow. L(\neg\alpha) \iff L(\neg\beta)$
(vii) $\models L(\alpha \iff \beta) \Rightarrow. CL(\alpha) \iff CL(\beta)$
(viii) $\models L(\alpha \iff \beta) \Rightarrow. CL(\alpha \circ \gamma) \iff CL(\beta \circ \gamma)$

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(ix) ⊨ L(α <=> β) =>. CL(γoα) <=> CL(γoβ)
(x) ⊨ CL(UNu/i,1,n/(α;i)) <=> UNu/i,1,n/(CL(α;i))
(xi) ⊨ L(SNu/i,1,n/(α;i)) <=> ¬CL(UNu/i,1,n/(¬α;i))
(xii) ⊨ L(UNu/i,1,n/(α;i)) <=> ¬CL(SNu/i,1,n/(¬α;i))
(xiii) ⊨ CL(SNu/i,1,n/(α;i)) <=> ¬L(UNu/i,1,n/(¬α;i))
(xiv) ⊨ CL(UNu/i,1,n/(α;i)) <=> ¬L(SNu/1,1,n/(¬α;i))
(xv) ⊨ L(SNu/i,1,n/(α;i) => βΩ¬β) => L(UNu/i,1,n/(¬α;i))

Den samme kommentar som vi ga i forbindelse med Teorem 3.2.2 kan gis i fobindelse med denne satsen. De fleste punktene rett ovenfor er dessuten ganske lette å bevise gitt at man kan ta de enkelte punktene i Teorem 3.2.2 for gitt.

Nøyaktig det samme kan sies om den følgende sats hvor vi overlater beviset til leseren:

Teorem 3.2.4 (Elementærteorem III) Anta α,β êU. Anta L er en svak KD-funksjon. Da har vi:

(i) ⊨ L(α=>β) => CL(α) => CL(β)
(ii) ⊨ L(αUβ) Ω L(¬α). => L(β)
(iii) ⊨ L(αUβ) Ω CL(¬β) => CL(α)
(iv) ⊨ L(α => β) =>.L(¬β) => L(¬α)
(v) ⊨ L(α => β) => ¬CL(β) => ¬CL(α)
(vi) ⊨ CL(αΩβ) => CL(α) & CL(β)
(vii) ⊨ L(αUβ) => L(β)UCL(α)
(viii) ⊨ CL(¬β) Ω L(¬α) => CL(¬αΩ¬β)
(ix) ⊨ CL(β) Ω L(α) =>CL(αΩβ)
(x) ⊨ L(α) => CL(β) => CL(αΩβ)
(xi) ⊨ CL(¬β) => ¬L(αΩβ)

Har vi at F:U→U og G:U→U, definerer vi FoG ved å sette FoG=λ/xêU/(F(G(x)). FoG er altså sammensetningen av de to funksjonene F og G. Det bør bemerkes at operasjonen o selvfølgelig ikke er kommutativ.

Det man nå kan vise er at dersom F og G er to svake KD-funksjoner så er også FoG en svak KD-funksjon. La oss formulere dette som en egen sats slik:

Teorem 3.2.5. Anta F og G er to svake KD-funksjoner. Da har man at FoG er en svak KD-funksjon.

Bevis: Anta (1) F og G er to svake KD-funksjoner. Da har man ved hjelp av definisjonen av KD-funksjon at:

(2.1) ⊨α → ⊨ F(β) → F(α)
(2.2) ⊨ F(α=>β) =>. F(α)=>F(β)
(2.3) ⊨ F(α) => ¬F(¬α)

og

(3.1) ⊨α → ⊨ G(β) → G(α)
(3.2) ⊨ G(α=>β) =>. G(α)=>G(β)

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(3.3) $\models G(\alpha) => \neg G(\neg\alpha)$

Vi skal under disse omstendigheter vise at GoF er en svak KD-funksjon. Det vil da være tilstrekkelig å bevise:

(a) $\models\alpha \rightarrow \models G(F(\beta)) => G(F(\alpha))$
(b) $\models G(F(\alpha=>\beta)) =>. G(F(\alpha))=>G(F(\beta))$
(c) $\models G(F(\alpha)) => \neg G(F(\neg\alpha))$

Ad (a): Fra (3.1) kan man slutte:

(4) $\models F(\beta) =>F(\alpha) \rightarrow \models G(F(\beta)) => G(F(\beta) =>F(\alpha))$ [91]

Fra (3.2) har man:

(5) $\models G(F(\beta) =>F(\alpha)) =>. G(F(\beta)) => G(F(\alpha))$

Fra (2.1) og (4) kan man slutte:

(6) $\models\alpha \rightarrow \models G(F(\beta)) => G(F(\beta) =>F(\alpha))$

Fra dette og (5) følger ved hjelp av ren utsagnslogikk:

(7) $\models\alpha \rightarrow \models G(F(\beta)) =>. G(F(\beta)) =>G(F(\alpha))$. Men fra dette, (6) og ren utsagnslogikk følger: $\models\alpha \rightarrow \models G(F(\beta)) => G(F(\alpha))$. Dette viser at (a) holder.

Ad (b): Fra (2.2) har man:

(8) $\models F(\alpha=>\beta) =>. F(\alpha)=>F(\beta)$

Fra dette og (3.1) kan man slutte:

(9) $\models G(F(\alpha=>\beta)) => G(F(\alpha=>\beta) =>. F(\alpha)=>F(\beta))$

Fra (3.2) følger:

(10) $\models G(F(\alpha=>\beta) =>. F(\alpha)=>F(\beta)) =>. G(F(\alpha=>\beta)) => G(F(\alpha) => F(\beta))$

Fra (3.2) kan man likeledes utlede:

(11) $\models G(F(\alpha) => F(\beta)) =>. G(F(\alpha)) => G(F(\beta))$

Fra (9), (10) og (11) følger ved hjelp av ren setningslogikk:

(12) $\models G(F(\alpha=>\beta)) =>. G(F(\alpha=>\beta)) => G(F(\alpha)) => G(F(\beta))$

Men fra dette følger åpenbart ved hjelp av utsagnslogikk det vi ønsker:

$G(F(\alpha=>\beta)) =>. G(F(\alpha))=>G(F(\beta)$

Dette viser at (b) holder.

Ad (c): Nå har vi fra (2.3) at $\models F(\alpha) => \neg F(\neg\alpha)$. Fra dette og (3.1) kan man slutte

(13) $\models G(F\alpha) => G(F(\alpha) =>\neg F(\neg\alpha))$.

Men vi har ved hjelp av (3.2) at (14) $\models G(F(\alpha) => \neg F(\neg\alpha)) =>. G(F(\alpha)) => G(\neg F(\neg\alpha))$

Fra (13) og (14) følger ved hjelp av ren utsagnslogikk:

(15) $\models G(F(\alpha)) \Omega G(F(\alpha)) => G(\neg F(\neg\alpha))$. Dette impliserer selvfølgelig:

(16) $\models G(F(\alpha)) => G(\neg F(\neg\alpha))$

Men fra (3.3) kan man slutte:

(17) $\models G(\neg F(\neg\alpha)) => \neg G(\neg(\neg F(\neg\alpha)))$.

Men det er åpenbart at $\neg(\neg F(\neg\alpha)) = F(\neg\alpha)$. Fra dette og 16) følger så:

(18) $\models G(\neg F(\neg\alpha)) => \neg G(F(\neg\alpha))$

Fra (16) og (18) kan man så ved hjelp av ren setningslogikk slutte: $\models G(F(\alpha)) => \neg G(F(\neg\alpha))$. Dette viser at (c) holder. Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

91 Man setter in "F(β)" for "β" og "F(β) =>F(α)" for "α" i (3.1)

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Vi gir først noen definisjoner som vi har bruk for.

Anta <B;n>/nêN-{0}/ er en sekvens av svake KD-funksjoner. Da defineres R;n (nêN-{0}) induktivet ved:

Definisjon 3.2.6: Anta <B;n>/iêN-{0}/ er en sekvens av svake KD-funksjoner. Da setter vi:
(a) R;1 = B;1
(b) R;(n+1) = B;(n+1)oR;n

Merk at dersom F og G er to funksjoner i U^U, så er FoG definert ved
FoG = Mg(<x,y>: (Ez)(<x,z>êG & <z,y>êF))
Det skulle være lett å utlede at at (FoG)(α) = F(G(α)). Vi behøver ikke gi noe detaljert bevis for dette her.

Tilsvarende defineres en sekvens M;n (nêN-{0}) slik:

Definisjon 3.2.7: Anta <B;n>/nêN-{0}/ er en sekvens av svake KD-funksjoner. Da setter vi:
(a) M;1= CB;1
(b) M;(n+1) = CB;(n+1)o M;n

La oss gi noen eksempler i forbindelse med disse definisjonene. Vi har at de epistemiske operasjonene vi har nevnt så langt i dette avsnittet er svake KD-funksjoner. Tenker man seg derfor en sekvens <B;n>/nêN-{0}/ der B;1= DEv*;(x,t), B;2 = Ev*;(x,t) ,B;3= Ev*;(x,t) og B;n = DEv*;(x,t) for alle n>3, vil dette være et eksempel på en sekvens av svake KD-funksjoner som er så godt som et hvilket som helst annet.

Som man ser vil vi da ha, om man holder seg til Definisjon 3.2.5, at B;3(α) = Ev*;(x,t)(Ev*;(x,t)(DEv*;(x,t)(α))). Ser man på B;5, ser man at man har at B;5(α) = DEv*(x,t)(DEv*(x,t)(Ev*;(x,t)(Ev*;(x,t)(DEv*;(x,t)(α))))).

Ser vi på den duale funksjonen M;n og baserer oss på den samme sekvens av svake KD-funksjoner, er det ikke vanskelig å se at

M;3(α) = CEv*;(x,t)(CEv*;(x,t)(CDEv*;(x,t)(α))) og at

M;5(α) = CDEv*(x,t)(CDEv*(x,t)(CEv*;(x,t)(CEv*;(x,t)(CDEv*;(x,t)(α)))))

Fra Teorem 3.2.7 som vi vil formulere og bevise nedenfor følger det da at utsagnet CEv*;(x,t)(CEv*;(x,t)(CDEv*;(x,t)(α))) faktisk er ekvivalent med utsagnet

¬Ev*;(x,t)(Ev*;(x,t)(DEv*;(x,t)(¬α)))

Det følgende teorem kan bevises ved hjelp av det foregående, og kan oppfattes som en generalisering av Teorem 2.3.1:

Teorem 3.2.6: Anta <B;n>/nêN-{0}/ er en sekvens av av svake KD-funksjoner. Da er R;n en svak KD-funksjon for alle nêN der n>=1.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Bevis: Satsen bevises ved induksjon på n. *Basistrinn*: Det er åpenbart at den holder for n=1 siden B;1 er en en svak KD-funksjon og R;1= B;1 per definisjon. *Induksjonstrinn*: Anta satsen holder for n>=1. Da har vi (1) R;n er en svak KD-funksjon. Vi skal da vise at den holder for R;(n+1). Men R;(n+1) = B;(n+1)oR;n der B;(n+1) per forutsetning er en svak KD-funksjon. Det følger da ved hjelp av foregående teorem at R;(n+1) er en K-funksjon. **QED**.

Det følgende teorem viser at R;n og M;n er duale operatorer for alle n>=1, og derfor står i samme forhold til hverandre som logisk nødvendig og logisk mulig forholder seg til hverandre i vanlige modallogiske systemer:

Teorem 3.2.7: Anta <B;n>/nêN-{0}/ er en sekvens av svake KD-funksjoner og at αêU. Da har vi for alle n>=1:

(a) R;n(¬α) = ¬M;n(α)

(b) CR;n =M;n

Bevis: *Ad (a)*: Satsen bevis ved induksjon. Basistrinn: n=1. Da har vi at

(1) R;n(¬α) = R;1(¬α) = B;1(¬α) og dessuten i lys av definisjonen av M;n at (2) ¬M;n(α) = ¬CB;1(α) = ¬ ¬B;1(¬α) =B;1(¬α). Fra (1) og (2) fremgår det at satsen holder for n=1.

Induksjonstrinn: Vi anta at satsen holder for n og skal vise at den da holder for n+1. Anta derfor at (3) R;n(¬α) = ¬M;n(α) for vilkårlig αêU. Nå har vi i kraft av definisjonen av R;n at R;(n+1)(¬α) = B;(n+1)(R;n(¬α)) og der for ved hjelp av (3) at

R;(n+1)(¬α)= B;(n+1)(R;n(¬α)) = B;(n+1)(¬M:n(α)) =

¬¬B;(n+1)(¬M;n(α)) = ¬CB;(n+1)(M;n(α)) = ¬M;(n+1)(α).

Den siste identiteten følger ved hjelp av definisjonen av M;n. Vi ser at satsen holder for n+1 om den holder for n>=1. Det følger at denholder for alle n. Dette viser at punkt (a) holder.

Ad (b): Fra punkt (a) følger ¬R;n(¬α) = M;n(α). Men fra dette har vi ved hjelp av definisjonen av operasjonen C at CR;n(α) = M;n(α). Siden α var et vilkårlig utsagn følger at CR;n=M;n. **QED**.

Det følgende teorem kan oppfattes som et korollar til Teorem 3.2.2 . Det kan også oppfattes som en generalisering av dette teorem. Man kan se på Teorem 3.2.2 som det spesialtilfelle man får når man i dette teoremet setter n=1.

Teorem 3.2.8 (Iterasjonsteorem I). Anta α;i êU (iêN-{0}) og at α,βêU. Anta <R;n>/nêN-{0}/ er en sekvens av svake KD-funksjoner. Da har vi om n>=1 & m>=1:

(a) ⊨ R;n(αΩβ) <=> R;n(α)ΩR;n(β)

(b) ⊨ R;n(SNu/i,1,m/(α;i)) <=> SNu/i,1,m/(R;n(α;i))

(c) ⊨ α => β → ⊨ CR;n(α) => CR;n(β)

(d) ⊨ α => β → ⊨ R;n(α) => R;n(β)

(e) ⊨ SNu/i,1,m/(α;i) =>β → ⊨ SNu/i,1,m/(R;n(α;i)) => R;n(β)

(f) ⊨ α <=> β → ⊨ R;n(α) <=> R;n(β)

(g) ⊨ α <=> β → ⊨ CR;n(α) <=> CR;n(β)

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Bevis: Anta forutsetningene holder. Da har vi at R;n er en svak KD-funksjon ifølge Teorem 3.2.6 Vi kan da i Teorem 3.2.2 som gjelder allment for svake KD-funksjoner instansiere med hensyn på R;n, dvs. vi kan overalt hvor det i Teorem 3.2.2 står "L" sette inn "R;n". Da får vi satsen ovenfor som selvfølgelig må holde siden Teorem 3.2.2 holder. **QED**.

Det følgende teorem kan oppfattes som et korollar til Teorem 3.2.3 Også dette kan oppfattes som en generalisering av Teorem 3.2.3.

Teorem 3.2.9 (Iterasjonsteorem II) Anta α;i êU (iêN-{0}) og at α,β,γ êU. Anta <R;n>/nêN-{0}/ er en sekvens av svake KD-funksjoner. Da har vi om n>=1 & m>=1:

(i)	⊨ R;n(α) Ω R;n(α=>β) => R;n(β)
(ii)	⊨ R;n(SNu/i,1,m/(α;i))=>β. =>. SNu/i,1,m/R;n(α;i) =>β
(iii)	⊨ R;n(α<=>β) =>. (R;n(α) <=>R;n(β))
(iv)	⊨ R;n(α <=> β) =>. R;n(αoγ) <=> R;n(βoγ)
(v)	⊨ R;n(α <=> β) =>. R;n(γoα) <=> R;n(γoβ)
(vi)	⊨ R;n(α <=> β) =>. R;n(¬α) <=> R;n(¬β)
(vii)	⊨ R;n(α <=> β) =>. CR;n(α) <=> CR;n(β)
(viii)	⊨ R;n(α <=> β) =>. CR;n(αoγ) <=> CR;n(βoγ)
(ix)	⊨ R;n(α <=> β) =>. CR;n(γoα) <=> R;n(γoβ)
(x)	⊨ CR;n(UNu/i,1,m/(α;i)) <=> UNu/i,1,m/(CR;n(α;i))
(xi)	⊨ R;n(SNu/i,1,m/(α;i)) <=> ¬CR;n(UNu/i,1,m/(¬α;i))
(xii)	⊨ R;n(UNu/i,1,m/(α;i)) <=> ¬CR;n(SNu/i,1,m/(¬α;i))
(xiii)	⊨ CR;n(SNu/i,1,m/(α;i)) <=> ¬R;n(UNu/i,1,m/(¬α;i))
(xiv)	⊨ CR;n(UNu/i,1,m/(α;i) <=> ¬R;n(SNu/i,1,m/(¬α;i))
(xv)	⊨ R;n(SNu/i,1,m/(α;i) => βΩ¬β) => R;n(UNu/i,1,m/(¬α;i))

Bevis: Anta forutsetningene holder. Da har vi at R;n er en svak KD-funksjon ifølge Teorem 3.2.6. Vi kan da i Teorem 3.2.3 som gjelder allment for svake KD-funksjoner instansiere med hensyn på R;n, dvs. vi kan overalt hvor det i Teorem 3.2.3 står "L" sette inn "R;n". Da får vi satsen ovenfor som selvfølgelig må holde siden Teorem 3.2.3 holder. **QED**.

Det følgende teorem kan oppfattes som et korollar til Teorem 3.2.4 ovenfor.

Teorem 3.2.10 (Iterasjonsteorem III) Anta α,βêU. Anta <R;n>/nêN-{0}/ er en sekvens av svake KD-funksjoner. Da har vi:

(i)	⊨ R;n(α=>β) => CR;n(α) => CR;n(β)
(ii)	⊨ R;n(αUβ) Ω R;n(¬α). => R;n(β)
(iii)	⊨ R;n(αUβ) Ω CR;n(¬β) => CR;n(α)
(iv)	⊨ R;n(α => β) =>.R;n(¬β) => R;n(¬α)
(v)	⊨ R;n(α => β) => ¬CR;n(β) => ¬CR;n(α)
(vi)	⊨ CR;n(αΩβ) => CR;n(α) & CR;n(β)
(vii)	⊨ R;n(αUβ) => R;n(β)UCR;n(α)
(viii)	⊨ CR;n(¬β) Ω R;n(¬α) => CR;n(¬αΩ¬β)
(ix)	⊨ CR;n(β) Ω R;n(α) =>CR;n(αΩβ)
(x)	⊨ R;n(α) => CR;n(β) => CR;n(αΩβ)

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(xi) $\models CR;n(\neg\beta) \Rightarrow \neg R;n(\alpha\Omega\beta)$

Bevis: Anta forutsetningene holder. Da har vi at R;n er en svak KD-funksjon ifølge Teorem 3.2.6. Vi kan da i Teorem 3.2.4 som gjelder allment for svake KD-funksjoner instansiere med hensyn på R;n, dvs. vi kan overalt hvor det i Teorem 3.2.4 står "L" sette inn "R;n". Da får vi satsen ovenfor som selvfølgelig må holde siden Teorem 3.2.4 holder. **QED**.

§4 Noen avsluttende refleksjoner

Som vi allerde har nevnt har vi i denne delen formulert to nødvendige betingelser for at en person ved et gitt tispunkt skal vite at noe er tilfelle. Det første var at vedkommende måtte ha evidens for dette. Den andre betingelsen var at vedkommende måtte ha definitiv evidens. Den siste betingelsen impliserer naturligvis den første. Begge disse begrepene ble ovenfor knyttet til den totale strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for en person i verdenen w i tidsintervallet X. Som man også sikkert husker definerte vi også "M;X(x,w)" ved hjelp av predikatet "y er et momentatnt bevissthetsinntrykk som fremtrer for x ved tidspunktet t" som vi forkortet med "Frem(w,t)(y,x)". Hvis vi tenker os at X = <-inf,t], dvs. at X er mengden av alle de tidspunkter som kommer før tidspunktet t og inkluderer dette tidspunkt, vil M;<-inf,t](x,w) være det utsagnet som beskriver den totale strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for x i verdenen w fra uendelig tid tilbake og frem til tidspunktet t. Før unnfangelsestidspunktet til x, vi betegner det med t;u, vil det naturligvis ikke fremtre noen bevissthetsinntrykk for x i verdenen w. I så fall vil mengden av alle de bevissthetsinntrykk som fremtrer for x ved et tispunkt som kommer før t;u være tom og vi har den totale strøm av bevissthetsinntrykk over intervallet <-inf, t;u] i verdenen w vil være λ/tê<-inf, t;u]/(ø). Vi kalte utsagnet M;<-inf,t](x,w) også for utsagnet som beskriver den totale indre erfaring til x i verdenen w frem til og inkludert tidspunktet t.

Nåvel. Vi sa at x hadde *evidens* for utsagnet y ved tidspunktet t i verdenen w hvis og bare hvis det er fornuftig å akseptere utsagnet y relativt til det utsagnet som beskriver den totale indre erfaring til x i verdenen w frem til og inkludert tidspunktet t. Videre sa vi at x har *definitiv evidens* for utsagnet y ved tidspunktet t i verdenen w hvis og bare hvis (a) x ved dette tidspunktet i verden w har evidens for utsagnet y og (b) man har for ethvert tidspunkt t' der t' > t og enhver verden w' som er insident med verdenen w i intervallet <-inf,t] at utsagnet y også er et som det er fornuftig å akseptere relativt til det utsagn som beskriver den totale indre erfaring til x i verdenen w' frem til og inkludert tidspunktet t'. Det er mao. det samme hva slags erfaringer x har etter tidspunktet t i verdenen w ; dette vil ikke endre den rasjonelle akseptabilitet til utsagnet y. Tilslutt minner vi om at vi anså definitiv evidens som et nødvendig vilkår for viten.

Vel. Alt vi har skrevet ovenfor er kun en kjedelig repetisjon av forhold vi tidligere utførlig har gjennomgått. La oss nå fremsette noen nye kommentarer. For det første virker det rimelig å si at utsagnet M;<-inf,t](x,w), med andre ord det utsagnet som beskriver den indre erfaring til x i verdenen w over intervallet <-inf,t] representerer det som alt det som er originært gitt for personen x (ved tidspunktet t i verdenen w). Det finnes ikke noe annet som vi kan bygge opp vårt verdensbilde på grunnlag av enn denne strøm av bevissthetsinntrykk som kontinuerlig fremtrer for oss. Naturlig nok er denne strøm av bevissthetsinntrykk subjektiv og umulig å dele *direkte* med noen andre. Ingen av mine sanseinntrykk f. eks. kan

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

fremtre direkte for noen andre personer, og ingen andre personers sanseinntrykk kan deles, eller fremtre direkte, for meg. I denne forstand er de private.

I en annen forstand er de ikke private. Jeg kan lett rekonstruere min kones synsinntrykk når hun sitter foran skjermen på sin PC og arbeider, eller når vi spiser middag og hun selvfølgelig sitter på et annet sted ved bordet enn jeg gjør. På tilsvarende vis kan hun rekonstruere mine synsinntrykk ved suksessivt å inta de posisjoner hvor jeg befinner meg. Vår indre erfaring er *i denne forstand* ikke noen lukket utilgjengelig verden som man ikke kan forestille seg hvvordan er. Vi kan derfor bare fastslå at M;<-inf,t](x,w), den indre erfaringen til x frem til tidspunktet t utgjør det ultimate grunnlag som vårt verdensbilde hviler på.

Det vi nå skal gjøre er å sammenligne den teorien om akseptanse, evidens og definitiv evidens som vi har fremstilt i DEl IV og denne delen (Del V) med en langt sterkere teori som vi tok for oss i avslutningen til Del V, nemlig den som fremkommet nå vi til de akseptanseteoretiske aksiomene legger til nok et aksiom, nemlig:

(+) $\quad Ba(y,x) \leftrightarrow (x,y \hat{e} U \ \& \mu(x) \neq \emptyset \ \& \ \mu(x) \ Inkl \ \mu(y))$

Som man ser har vi i følge denne teorien at det er fornuftig å akseptere utsagnet y relativt til utsagnet y hvis og bare hvis x er et konsistent utsagn som impliserer utsagnet y. Hertil bør bemerkes at kondisjonalen mot venstre i (+) virker rimelig. Føyer man til som en tilleggsklausul at noe bør aksepteres relativt til x og ikke bare at x er konsistent så kan man faktisk vise at denne versjonen av (+) holder.[92] Derimot representerer kondisjonalen mot høyre et meget sterkt krav for at det er fornuftig å akseptere et utsagn relativt til et annet. Man ser forøvrig, om man aksepterer (+), at (+) impliserer at dersom det er fornuftig å akseptere utsagnet y relativt til utsaagnet x og x' er et konsistent utsagn som impliserer x så er det også fornuftig å akseptere y relativt til x'. Dette i sin tur impliserer at dersom man har evidens for at et utsagn er sant så må man også ha definitiv evidens for at det er sant.[93] Aksepterer man (+) får man derfor en teori om relassjonen Ba som er langt sterkere enn den vi definerte i Del IV

Fra bemerkningene ovenfor ser man også at dersom man aksepterer (+) har man at

(*) $\quad DEv;(w,t)(x,y) \ \leftrightarrow \ \emptyset \neq \mu(M;<-inf,t](x,w)) \ Inkl \ \mu(y).$

La oss nå fremsette noen generelle bemerkninger. La α være et finstrukturert utsagn og la oss betegne med "α*" utsagnet μ;-1(μ;f(α)). Med andre ord er α* utsagnet som har samme sannhetsmengde som det finstrukturerte utsagnet α. Anta nå at α* såvel som Neg(α*) er konsistente med den totale indre erfaringen til x i verdenen w opp til og inkludert tidspunktet t, med andre ord anta at

(1) $\quad \mu(\alpha^*) \ \Omega \ \mu(M;<-inf,t](x,w)) \neq \emptyset$
(2) $\quad (I - \mu(\alpha^*)) \ \Omega \ \mu(M;<-inf,t](x,w)) \neq \emptyset$

Fra (1) og (2) samt (*) ovenfor følger da at

92 Man kan vise som et teorem i vår teori at Ba(z,x) & μ(x) Inkl μ(y) → Ba(y,x). Vi har også at B(z,x) impliserer at utsagnet x er konsistent, ie at μ(x)≠ø.

93 Man kan, gitt våre definisjoner av Ev;(w,t)(x,y) og DEv;(w,t)(x,y) vise at Ev;(w,t)(x,y) ↔ DEv;(w,t)(x,y) om man forutsetter at <w,t,x,y>êIxTxPxU og at (+) holder. Dette innebærer at skillet mellom evidens og definitiv evidens viskes ut.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(3) ¬DEv;(w,t)(x,α*) & ¬DEv;(w,t)(x,Neg(α*))

Med andre ord vil x ved tidspunktet t i verdenen w hverken ha definitiv evidens for at α* er et sant utsagn eller definitiv evidens for at negasjonen av utsagnet α* er et sant utsagn. La vi α være som ovenfor og antar vi at β er et finstrukturert utsagn der μ;f(β) = I - μ;f(α), kan vi også slutte dersom vi anser at evidens og defintiv evidens er nødvendige betingelser for viten at

(4) ¬Vet;(w,t)(x,α) & ¬ Vet;(w,t)(x,β)

Vi skal se på to utsagn som tilsynelatende oppfyller betingelsene (1) og (2).

Det første utsagnet kaller vi γ;1 og er rett og slett det utsagnet som sier at det ikke finnes fysiske objekter. Er utsagnet γ;1 sant i verdenen w vil det altså ikke finnes noen fysiske objekter i verdenen w (og vice versa).

Det andre utsagnet kaller vi γ;2(x) og hva dette utsagnet sier er at y er en entitet som er forskjellig fra x så finnes det intet tidspunkt t og intet bevissthetsinntrykk z slik at z er det momentane bevissthetsinntrykk som fremtrer for x ved tidspunktet t. Vi kan gi en formell definisjon på følgende måte:

(5) γ;2(x) = μ;-1(Mg(w:wêI & (Ay)(y≠x → ¬(Ez)(Et) Frem;(w,t)(z,y))))

Man kan kalle utsagnet γ;1 for tesen om at det ikke finnes noen ytre fysisk verden, eller immatrialitetstesen. γ;2(x) impliserer at ingen anndre enn individet x kan ha bevissthetsinntrykk. Et navn på denne tesen, om man trenger det, kunne være solipsisme-tesen.

La oss starte med immatrialitetstesen (eller γ;1). Kan det finnes noen mulig verden w hvor det overhodet ikke finnes fysiske objekter men der det for individet x i tidsrommet <-inf,t] hele tiden fremtrer bevissthetsinntrykk?

La oss tenke oss at x i verdenen w er et normalt individ som ved tidspunkt t er forholdsvis gammel og som har opplevd det som svært mange andre har opplevd fra unnfangelsesøyeblikket til tidspunktet t. Da vil M;<-inf,t](x,w) være utsagnet som beskriver den indre erfaringen til x over et temmelig langt tidsrom. Er det da logisk sett mulig å tenke seg at det ikke finnes fysiske objekter i denne verden? Er det mulig å se for seg en slik verden? Det er vanskelig å la være å tro at dette er mulig. Denne personen vil leve i en verden der alt virker normalt, han vil ha en inntrengende følelse av at han står opp om morgenen og spiser sin frokost, videre følelsen av at han går til sitt arbeid den vanlige veien gjennom en bjørkeallé, møter sine vanlige arbeidskamerater, snakker med dem om de siste dagers hendelser, at de arbeider som de skal, og at de vender hjem til middag ved arbeidstidens slutt. Men siden det ikke finnes fysiske objekter i det ytre rom vil alt dette være en grandios illusjon. Det er nærliggende å konkludere med at dette er logisk mulig.

La oss nå drøfte om det er mulig å utlede noen motsigelse fra utsagnene Neg(γ;1) og M;<-inf,t](x,w) om vi forutsetter at x er den samme normale person vi tenkte oss ovenfor. Med andre ord er det tenkelig at det finnes fysiske objekter og at det er slik at den indre erfaringen til individet x fra unnfangelse til tidspunktet t er normal slik vi har beskrevet ovenfor. Dette virker svært rimelig, nærmest ugjendrivelig. Det virker derfor urimelig å tro at man kan utlede noen motsigelse i dette tilfellet.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

La oss nå konkludere når det gjelder γ;1. Vi har funnet at det relativt rimelig å anta at γ;1 og Neg(γ;1) er konsistente med M;<-inf,t](x,w). Dette innebærer at x ved tidspunktet t i verdenen w ikke har noen definitiv evidens for at det finnes ytre objekter. Dessuten innebærer det at x ved t i verdenen w heller ikke har noen definitiv evidens for at det ikke finnes noen fysiske objekter. Gitt at disse to konsistenspåstandene er riktige følger det at x ikke ved tidspunktet t i verdenen w vet at det finnes noen fysiske objekter og det følger at vedkommende heller ikke vet at det ikke finnes ytre fysiske objekter. Hvis vi antar at disse to konsistenspåstandene også holder uansett hvilken person x vi velger, og uansett hvilken verden og tidspunkt t det dreier seg om, må vi konkludere med at viten om en ytre fysisk verden er umulig.

La oss nå se på utsagnet γ;2(x) som sier at ethvert individ som er forskjellig fra x ikke ved noe tidspunkt opplever bevissthetsinntrykk av noe slag. Hvis vi tenker oss at x er en normal person som lever et normalt liv frem til, la oss t;d som er vedkommeendes dødstidspunkt, virker det svært rimelig å tro at for ethvert tidspunkt i intervallet <-inf,t;d] er γ;2(x) konsistent med utsagnet M;<-inf,t](x,w). γ;2(x) er naturligvis ingen sannsynlig eller rimelig påstand, men det virker ikke som om det er noen grunn til å hevde at den er logisk sett inkonsistent med M;<-inf,t](x,w).

Hvis man tenker seg en verden der det ikke for noen andre enn x selv fremtrer bevissthetsinntrykk vil x om han opplever at han snakker med andre mennesker, ser at de ler og prater og ellers oppfører seg normalt, f. eks. føler ubehag ved et bistikk, eller glede ved å innta et godt måltid, egentlig lide under en dyptgående illusjon. De personene han mener seg å iakta, som tilsynelatende snakker med ham, osv. er egentlig uten sansninger, sanse-fornemmelser, uten evne til å oppleve erindringsbilder osv. De gir bare inntrykk av å være normalt følende personer, men er egentlig en form for sjelløse zombier. Hvor merkelig en slik verden enn måte være virker det likevel ikke som om det dreier seg om en umulighet.

Neg(γ;2(x)), er utsagnet som sier at det finnes minst ett individ utover x som opplever bevissthetsinntrykk. Dette skulle åpenbart være logisk forenelig med utsagnet som beskriver x's indre erfaring frem til tidspunktet t i verdenen w uansett hvor "rar" denne strøm av bevissthetsinntrykk er.

Hva impliserer så disse to konsistensantagelsene som vi nå har betraktet? De impliserer, om vi godtar (+), at ikke ved noe tidspunkt i en verdenen w vil x ha definitiv evidens for at noen av de skikkelser som fremtrer i bevissthetsstrømmen til x, og som tilsynelatende fremtrer som allminnelige mennesker, har noen indre erfaring i likhet med x selv har. Heller ikke vil personen x ha noen definitiv evidens ved noe tidspunkt for at det ikke forholder seg på denne måten, dvs. at de skikkelsene som fremtrer for ham er rene zombier. Men fra dette følger at x i ved noe tidspunkt kan vite om de personene som tilsynelatende opptrer for ham er sjelløse automater, eller mennesker som i likhet med ham selv kan føle smerte og velvære, som kan høre andres stemmer og som kan utveksle tanker med sine medskapninger. Det må understrekes at de konskevensene vi har nevnt ovenfor bare kan utlede om man forutsetter at tesen (+) gjelder.

Det kan nå være på tide å oppsummere det bilde av den mennskelige kunnskap man får når man legger våre definisjoner av evidens og definitiv evidens til grunn, akepterer definitiv evidens som et nødvendig vilkår for viten, videre aksepterer de konsistenspåstandene vi

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

nevnte ovenfor og endelig aksepterer (+). Alle disse forutsetningene virker rimelige bortsett fra tesen (+).

La x være forfatteren av dette skrift og la t være det nuværende tidspunkt. (I stedet for "x" skriver vi idet følgende "jeg" og i stedet for "t" skriver vi "nå"). Gitt antagelsene ovenfor kan jeg ikke vite at jeg nå sitter på mitt arbeidsrom i min vanlige skrivebordstol og at det står en lampe og en bærbar datamaskin på det skrivebordet jeg har foran meg. Alle disse tingene: lampen, datamaskinen, skrivebordet og stolen er fysiske gjenstander og det er konsistent med min indre erfaring så langt at fysiske objekter ikke eksisterer. Jeg har derfor ifølge (+) og definisjonen av definitiv evidens ikke noen definitiv evidens for at jeg sitter foran noe skrivebord i min skrivebordsstol eller at det er en lampe plassert på dette skrivebord. Jeg har bare et inntrykk av dette, og jeg kan heller ikke virkelig se at disse saksfoholdene forligger for i så fall ville jeg vite at de forelå og derfor ha definitiv evidens for dem. Jeg har også bare et inntrykk, riktignok meget påtrengende, av at jeg ser en lampe foran meg sammen med en rekke andre gjenstander, en bordklokke, et krus med penner og noen sakser, en kaffekopp som står på en brikke. Videre kan jeg bare ha et inntrykk av at jeg ser furutrær utenfor mitt vindu og at naboens hus befinner seg et stykke unna. Det er helt konsistent med at jeg *ikke ve*t at jeg sitter ved et skrivebord og ikke vet at jeg skriver på et ark papir, at jeg tror at jeg vet alle disse tingene, at jeg ikke greier å la være å tro at jeg vet at alt dette er kjensgjerninger som ingen kan tvile på. Jeg kan føle så mye jeg vil at jeg er konfontert med en ytre fast virkelighet av fysiske objekter av alle mulige slag, men det kan ikke, om vi holder oss til de nevnte forutsetninger være tale om viten. Det kan kun være tale om en uhyre sterk overbevisning, som også gjøres sterkere ved at jeg tilsynelatende er omgitt av mennesker som deler denne overbevisning. Logisk sett kan imidlertid denne overbevisning være en ren illusjon og jeg kan aldri i løpet av mitt liv få noen sikker viten om at mitt liv ikke bare har vært en ren drøm, om enn en i alle henseende realistisk drøm om et virkelig liv fylt av glede og håp på den ene side, men også smerte frykt og lidelse på den annen side.

Likeledes forholder det seg med mine medmennesker. Gitt de forutsetninger som har blitt nevnt har jeg ingen definitiv evidens for at de skikkelse som opptrer i min indre erfaring og som jeg identifiserer som min kone, barn, barnebarn, samt venner, nære og fjerne bekjente, har et indre liv som meg selv. Det er helt konsistent, logisk sett, med den strøm av bevisshets-inntrykk jeg har hatt inntil det nuværende tidspunkt, at ingen av disse skikkelsene som jeg er overbevist om at er mennesker faktisk har noe indre liv. Jeg har defor ingen definitiv evidens for dette og av denne grunn vet jeg det heller ikke. Det er med andre ord ikke slik at jeg vet at de er følende vesener som meg selv uansett hvor overbevist jeg er om at de er det og har en klippefast tro på at så er tilfelle. Det hele forblir tro, subjektiv overbevisning og ikke noe som jeg har sikker viten om.

Siden det også er konsistent med den strøm av bevissthetsinntrykk som jeg opplever at de skikkelser jeg i denne strøm av bevissthetsinntrykk identifiserer som mine medmennesker faktisk er som meg selv og har en indre erfaring av samme type som meg selv følger det at det ikke er slik at jeg ved noe tidspunkt kan vite at det ikke er slik at de er mennesker med et indre sjelsliv.

Man ser altså at de forutsetningene som vi har nevnt ovenfor som i noen henseende har vesentlige likhetspunkter med grunntrekkende i den britiske empirisme, særlig representert ved Berkeley og Hume, leder til en vidtgående skeptisisme. Ikke bare kan vi intet vite om den ytre verdens eksistens, ei heller kan vi ha noen sikker viten om våre med-menneskers eksistens og deres velvære.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Det er imidlertid et siste punkt som bør understrekes når det gjelder det som følger fra de forutsetningene som vi har nevnt. Gitt (+) følger selvfølgelig at evidens og definitiv evidens faller sammen. Har en person evidens for en påstand har vedkommende også definitiv evidens for den og omvendt. Dette innebærer at om T er en generell vitenskapelig teori kan ingen person ved noe tidspunkt i noen mulig verden ha evidens for at denne teorien holder. Gitt hele den strøm av bevissthetsinntrykk som x har opplevd inntil tidspunktet t i verdenen w, ie. M;<-inf,t](x,w) , er det umulig at noen strengt generell teori T som også nødvendigvis må si noe om hva som skjer *etter* tidspunktet t kan følge fra dette utsagnet. Men da har vi ifølge (+) at det ikke er fornuftig å akseptere denne teorien T gitt at utsagnet M;<-inf,t](x,w) representerer alt som kan tas for gitt.

Men mer alvorlig enn dette er det følgende. Anta x er forfatteren av dette skrift og at t er det nuværende tidspunkt. Anta w er den aktuelle verden. Da vil M;<-inf,t](x,w) være utsagnet som beskriver den strøm av bevissthetsinntrykk som jeg har opplevt inntil det nuværende tidspunkt.Men i denne strøm av bevissthetsinntrykk har jeg iaktatt en nær sgt uendelig mengde av empiriske regelmessigheter. Jeg har iaktatt at en sten faller til jorden om jeg slipper den og forventer at det samme skal skje i fremtiden. Jeg har iaktatt utallige ganger at jeg kan skjøre et brød i skiver ved å bruke en vanlig brødkniv. Jeg har sett at dersom man vrir vannkranen på kjøkkenet vil vann strømme ut av den og iaktatt dette utallige ganger i fortiden. Tallløse ganger har man sett at et lynglimt etterfølges av torden og for eksempel at et flagg begynner og blafre når det blåser opp til frisk bris eller kuling. Man kan fortsette denne listen over regelmessigheter, men vi nøyer oss med disse eksemplene.[94]

Jeg har sett at disse regelmessighetene har holdt i fortiden og forventer at de også vil holde i fremtiden. Men ikke bare forventer de skal holde i fremtiden (under visse opplagte forutsetninger som vi ikke har spesifisert), men mener at jeg har et objektivt grunnlag for at det er fornuftig å akeptere at diss regelmessighetene vil fortsette å holde relativt til den indre erfaring jeg har hatt inntil dette tidspunkt. Hvis det ikke var slik ville min evne til å planlegge og handle bli fullstendig ruinert. Hvis det å tro på disse regelmessigheter ikke var så og si prototypen på fornuftighet ville jeg for eksempel ikke kunne planlegge å spise frokost. Jeg ville for eksempel ikke vite om jeg om en times tid kunne smøre smør på de brødskivene jeg tilbereder for måltidet, eller om brødet plutselig vil begynne å brenne om jeg begynte skjære skiver av det. Min tro på at jeg kunne gjøre dette vil savne ethvert rasjonelt grunnlag.

Men dette er nettopp hva som følger fra tesen (+) som vi formulerte ovenfor. For fra det faktum at en regelmessighet har vist seg å holde i fortiden kan man ikke logisk sett slutte at den vil holde i fremtiden. Hvis man derfor holder seg til (+) er det derfor helt galt å hevde at det er fornuftig å akseptere den påstand at brødet som jeg har i min brødboks ikke vil ekspldere om jeg skjærer i det relativt til det utsagn som beskriver min indre erfaring frem til det nuværende tidspunkt. Dette er åpenbart absurd.

Det er på tide å avslutte disse refleksjonen. Det vi har vist ovenfor er at dersom man utvider vår teori slik vi har beskrevet den i de tidligere delene av dette arbeid og utvider den med (+) som et nytt aksiom, følger det at vi intet kan vite om hvorvidt det finnes en ytre fysisk verden utenfor vårt sinn. Heller ikke kan vi vite om det finnes andre mennesker med en indre erfaring, strøm av bevissthetsinntrykk, følelser og erindringer på samme måte som en selv, og heller ikke kan man vite hvorvidt de regelsmessigheter vi iaktar og som utgjør grunnlaget for vår gjøren og laden vil fortsette å gjelde i fremtiden. Naturlig nok kan dette oppfattes som en

94 For flere eksempler, se Del IV, §5.4

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

reductio ad absurdum av den radikale akseptanseteorien (+) som bare anser at de utsagn som logisk sett følger fra et konsistent utsagn y er de utsagnene som det er fornuftig å akseptere relativt til y.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Avslutning og konklusjon

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Avslutning og konklusjon

Vi har i Del I - V av denne avhandlingen presentert en meget omfattende teori. Denne teorien har vi formulert eksplisitt som en predikatlogisk teori. Dette innebærer at vi har avgrenset presist de grunnleggende primitive predikatene i teorien, videre at vi har formulert eksplisitt og presist de grunnsetningene som inngår samt hvilke slutningsregler vi legger til grunn. Endelig er alle begreper som vi har benyttet i teorien og som ikke er blant de primitive predikatene blitt innført ved definisjoner.

Det er tre momenter som vi vil nevne før vi går videre. For det første er det viktig å merke seg at alle formlene og setningene i språket til vår teori utelukkende inneholder norske ord bortsett fra variabeltegnene og parantestegnene. De primitive predikatene i teorien, for eksempel "x er en mengde" og "x er et element i mengden y", har derfor på forhånd mening og de grunnsetningene som vi har formulert er setninger som vi, etter omhyggelig refleksjon, finner at må være sanne i kraft av betydningen til de primitive predikatene som inngår i dem. Dette innebærer at den teorien vi har fremsatt ikke kan oppfattes som et uintepretert formalt system som ikke har noe som helst med virkeligheten å gjøre. Det dreier seg ikke om noen rent formell kalkyle.

For det andre bør det understrekes at vi har gitt en helt eksplisitt formulering av vår teori. Dette innebærer at enhver kan skaffe seg en fullstendig oversikt og lage en fullstendig liste over hvilke primitive predikater som inngår i teorien. I sin tur impliserer dette at enhver kan diskutere hvorvidt disse predikatene er meningsfulle eller ikke. Videre innebærer det at enhver kan skaffe seg en fullstendig oversikt over de grunnsetningene som inngår i teorien og dermed kritisere enhver grunnsetning som vedkommende ikke finner plausibel. Hvis denne personen finner noen av grunnsetningene feilaktige vil det da være lett å se hvilke av de teoremene som har blitt utledet som er basert på disse angivelig feilaktige aksiomene. En eksplisitt og klar fremstilling vil med andre ord gjøre det lettere å se hvor eventuelle feil ligger og hvordan man eventuelt kan fjerne dem.

For det tredje bør følgende nevnes. Som man ser har vi innført en rekke symboler, de vanlige for de setningslogiske konstruksjonene og kvantorene, andre for de primitive predikatene som inngår i vår teori. Disse symbolene innføres som forkortelser for lengere konstruksjoner i norsk. Ser man for eksempel på formelen "$\alpha \rightarrow \beta$" brukes denne som en forkortelse for konstruksjonen "Hvis det er slik at α så er det slik at β". Den siste konstruksjonen er adskillig lengere enn den første. Det er naturligvis flere grunner til at man innfører forkortelser av denne typen i logiske og matematiske skrifter. En grunn er at setninger med en temmelig innviklet logisk struktur da kan fremstilles på en meget oversiktlig måte. En annen grunn er at uten disse blir det mye vanskeligere å gjennomføre lange og innviklede beviskjeder og dele dem opp slik at man har full oversikt over alle ledd. Bevisene ville bli mye lengere om de skulle formuleres i rent hverdagsspråk og den rene skjære lengden

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

ville gjøre det langt vanskeligere å kontrollere riktigheten av deduksjonene. Hvis alt i matematikken og logikken skulle formuleres i vanlig hverdagsspråk, og man bare skulle få lov til å benytte variabeltegn og paranteser som de eneste tekniske hjelpemidler, ville man neppe ha kommet særlig langt i disse to vitenskapelige disipliner som man faktisk har kommet i dag. La oss legge til noen mindre vesentlige bemerkninger. En person som leser igjennom det vi har skrevet vil naturligvis se at den inneholder ganske mange tekniske symboler, videre at grunnsetningene i teorien er formulert ved hjelp av disse symboler, og at det samme gjelder de grunnleggende slutningsreglene, samt de definisjoner som gis. Det kan heller ikke unngå en lesers oppmerksomhet at vi formulerer teoremer, korollarer og hjelpesetninger og ledsager disse i de fleste tilfelle med detaljerte bevis. Det er derfor berettiget å si at vår fremstillingsmetode i denne avhandlingen i prinsippet har vært den samme som den man finner i enhver matematisk og logisk forskningsartikkel. Noen vil fra dette trekke den slutning at dette arbeidet nettopp av denne grunn ikke kan sies å være filosofi. Dette er imidlertid en feilslutning. Fra det at vi har brukt rent predikatlogiske og mengdeteoretiske prinsipper og slutningsregler for utlede setninger fra våre grunnsetninger følger det ikke at disse grunnsetningene nødvendigvis er av en rent predikatlogisk, mengdeteoretisk eller matematisk natur. En nærmere inspeksjon av disse grunnsetningene, for eksempel dem som dreier seg om utsagn, finstrukturerte utsagn og egenskaper, viser at det nettopp ikke dreier seg om setninger som vanligvis brukes i rent metalogiske, bevisteoretiske og matematisk-logiske undersøkelser. Snarere dreier det seg om påstander av rent filosofisk natur. Ingen matematiker eller fysiker har oss bekjent noensinne fremsatt eksplisitt den påstand at det finnes logisk mulige verdener, at disse kan sammenfattes i en mengde og at denne mengden er minst tellbart uendelig. Dette må regnes som en typisk metafysisk påstand av ontologisk art som matematikere og fysikere av prinsipielle grunner ikke beskjefiger seg med, fordi denne og utallige andre lignende påstander er irrelevante og ikke bringer en noe nærmere løsningen på de problemer som opptar dem. For en filosof derimot kan det være av interesse å studere nøyere hva som egentlig følger fra en slik påstand. Enda tydligere blir dette om man ser på de grunnsetningene vi introduserer i Del II som dreier seg om viten, tro, iaktagelse og meddelelse. Disse grunnsetningene, det dreier seg om P1, T1- T3 samt E1 - E17, C1 C2, har neppe noen stor interesse for fysiskere, kjemikere, biologer, matematikere eller personer som steller med matematisk logikk. Like lite synes setninger av denne art de facto å spille noen særlig rolle for personer som steller med psykologi, sosiologi, statsvitenskap og andre samfunnsvitenskapelige disipliner. Derimot synes disse setningene, og det å utvikle konsekvensene av dem innenfor den rammen vi har satt opp, å ha stor interesse for en som er interessert i en mer dyptgående innsikt i kunnskapsbegrepet og dets relasjon til andre begreper som begrepene 'tro', 'iaktagelse', 'observasjon', 'sanseiaktagelse' og 'meddelelse". Men en slik, i vid forstand, begepsanalytisk virksomhet synes nettopp å være en filosofisk preget oppgave. Faktisk synes det vanskelig å tenke seg at filosofer kan drive på med noe annet om de kun sitter ved skrivebordet og ikke har noe annet verktøy til rådighet en sin egen evne til rasjonell og kritisk tenkning.

Det samme inntrykk får man når man studerer Del IV hvor vi gir en fremstilling av vår teori om hva det er fornuftig å akseptere og hvilken sannsynlighet som kan tilskrives utsagn relativt til andre utsagn gitt at de siste representerer all tilgjengelig evidens. De grunnsetningene vi fremsetter her, som for eksempel den at enkelhetsrelasjonen er en preordning over mengden av mulige verdener, eller den grunnsetning at det er fornuftig å akseptere et utsagn x relativt til et annet utsagn y hvis og bare hvis de enkleste verdenene i

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

sannhetsmengden til y er inkludert i sannhetsmengden til x og det finnes visse enkleste verdener i sannhetsmengden til y, er åpenbart påstander som primært vil være av interesse for en filosof. De kan ikke regnes som byggestener i noen av de vitenskapelige disipliner som nå regnes for å være veletablerte.

Går man nå videre og ser på de grunnsetningene vi vi preseenterer i Del V ser man at disse grunnsetningene i like stor grad som dem som ble nevnt i Del IV er av en filosofisk karakter. Dette virker ganske åpenbart. Fra disse grunnsetningene følger det at dersom en strøm av bevissthetsinntrykk fremtrer for en person i et gitt tidsintervall kan ikke denne strøm fremtre for noen annen person i dette eller noe annet tidsintervall. Det følger også dersom en person opplever ett bevissthetsinntrykk i en gitt tidsperiode kan ikke vedkommende ha det samme inntrykk i en senere eller tidligere tidsperiode. Med andre ord er sanseinntrykk, forestillingsbilder, erindringsbilder etc. strengt private entiteter som ikke kan deles av to forskjellige personer. Det samme gjelder de andre grunnsetningene som vi har fremsatt om insidens-relasjonen, f. eks. at denne er en ekvivalensrelasjon og den grunnsetning at dersom to verdener w, w' er insidente ved tidspunktet t og y er et momentant bevissthetsinntrykk som fremtrer for x ved tidspunktet t i verdenen w så vil også y fremtre for x ved tidspunktet t også i verdenen w. Ikke bare synes disse setningene å være av filosofisk natur, men de gir også opphav til en lang rekke spørsmål av mer eller mindre spekulativ karakter som ikke kan besvares ved utelukkende å ta sitt utgangspunkt i gjengse vitenskapelige teorier som regnes som veletablerte. Vi konkluderer derfor med at vårt arbeid, til tross sin formalistiske karakter i bunn og grunn er et filosofisk arbeid.

Den teorien vi har presentert i dette arbeid er formelt sett hva man kaller en predikatlogisk med identitet. Den er formulert i et første ordens språk. Vi har angitt de ikke-logiske predikatene som inngår i teorien helt eksplisitt, videre har vi angitt alle grunnsetningene slik at man kan lage en fullstendig liste over dem, og endelig har vi angitt slutningsreglene som i vår teori er modus ponens og universell generalisering. Alle andre termer og uttrykk som brukes i tilknytning til teorien er innført ved definisjoner på en helt eksplisitt måte. Vi har valgt å bruke denne fremstillingsform i mesteparten av våre arbeider, inkludert det foreliggende arbeid, fordi det gjør det lett for enhver opponent, enhver kritiker, å argumentere mot teorien. Man kan for eksempel stille spørsmålstegn ved de primitive predikatene i teorien, man kan kritisere og argumentere mot grunnsetningene, og man kan ta for seg enhver definisjon som gis og stille spørsmål om den er misvisende eller inadekvat.

Nå har vi allerede under fremstillingen av vår teori delvis drøftet og vurdert grunnsetningene etterhvert som vi har presentert dem. Når det gjelder de rent mengdeteoretiske aksiomene er dette i hovetrekkene et standard aksiomsett for Zermelo-Fraenkel systemet utvidet med utvalgsaksiomet. Det er vår oppfatning at det skal mye til av gode argumenter for å rive dette systemet overende. Det finnes naturligvis alternative systemer - noen som åpenbart strider mot våre vanlige intuisjoner om mengder, for eksempel systemene NF og ML fremsatt av Quine - andre som beholder hovedstrukturen I ZFC, men som legger til det som kalles ultimate mengder eller klasser. Det er imidlertid vanskelig å hvorfor disse systemene skulle være noe rimeliger, sikrere eller bedre enn den versjonen av ZFC vi fremlegger her.

Når det gjelder grunnsetningene vi har fremsatt om utsagn, mulige verdener, egenskaper og det vi i denne avhandlingen konsekvent har kalt for finstrukturerte utsagn, er det vår mening at disse grunnsetningene fremstår som tvingende og uavviselige dersom amn

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

aksepterer at predikatene "x er en mulig verden", "x er et utsagn", "x er en egenskap av grad y" osv. gir mening. Det er videre vår oppfatning at disse predikatene gir mening om konstruksjonen "Det er logisk nødvendig at - " kan oppfattes som klar og meningsfull. Vi er ytterligere av den oppfatning at dersom denne konstruksjonen gir mening kan man angi et tilfredstillende identitetskriterium for alle de utsagn som uttrykkes av deklarative setninger. For er x og y to slike utsagn og S og S' to deklarative setninger, der vi har at S er den setningen som uttrykker utsagnet x og S' er den setningen som uttrykker utsagnet y, så vil utsagnet x være identisk med utsagnet y hvis og bare hvis den setningen som fremkommer når man setter inn bikondisjonalen av S og S' for "-" i uttrykket "Det er logisk nødvendig at - " faktisk er en sann setning.

Nåvel. Det er ganske drøyt å hevde at uttrykket "Det er logisk nødvendig at - " ikke gir mening. Hovedgrunnen er at man kan gi nær sagt talløse eksempler på setninger som er nødvendig sanne og at man har like klare intuisjoner om bruken av dette uttrykk som vi har for ethvert annet hverdagsspråkelig uttrykk som er uunnværlig i normal tale.

Hvis man nå hevder at et predikat er vitenskapelig meningsfullt hvis og bare hvis det kan defineres ved hjelp av termer hentet fra logikken, matematikken samt fysikken og kjemien må det medgis at det virker tvilsom om konstruksjonen "Det er logisk nødvendig at -" gir mening i denne forstand. Men heller ikke synes noen av de andre predikatene som inngår i vår teori, bortsett fra de mengdeteoretiske predikatene og identitetspredikatet, å være vitenskapelig meningsfulle om dette kriterium legges til grunn. Dette virker mildt sagt eiendommelig. Dette synes snarere og tale mot det forslåtte kriterium enn til fordel for det. Man kan også spørre om de termer som inngår i kriteriet, for eksempel uttrykket "term hentet fra fysikken" kan defineres utelukkende ved hjelp av termer hentet fra logikken, matematikken samt fysikken og kjemien. Det er ingen *opplagt* sak at dette er tilfelle. Hvis dette ikke er tilfelle og man holder fast ved kriteriet må man innrømme at det definerer uttrykket "vitenskapelig mengsfullt predikat" ved hjelp av termer som ifølge kriteriet selv ikke er vitenskapelig meningsfulle. Det virker derfor som om en tilhenger av kriteriet står i fare for å motsi seg selv.

Vi har så langt drøftet de mengdeteoretiske, utsagnsteoretiske og egenskapsteoretiske grunnsetningene i vår teori og sagt noen ord om meningsfullheten til de primitive predikatene vi har brukt for å formulere dem. Vi har funnet at disse grunnsetningene er tvingende og nødvendige om de primitive predikatene tillegges sin normale betydning, og vi har funnet at disse primitive predikatene er like meningsfulle som et hvilket som helst annet sett av termer som brukes i en hvilken som helst vitenskapelig disiplin.

Hvis vi nå betrakter de nye primitive predikatene som innføres i Del II, og som brukes i de grunnsetningene som vi formulerer i denne delen, synes det rimelig å si at også disse bør aksepteres som meningsfulle om man aksepterer de grunnleggende predikatene i Del I som meningsfulle. Videre virker også de grunnsetningene som vi der formulerer om viten, tro sanseiaktagelse, hukommelse, meddelelse osv. sanne og tvingende nettopp i kraft av betydningen til disse primitive predikatene.

På tilsvarende vis forholder det seg med de nye primitive predikatene vi innfører i Del IV som har med enkelhet og sannsynlighet å gjøre, nemlig "w er en verden som har minst like stor grad av enkelhet, koherens og harmoni som verdenen w'" og " z er sannsynligheten

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

til utsagnet x relativt til utsagnet y". Også disse predikatene virker helt meningsfulle. Den definisjonen vi gir av "Det er fornuftig å akseptere utsagnet x relativt til utsagnet y" synes også å være adekvat og det virker dessuten som om de grunnsetningene vi fremsetter i denne delen har et tankenødvendig og uavviselig preg. I det minste har vi argumentert for dette.

Det samme gjelder de hovedpredikatene som vi innfører i Del V: "y er et momentant bevissthetsinntrykk som fremtrer for x ved tidspunktet t i verdenen w", "y er et momentant totalt synsinntrykk som fremtrer for x ved tidspunktet t i verdenen w" og " w er en verden som er insident med verdenen w' ved tidspunktet t". Aksepterer man eksistensen av mulige verdener, utsagn etc. synes det vanskelig å se at man har noen gode grunner for å forkaste disse predikatene som meningsløse. Snarere er de uunnværlige i enhver seriøs analyse av kunnskapsbegrepet. Ved hjelp av disse begrepene kan man så definere det vi kaller for den totale strøm av bevisthetsinntrykk som fremtrer for individet x i verdenen w over tidsintervallet I, eller det vi også, alternativt, kaller for *den indre erfaring til individet x i verdenen w over tidsintervallet I*. Hvis de primitive predikatene vi innfører i denne delen gir mening må også de definisjonene vi gir, og som bare inneholder disse predikatene ved siden av logiske og mengdeteoretiske uttrykk, også gi mening. Det samme gjelder de definisjonene av evidens og definitiv evidens som vi fremlegger, og undersøker konsekvense av, i denne delen av vårt arbeid. Fremfor alt må de grunnleggendde aksiomene vi formulerer angående de tre predikatene vi nevnte rett ovenfor også gi mening, og det virker rimelig å tro at en leser som betrakter dem og tenker grundig igjennom dem vil finne at de er rimelig og at de har et apodiktisk preg.

Vi har ovenfor fastslått vårt arbeids systematiske og klart filosofiske karakter. Det har også blitt påpekt at den teori vi har fremlagt er formulert eksplisitt som en førsteordens teori og at dette gjør det lett å få oversikt over grunnsetningene i teorien og at det også gjør det lettere å kontrollere riktigheten til de satser vi utleder. Intet av dette gir en imidlertid noe klart bilde av hva vi har oppnådd i dette arbeid. La oss derfor oppsummere de vikigste punktene:

(i) Vi har vist at det er nødvendig å skille mellom det vi har kalt finstrukturerte utsagn og det vi har kalt utsagn - presise deskriptive utsagn - om man er interessert i å bygge opp en tilfredstillende teori om viten og mer generelt om det vi i Del III har kalt de epistemiske relasjonene. Dette er også viktig for å kunne gi en tilfredstillende analyse av alle de konstruksjoner som vi i Del I kalte for intensjonale konstruksjoner. Blandt disse har vi ikke bare epistemisk relevante konstruksjoner som blant annet "x vet at - ", "x tror at -" , men også slike konstruksjoner som "x frykter at - ", "x er bekymret for at - ", " x ønsker at -" og mange, mange andre, som er helt nødvendige for å kunne beskrive og forstå hvorfor mennesket handler og tenker som de gjør. I tilegg til dette har vi vist en rekke satser som klarlegger forholdet mellom de finstrukturerte utsagn og utsagn.

(ii) Vi har vist at det er mulig å formulere en realistisk teori om erkjennelse som nettopp ikke impliserer at dersom en person vet noe så vet vedkommende også alle logiske konsekvenser av det han vet. Vi har også temmelig detaljert illustrert hva som kan utledes av satser om tro og viten i denne teori i Del II. Dessuten har vi Del III omhyggelig studert egenskapene til den intensjonale konstruksjonen "Det at α er en logisk konskekvens av alt det x vet" og en lang rekke beslektede konstruksjoner. I tillegg til dette har vi i denne delen

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

omhyggelig definert hva som menes med at en persons kunnskapsfelt (og trosfelt) er *rasjonelt organisert* og vist i detalj hva som hva som følger om man antar at en persons kunnskapsfelt har denne egenskapen. I denne forbindelse har vi definert presist hva vi mener med en K-funksjon og hva som forstås ved en betinget modalstruktur og utviklet en generell teori om disse to strukturene.

(iii) Vi har i Del I definert hva vi forstår med en begrepsramme og hva som menes med formlene assosiert med en slik begrepsramme. Videre har vi forklart hva vi mener med en intepretasjonsfunksjon assosiert med en begrepsramme og hva som menes med en utvidet begrepsramme. Endelig har vi definert hva som menes med at en utvidet begrepsramme representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn og hva som menes med at en formel assosiert med en slik begrepsramme er gyldig. I tillegg til dette har vi detaljert vist hvilken rolle begrepsrammer spiller i vår teori om tro og viten og forøvrig de andre epistemiske relasjonene vi behandler i Del III.

(iv) I Del II viste vi endel satser i vår teori som vi kalte epistemologiens fundamentalsatser. Hovedinnholdet i disse satser kan populært uttrykkes ved å si at enhver påstand som logisk sett kan bevises også under passende forutsetninger kan erkjennes. Vi viste også i denne delen av vårt arbeid hvordan disse satser kan brukes til å begrunne det som populært kalles den hypotetisk deduktiv metode.

(v) Vi har presentert og bygd opp en teori om hva det er fornuftig å akseptere relativt til en gitt evidens. Videre har vi argumentert for at en induktiv slutning er akseptabel om det er fornuftig å akseptere konklusjonen i slutningen gitt at premissene representerer all den evidens man har. Ved hjelp av denne definisjonen og vår teori om akseptanserelasjonen kan man utlede en lang rekke satser om akseptable induktive slutninger. Det følger at vi har vist at det finnes noe med all mulig rimelighet kan kalles for induktiv logikk.

(vi) I Del IV av dette arbeid har vi ikke bare fremsatt en teori om akseptanse og induktive slutninger men vi har også presentert en teori om sannsynlighet, dvs. en teori om relasjonen z er et reelt taall som angir sannsynligheten for at utsagnet x er riktig gitt at utsagnet y representerer all det som kan tas for gitt. Vi har formulert denne teori i detalj og med den rigorøsitet og stringens som har vært normen i dette arbeid, såvel som i våre øvrige arbeider. Vi har også vist hvordan denne teorien om sannsynlighet henger sammen med vår teori om akseptanserelasjonen. En av de mest påfallende grunnsetningene blandt dem som forbinder akseptanserelasjonen og sannynlighet er den som sier at dersom utsagnet y utgjør det vi har kalt for en sannsynlighetsbasis og x er et utsagn som det er fornuftig å akseptere relativt til y så må sannsynligheten for at utsagnet x er sant relativt til y være 1.

(vii) I forbindelse med vår teori om akseptanse og sannsynlighet definerte vi også to viktige, rent mengdeteoretiske, strukturer nemlig det vi kalte for relative sannsynlighetsstrukturer og den typen strukturer vi kalte preordningsstrukturer med assosierte sannsynlighetsrom. Vi har vist i detalj hvordan disse to strukturene er relatert til hverandre og dessuten vist hvordan resultatene om disse to strukturklassene kan brukes til å formulere en alternativ, ekvivalent aksiomatisering av den teorien vi har fremlagt om akseptanse og sannsynlighet.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(viii) Vi har formulert en teori om den totale strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for en person i løpet av en viss tidsperiode. Det er hovedsakelig to grunnbegreper i denne teorien som de andre begrepene vi introduserer defineres ved hjelp av. Det første begrepet er det som uttrykkes av predikatet "w er enlogisk mulig verden som er insident med verdenen w' ved tidspunktet t" . Det andre begrepet uttrykkes av predikatet "y er et momentant bevissthetsinntrykk som fremtrer for personen x ved tidspunktet t i verdenen w". Ved hjelp av disse to begrepene har vi definert presist hva vi forstår med den totale strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for x i verdenen w opptil og inkludert tidspunktet t, og hva som menes med det utsagnet som beskriver den totale strøm av bevissthetsinntrykk som fremtrer for x i verdenen w over mengden av tidspunkter X. Dette utsagnet betegner vi med M;X(x,w). Vi viser hvordan teorien om bevissthetsinntrykk kan utvikles og utleder en rekke satser gjelder for funksjonen M.

(ix) Vi har vist hvordan man kan definere predikatene "Individet x har ved tidspunktet t i verdenen w evidens for at utsagnet y er sant" og "Individet x har ved tidspunktet t i verdenen w *definitiv* evidens for at utsagnet y er sant". Dette gjøres ved hjelp av akseptanserelasjonen og de begrepene vi innførte i teorien om insidens og bevissthetsinntrykk. Vi har videre fremsatt den teori at viten impliserer at man har evidens og definitiv evidens for det man vet. Videre har vi drøftet den tese at dersom man har definitiv evidens for en påstand så er denne påstand sann. Endelig har vi drøftet den påstand at dersom man vet at noe a er tilfelle så har man definitiv evidens for at man vet at a er tilfelle.

(x) I den siste delen av Del V har vi definert to utsagnsfunksjoner. For det første har vi den funksjonen som til ethvert utsagn y tilordner dette det utsagnet som sier at x ved tidspunktet t har evidens for utsagnet y. For det andre har vi den funksjonen som til ethvert utsagn y tilordner dette det utsagnet som sier at x ved tidspunktet t har *definitiv* evidens for utsagnet y. Vi kan kalle disse to funksjonene for evidens-funksjonen og definitiv-evidens-funksjonen. Vi har vist at disse to funksjonene oppfyller kravene til å være det vi kaller, og definerer presist, en svak KD-funksjon og en svak T-funksjon og gir et bevis for dette. Vi har videre utviklet teoriene om svake KD-funksjoner og svake T-funksjoner og vist en rekke teoremer om dem. Dette er teoremer som er analoge med de elementær-teoremene og iterasjonsteoremene vi viste om det vi kalte K-funksjoner og betingede modalstrukturer i Del III. Siden teoremene om svake KD-funksjoner og svake T-funksjoner er helt generelle gjelder de også for de "evidens"-funksjonene vi nevnte ovenfor. Vi har derfor vist at det finnes en forholdsvis rik logisk teori om nettopp disse funksjonene.

Vi har nå kommet til slutten av vårt arbeid. Vi har i denne avsluttende del kommentert vår teori, vist at det dreier seg om en i høyeste grad filosofisk relevant tankebygning, vist hvordan dens eksplisitte og systematiske natur gjør det lett for en potensiell kritiker å vurdere den og endelig har vi forsøkt å sammenfatte så konsist som mulig de resultatene vi har kommet frem til.

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Referanser

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Referanser

Carnap [1]	Carnap, Rudolf, *Logical Foundations of Probability*, The University of Chicago Press, Chicago, Illinois, second edition 1962
Hansson[1]	Hansson, Bengt , "Choice structures and preference relations", Synthese,Vol 18, 1968, pp 443-458
Hansson[2]	Hansson, Bengt , "Fundamental axioms for preference relations", Synthese, Vol 18, 1968, pp 423-442
Hansson[3]	Hansson, Bengt , "An Analysis of Some Deontic Logics", Noûs, Vol III, no 4, 1969, pp 373-398
Popper [1]	Popper, Karl R., *Objective Knowledge,* Oxford Clarendon Press, Oxford, 1971
Popper [2]	Popper, Karl R., *The Logic of Scientific Discovery*, Harper & Row, Harper Torchbooks, second edition, New York,1968
Rognes [1]	Rognes, Morten Harboe, *En oversikt over definisjoner av sentrale begreper i den klassiske predikatlogikk og mengdelære*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [2]	Rognes, Morten Harboe, *En teori om presise deskriptive utsagn*, Maskinskrevet manuskript, 1985
Rognes [3]	Rognes, Morten Harboe, *En del grunnleggende begreper og setninger i teorien om presise deskriptive utsagn*, Maskinskrevet manuskript, 1987
Rognes [4]	Rognes, Morten Harboe. *Egenskaper. Del I.* Upublisert manuskript, 1986
Rognes [5]	Rognes, Morten Harboe. *Egenskaper. Del II (Bevis for teoremer)* , Upublisert manuskript, 1987
Rognes [6]	Rognes, Morten Harboe. *Aksepterbarhet og troverdighetsgrad* , Upublisert manuskript, 2013
Rognes [7]	Rognes, Morten Harboe. *Et notat om preordninger og akseptanserelasjoner* , Upublisert manuskript, 2016
Rognes [8]	Rognes, Morten Harboe. *Om de forkunnskaper som trengs for å lese mine arbeider,* Upublisert manuskript, 2009
Rognes [9]	Rognes, Morten Harboe. *Om notasjonen som benyttes i mine arbeider,* Upublisert manuskript, 2008
Shoenfield [1]	Shoenfield, Joseph. *Mathematical Logic*. London. Addison-Wesley Publishing Company. 1967
Takeuti [1]	Takeuti, Gaisi and Zaring, W.M, *Introduction to Axiomatic Set Theory*, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1971
von Wright [1]	von Wright, Georg Henrik , "The paradoxes of confirmation", Theoria, Vol 3, 1965, pp 255 - 274
von Wright [2]	von Wright, Georg Henrik , *The Logical Problem of Induction*, Oxford, 1941
Wittgenstein [1]	Wittgenstein, Ludwig, *Tractatus logico-philosophicus*, Surkamp,1963

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

APPENDIX I

Noen teoremer om trosrelasjonen

Innenfor rammen av den ganske svake kunnskapsteorien vi har aksiomatisert, formalisert og beskrevet er det mulig å definere den følgende utsagnsfunksjon indeksert på PxT. Definisjonen er denne:

Definisjon 1:
Tror*;(x,t)(α) = μ;-1(Mg(w: αêU & (Ez)(zêU;f & μ(α)=μ;f(z) & Tror;(w,t)(x,z))))

Vi finner det hensiktsmessig å fremsette noen forklarende bemerkninger i forbindelse med denne defisnisjonen. Man kan først betrakte uttrykket:

(1) αêU & (Ez)(zêU;f & μ(α)=μ;f(z) & Tror;(w,t)(x,z))

som er en del av definiens. Man ser at denne åpne setningen sier at α er et utsagn som har samme sannhetsmengde som et finstrukturert utsagn som individet x tror beskriver et faktisk foreliggende forhold ved tidspunktet t i den mulige verden w. Vi betrakter så mengden av alle mulige verdener som oppfyller kravet (1). Dette vil selvfølgelig være mengden:

Mg(w: αêU & (Ez)(zêU;f & μ(α)=μ;f(z) & Tror;(w,t)(x,z)))

Siden denne mengden er en mengde med mulige verdener er den sannhetsmengden til et entydig bestemt utsagn u straks man har valgt ut α,x og t. Det er følgelig dette utsagnet som vi betegner med "Tror*;(x,t)(α)". Man kan lese dette uttrykket "Tror*;(x,t)(α)" slik "utsagnet som sier at α er et utsagn som er ekvivalent med et finstrukturert utsagn som x ved tidspunktet t tror er sant".

Vi innførte predikatet "Tror;(w,t)(x,y)", som er et primitivt predikat i kunnskapsteorien. Vi definerer relasjonen Tror ved Tror = Mg(<x,y,t,w>:Tror;(w,t)(x,y)). Denne relasjonen Tror er en relasjon som er inkludert i Px(U;f)xTxI der U;f selvfølgelig er mengden av finstrukturerte utsagn. Vi kan imidlertid (noe som ble implisitt antydet ovenfor) også innføre en korresponderende relasjon mellom personer, utsagn, tidspunkter og mulige verdener ved den følgende definisjon:

Definisjon 2:
Tror+;(w,t)(x,y) ↔ yêU & (Ez)(zêU;f & μ(y)=μ;f(z) & Tror;(w,t)(x,z))

Fra de to definisjonene vi nå har gitt følger åpenbart den følgende sats:

Teorem 1: Anta αêU. Da gjelder:

(a) Tror*;(x,t)(α) = μ;-1(Mg(w: Tror+;(w,t)(x,α)
(b) w ⊨ Tror*;(x,t)(α) ↔ Tror+;(w,t)(x,α)
(c) w ⊨ Tror*;(x,t)(α) → xêP & têT & wêI & αêU
(d) Tror**(w,t)(x,α) → xêP & têT & wêI & αêU

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

La oss før vi går videre minne om noen begrepsdannelser som vi forsåvidt har nevnt og definert tidligere: Vi sier at et utsagn x impliserer et utsagn y hvis og bare hvis sannetsmengden til utsagnet x er inkludert i sannhetsmengden til utsagnet y. Vi bruker "LK(y,x)" som forkortelse for det lengere uttrykket "utsagnet y er en logisk konsekvens av utsagnet x" som i sin tur brukes synonymt med uttrykket "utsagnet x impliserer utsagnet y". I tillegg til dette minner vi om at vi definerer operasjonen => slik:

Definisjon 3: Anta x,yêU. Da setter vi:
x=>y = μ;-1(Mg(w:wêI & (wêμ(x) → wêμ(y))))

Fra en logisk, såvel som en filosofisk, synsvinkel er det et interessant spørsmål om det er slik at en person som tror noe er tilfelle også tror at han tror dette er tilfelle. I den teorien vi tidligere har definert er dette implisert av grunnsetningen E14. Siden denne omfatter med en bare tro finner vi det hensiktsmessig å trekke ut den delen som har med tro å gjøre for separat betraktning. Vi betrakter derfor følgende tese:

(I) I enhver standard utvidet begrepsramme <B,ξ> som representerer en del mengde av de finstrukturerte utsagn gjelder:
⊨;B Tror_;(x,t)(α) → Tror_;(x,t)(Tror;(x,t)(α))

Som man ser uttrykker formelen Tror_;(x,t)(α) → Tror_;(x,t)(Tror;(x,t)(α)) at dersom x ved tidspunktet t tror at α er tilfelle så er det også slik ved tidspunktet t at x tror at han tror at α.

Hensikten med dette avsnittet er nå å undersøke hvordan denne påstanden er relatert til endel andre påstander som synes å være nært beslektet med den.

Det er fire slike påstander som vi vil betrakte. Den første er denne: Er y et utsagn som x tror ved tidspunktet t i verdenen w finnes det alltid et finstrukturert utsagn z som x tror ved t i verdenen w og hvor sannhetsmengden til z er mengden av alle de verdener w' hvor man har at w' er en verden hvor x ved tidspunktet t tror det finstrukturerte utsagn y. Denne tesen kan formaliseres slik:

(II) Tror;(w,t)(x,y) → (Ez)(zêU;f & Tror;(w,t)(x,z) & μ;f(z) = Mg(w': Tror(w',t)(x,y)))

Den andre tesen er denne, som har en åpenbar formell analogi med (I) ovenfor:

(III) yêU → ⊨ Tror*;(x,t)(y) => Tror*;(x,t)(Tror*;(x,t)(y))

Vi minner i forbindelse med (III) om at uttrykket "Tror*;(x,t)(y) => Tror*;(x,t)(Tror*;(x,t)(y))" betegner et utsagn dersom y er et utsagn. Videre minner vi om at " ⊨ y" betyr at utsagnet y er sant i enhver logisk mulig verden. Som man husker er uttrykket " ⊨y" per definisjon synonymt med " μ(y) = I"

Vi skal også introdusere en fjerde tese. Denne sier at dersom y er et finstrukturert utsagn som x tror ved tidspunktet t i verdenen w og z er et finstrukturert utsagn med samme sannhetsmengde som y så er det også slik at z er et utsagn som x tror ved tidspunktet t i verdenen w. Denne påstanden kan uttrykkes slik:

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(IV) Tror;(w,t)(x,y) & zêU;f & μ;f(y) = μ;f(z) → Tror;(w,t)(x,z)

(IV) er en naturligvis en meget sterk påstand som står i strid med de overveielser som ledet oss til å formulere den kunnskapsteorien vi formulerte tidligere. Det er ikke spesielt vanskelig å se at dersom (IV) holder og <B,ξ> er en standard utvidet begrepsramme gjelder for eksempel at ⊨;B Nec_(α↔β) →.Tror_;(x,t)(α) ↔ Tror_;(x,t)(β) og derfor at ⊨;B α↔β impliserer ⊨;B Tror_;(x,t)(α) ↔ Tror_;(xt)(β).

Det burde være klart at vi ikke nevner (IV) fordi vi finner påstanden plausibel, men fordi det er svært nærliggende å trekke den inn når man skal undersøke forholdet mellom tesene (I) - (III).

Vi skal først se på forholdet mellom (II) og (III). Man kunne kanskje tro at (II) og (III) var ekvivalente. Det viser seg imidlertid at man bare kan vise dette om man forutsetter (IV). Dette er hva det følgende teorem sier:

Teorem 2: Man har:
(IV) →. (II) ↔ (III)

Bevis: **(A)**. Vi skal først vise at (IV) og (III) impliserer (II). Anta derfor:
(1) (Ay)(yêU → ⊨ Tror*;(x,t)(y) => Tror*;(x,t)(Tror*;(x,t)(y))) og
(2) (Ay)(Az)(Tror;(w,t)(x,y) & zêU;f & μ;f(z)=μ;f(y). → Tror;(w,t)(x,z))
Vi ønsker å vise at (II) holder. Anta derfor for vilkårlig y at (3) Tror;(w,t)(x,y). Det følger da at yêU;f . Det følger da at μ;f(y)êPt(I) og derfor i kraft av aksiomene for presise deskriptive utsagn at det finnes α der (3.1) αêU & μ(α)=μ;f(y) & Tror;(w,t)(x,y). Fra dette og definsjonen av "Tror*;(x,t)(α)" kan man slutte (4) w ⊨ Tror*;(x,t)(α). Siden αêU følger fra (4) og (1) at (5) w ⊨ Tror*;(x,t)(Tror*;(x,t)(α)). Men fra dette og definisjonen av "Tr", Definisjon 1, kan man slutte:
(6) (Ez)(zêU;f & μ(Tror*;(x,t)(α))=μ;f(z) & Tror;(w,t)(x,z))
Med andre ord må det finnes z0 slik at
(7.1) z0êU;f
(7.2) μ(Tror*;(x,t)(α))=μ;f(z0) & Tror;(w,t)(x,z0)
For å vise at (II) holder vil det være tilstrekkelig å vise:
(+) μ(Tror*;(x,t)(α)) = Mg(w': Tror;(w',t)(x,y))
Fra dette, (7.1) og (7.2) følger konsekventen i tese (II)
Nå har man ved hjelp av Definisjon 1:
(8) w'êμ(Tror*;(x,t)(α)) ↔ (Ez)(zêU;f & μ(α)=μ;f(z) & Tror;(w',t)(x,z))
Fra (3.1) følger μ;f(y)=μ(α). Fra dette og høyre side i (8) kan man slutte, siden det er åpenbart fra (3) at yêU;f : (Ez)(zêU;f & μ;f(y)=μ;f(z) & Tror;(w',t)(x,z)). Men fra dette og (IV) følger: Tror;(w',t)(x,y). Vi har derfor vist:
(9) w'êμ(Tror*;(x,t)(α)) → Tror;(w',t)(x,y)
Anta på den annen side at Tror;(w',t)(x,y). Fra (3.1) følger μ(α)=μ;f(y). Vi må derfor kunne slutte at (Ez)(zêU;f & μ(α)=μ;f(z) & Tror;(w',t)(x,z)) som sammen med (8) gir oss w'êμTror*;(x,t)(α) . Vi har nå vist: Tror;(w',t)(x,y) → w'êμ(Tror*;(x,t)(α)). Sammen med (9) impliserer dette åpenbart at (+) holder. Vi har dermed vist at (IV) og (III) impliserer (II).

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(B) Vi skal nå vise at (IV) og (II) impliserer (III). Vi vil da ha fullført beviset for teoremet. Anta derfor at (IV) og (II) holder. Dette innebærer at vi antar at

(1) (Az)(Ay)(Tror;(w,t)(x,y) & zêU;f & μ;f(y)=μ;f(z) → Tror;(w,t)(x,z)) og

(2) Tror;(w,t)(x,y) →

(Ez)(zêU;f & Tror;(w,t)(x,z) & μ;f(z)=Mg(w': Tror;(w',t)(x,y)))

holder for alle wêI og têT. For å vise at (III) holder antar vi for vilkårlig wêI og yêU at

(3) wêμ(Tror*;(x,t)(y)). Vi ønsker selvfølgelig å bevise at wêμ(Tror*;(x,t)(Tror*;(x,t)(y))).

Fra (3) følger ved hjelp av definisjonen av "Tr" at det må finnes z0 slik at

(4.1) z0êU;f & μ(y)=μ;f(z0) og

(4.2) Tror;(w,t)(x,z0)

Nå er det slik at det vi ønsker å vise er ekvivalent med (i lys av Definisjon 1):

(+) (Ez)(zêU;f & μ(Tror*;(x,t)(y))=μ;f(z) & Tror;(w,t)(x,z))

Fra (4.2) og (II) kan man slutte at det finnes z1 der man har:

(5.1) z1êU;f & Tror;(w,t)(x,z1)

(5.2) μ;f(z1)= Mg(w: Tror;(w,t)(x,z0)

Man skulle lett se at (+) følger fra (5.1) og (5.2) om man kan vise:

(++) μ(Tror*;(x,t)(y)) = Mg(w: Tror;(w,t)(x,z0)

La oss vise dette: (a) Vi viser først inklusjonen mot høyre. Anta for vilkårlig w' at w'ê μ(Tror*;(x,t)(y)). Da har vi ved hjelp av Definisjonen 1 at det finnes z2 der

(6.1) z2êU;f & μ(y) = μ;f(z2)

(6.2) Tror;(w',t)(x,z2). Ved hjelp av den andre konjunkten i (4.1) og (6.1) følger da (7) μ;f(z0)=μ;f(z2). Fra dette (6.2) og (1) kan man slutte: Tror;(w',t)(x,z0) som er det vi ønsker. (b) Vi viser så inklusjonen mot venstre i (++). Anta for vilkårlig w' at (8) Tror;(w',t)(x,z0). Fra dette og (4.1) følger:

(Ez)(zêU;f& μ(y) =μ;f(z) & Tror;(w',t)(x,z)). Men herav kan man slutte ved hjelp av definisjonen av Tr, Definisjon1, at w'êμ(Tror*;(x,t)(y).

Vi har dermed vist at (++) holder. Men (++) impliserer sammen med (5.1) og (5.2) at (+) holder. (+) impliserer så i sin tur wêμ(Tror*;(x,t)(Tror*;(x,t)(y))) som er det vi ønsker.

Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for Teorem 2. **QED.**

Vårt neste spørsmål er om (I) impliserer (II). Ved nærmere ettertanke skulle det være klart at dette neppe lar seg gjøre uten at man føyer til en ganske substansiell forutsetning, nemlig at det finnes en standard utvidet begrepsramme <B,ξ> som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn.

En annen komplikasjon er denne: Anta <B,ξ> er en standard utvidet begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagnene. Da vet vi at ξ avbilder CFm(B) en-entydig inn i U:f, men vi har ingen garanti for at det ikke finnes elementer i U;f som ikke er med i verdiområdet til ξ. Antar vi derfor at Tror;(w,t)(x,y) vet vi riktignok at y er et finstrukturert utsagn, men ikke at y êξ" CFm(B). Vi trenger dette siste for å kunne utlede konsekventen i tese (II), ie.

(Ez)(zêU;f & Tror;(w,t)(x,z) & μ;f(z) = Mg(w': Tror(w',t)(x,y)))

Det teorem som vi derfor vil bevise er dette:

Teorem 3: Anta det finnes en standard utvidet begrepsramme <B,ξ> som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Anta (I) holder. Da har man for alle x,y,w og t at

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(i) Tror;(w,t)(x,y) & yê ξ "CFm(B)
→ (Ez)(zêU;f & Tror;(w,t)(x,z) & μ;f(z) = Mg(w': Tror(w',t)(x,y)))

Bevis: Fra forutsetningen om at det finnes en standard utvidet begrepesramme <B,ξ> som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn samt tese (I) følger at det finnes B,ξ slik at

(1) <B,ξ> er en standard utvidet begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn.

(2) ⊨;B Tror_;(x,t)(α) → Tror_;(x,t)(Tror_;(x,t)(α))

der x,t er variabler assosiert med begrepsrammen B og αêFm(B). Fra (1) følger at B er en standard begrepsramme og derfor at det finnes D,X,In slik at (3) B=<D,X,In> og B er en begrepsramme. Fra (1) følger en mer at (4) ξ: CFm(B) -(1-1)→ U;f.

Vi setter per definisjon (5) n(x)= <2,0,0,x> om xêD.

Siden det skal bevises at (i) holder, anta (6) Tror;(w,t)(x,y) & yêξ"CFm(B) for vilkårlige w, t, x og y. Vi har da at det må finnes en formel βêCFm(B) slik at y =ξ(β). Det følger videre fra (6) i lys av (1) at man må ha (7) w ⊨;f ξ(Tror_;(n(x),n(t))(β)). Fra dette og (2) kan man slutte: (8) w ⊨;f ξ(Tror_;(n(x),n(t))(Tror_;(n(x),n(t))(β))). Fra dette følger i sin tur:

(9) Tror;(w,t)(x, ξ(Tror_;(n(x),n(t))(β))). La oss nå sette z0=ξ(Tror_;(n(x),n(t))(β)). Da har man fra (9)

(10.1) z0êU;f

(10.2) Tror;(w,t)(x,z0)

Videre har vi om w' er en vilkårlig entitet der w'êI at

w' ⊨;f z0 ↔ w' ⊨ ξ(Tror_;(n(x),n(t))(β))
↔ <<x,t>, ξ(β)> ê Ekst;w'(|Tror|) ↔ Tror;(w',t)(x,y)

siden y= ξ(β). Det følger at (11) μ;f(z0) = Mg(w': Tror;(w',t)(x,y)). Men fra (10.1), (10.2) og (11) kan man slutte:

(Ez)(zêU;f & Tror;(w,t)(x,z) & μ;f(z) = Mg(w': Tror(w',t)(x,y))).

Dette viser at (i) holder. **QED**.

Det neste spørsmålet man kan stille seg er om (II) impliserer (I). Også her er svaret benektende, men forutsetter man at (IV) holder kan man slutte at (I) holder om (II) gjør det. Dette er innholder i den følgende sats:

Teorem 4: Man har:
(IV) & (II) →(I).

Bevis: Anta (IV) og (II) holder. Dette innebærer at

(1) Tror;(w,t)(x,y) & zêU;f & μ;f(y) = μ;f(z) → Tror;(w,t)(x,z)

(2) Tror;(w,t)(x,y)
→ (Ez)(zêU;f & Tror;(w,t)(x,z) & μ;f(z) = Mg(w': Tror(w',t)(x,y)))

holder for alle x,y,z, w og t.

Vi skal vise at (I) holder. Anta derfor

(3) <B,ξ> er en vilkårlig standard utvidet begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Vi må da vise at ⊨;B Tror_;(x,t)(α) → Tror_;(x,t)(Tror_;(x,t)(α)). Anta derfor at w er en vilkårlig mulig verden, i, j er konstanter assosiert med B og α' er en vilkårlig instans av α. Det vil da være tilstrekkelig å vise:

(+) w ⊨;f ξ(Tror_;(i,j)(α')) → w ⊨;f ξ(Tror_;(i,j)(Tror_;(i,j)(α')))

Anta derfor (4) w ⊨;f ξ(Tror_;(i,j)(α)). Fra (3) følger at det finnes D,X,In slik at (5) B=<D,X,In> & ξ: CFm(B) -(1-1)→ U;f. Videre har vi selvfølgelig at B er en standard begrepsramme. Siden i, j er konstanter assosiert med B har vi at det finnes entydig bestemte entiteter x0,t0 der (6) x0,t0êD & i=<2,0,0,x0> og j= <2,0,0,t0>. Definerer vi for alle xêD navngivningsfunksjonen n ved å sette: n(x)=<2,0,0,x> har vi naturligvis at i=n(x0) og at j=n(t0). Fra (4) og definisjonen av hva som menes med at en utvidet begrepsramme representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn følger:

(7) <n;-1(i),n;-1(j)>,ξ(α')>êEkst;w(|Tror|)

Fra dette følger så: (8) Tror;(w,t0)(x0, ξ(α')). Fra dette og (2) kan man slutte at det finnes z0 slik at

(9.1) z0êU;f

(9.2) Tror;(w,t0)(x0,z0)

(9.3) μ;f(z0) = Mg(w': Tror;(w',t0)(x0,ξ(α')))

Det vil være tilstrekkelig å vise w ⊨;f ξ(Tror_;(i,j)(Tror_;(i,j)(α'))). Dette er imidlertid ekvivalent med (++) Tror;(w,t0)(x0,ξ(Tror_;(i,j)(α'))). Det vil derfor være tilstrekkelig å vise (++). Nå har vi om w' er en vilkårlig mulig verden at

w' ⊨;f ξ(Tror_;(i,j)(α')) ↔ Tror;(w',t0)(x0,ξ(α'))

Det følger derfor at (10) μ;f(ξ(Tror_;(i,j)(α'))) = Mg(w': Tror;(w',t0)(x0,ξ(α')))

Men fra (10), (9.2), (9.3) og (IV) kan man slutte at (++) holder.

Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for satsen. **QED**.

Korrespondanse og relaterte satser

Vi har i forrige avsnitt studert nødvendige og tilstrekkelig betingelser for at man skal ha ⊨ Tror*;(x,t)(α)=> Tror*;(x,t)(Tror*;(x,t)(α)). Det er et visst mønster i det vi viste ovenfor som også kan overføres til andre intensjonale relasjoner enn bare tros-relasjonen.

Ovenfor definerte vi funksjonen Tr og relasjonen Tror* på følgende vis:

(1.1) Tror*;(x,t)(α) = μ;-1(Mg(w: αêU & (Ez)(zêU;f &μ(α)=μ;f(z) & Tror;(w,t)(x,z))))

(1.2) Tror*;(w,t)(x,α) ↔ αêU & (Ez)(zêU;f &μ(α)=μ;f(z) & Tror;(w,t)(x,z))

Istedet for å ta vårt utganspunkt i trosrelasjonen, eller om man vil predikatet "Tror;(w,t)(x,y)", kunne man ha tatt sitt utgangspunkt i en hvilken som helst av de andre intensjonale relasjonene som vi har nevnt: "Vet;(w,t)(x,y)", "Ser;(w,t)(x,y)", "Husk;(w,t)(x,y)" eller "Innse;(w,t)(x,y)". De formlene som svarer til (1.1) og (1.2) om man ser på "Vet;(w,t)(x,y)" vil være:

Definisjon 1:

(1.1) Vet*;(x,t)(α) = μ;-1(Mg(w: αêU & (Ez)(zêU;f &μ(α)=μ;f(z) & Vet;(w,t)(x,z))))

(1.2) Vet+;(w,t)(x,α) ↔ αêU & (Ez)(zêU;f &μ(α)=μ;f(z) & Vet;(w,t)(x,z))

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

Anta nå at <B,ξ> er en standard utvidet begrepsramme som representerer en delmengde av de finstrukturerte utsagn. Det er da, som man lett ser, en viss korrespondanse mellom formler i Fm(B) og formler som man kan danne ved hjelp av de utsagnsteoretiske operasjonene =>,~, Ω og U, pluss operasjoner som Tr samt lignende operasjoner som svarer til de intensjonale relasjonene vi har nevnt. La oss se på for eksempel de følgende formler:

(i) Tror_;(x,t)(α)→Tror_;(x,t)(Tror;(x,t)(α))
(ii) Vet_;(x,t)(α) → Vet_;(x,t)(Vet_;(x,t)(α))
(iii) Ser_;(x,t)(α) → Vet_;(x,t)(Ser_;(x,t)(α))
(iv) Husk_;(x,t)(α) → Vet_;(x,t)(Husk_;(x,t)(α))
(v) Innse_;(x,t)(α) → Vet_;(x,t)(Innse_;(x,t)(α))

De formlene som svarer til disse vil være:

(a0) yêU → ⊨ Tror*;(x,t)(y) => Tror*;(x,t)(Tror*;(x,t)(y))
(b0) yêU → ⊨ Vet*;(x,t)(y) => Vet*;(x,t)(Vet*;(x,t)(y))
(c0) yêU → ⊨ Ser*;(x,t)(y) => Vet*;(x,t)(Ser*;(x,t)(y))
(d0) yêU → ⊨ Husk*;(x,t)(y) => Vet*;(x,t)(Husk*;(x,t)(y))
(e0) yêU → ⊨ Innse*;(x,t)(y) => Vet*;(x,t)(Innse*;(x,t)(y))

Vi bemerker at operasjonene Ser*, Husk*, Innse*, og de tilsvarende relasjoner Ser+, Husk+ og Innse+, er definert slik:

Definisjon 2:
(i) Ser*;(x,t)(α) = μ;-1(Mg(w: αêU & (Ez)(zêU;f &μ(α)=μ;f(z) & Ser;(w,t)(x,z))))
(ii) Ser+;(w,t)(x,α) ↔ αêU & (Ez)(zêU;f &μ(α)=μ;f(z) & Ser;(w,t)(x,z))
(iii) Husk*;(x,t)(α) = μ;-1(Mg(w: αêU & (Ez)(zêU;f &μ(α)=μ;f(z) & Husk;(w,t)(x,z))))
(iv) Husk+;(w,t)(x,α) ↔ αêU & (Ez)(zêU;f &μ(α)=μ;f(z) & Husk;(w,t)(x,z))
(v) Innse*;(x,t)(α) = μ;-1(Mg(w: αêU & (Ez)(zêU;f &μ(α)=μ;f(z) & Innse;(w,t)(x,z))))
(vi) Innse+;(w,t)(x,α) ↔ αêU & (Ez)(zêU;f &μ(α)=μ;f(z) & Innse;(w,t)(x,z))

Man kan også sammenligne formlene (a0) - (e0) ovenfor med de følgende formler:

(a1) Tror;(w,t)(x,y) → (Ez)(zêU;f & Tror;(w,t)(x,z) & μ;f(z)= Mg(w': Tror;(w',t)(x,y)))
(b1) Vet;(w,t)(x,y) → (Ez)(zêU;f & Vet;(w,t)(x,z) & μ;f(z)= Mg(w': Vet;(w',t)(x,y)))
(c1) Ser;(w,t)(x,y) → (Ez)(zêU;f & Vet;(w,t)(x,z) & μ;f(z)= Mg(w': Ser;(w',t)(x,y)))
(d1) Husk;(w,t)(x,y) → (Ez)(zêU;f & Vet;(w,t)(x,z) & μ;f(z)= Mg(w': Husk;(w',t)(x,y)))
(e1) Innse;(w,t)(x,y) → (Ez)(zêU;f & Vet;(w,t)(x,z) & μ;f(z)= Mg(w': Innse;(w',t)(x,y)))

Man ser at formelen (a1) er nøyaktig den samme formel som ble betegnet med "II" i forrige avsnitt. De andre formlene på denne listen svarer naturligvis til formlene (b0) - (e0) ovenfor.

Endelig er det i forbindelse med disse formlene nærliggende å betrakte:

(a2) Tror;(w,t)(x,y) & zêU;f & μ;f(z)=μ;f(y). → Tror;(w,t)(x,z)
(b2) Vet;(w,t)(x,y) & zêU;f & μ;f(z)=μ;f(y). → Vet;(w,t)(x,z)

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(c2) Ser;(w,t)(x,y) & zêU;f & μ;f(z)=μ;f(y). → Ser;(w,t)(x,z)
(d2) Husk;(w,t)(x,y) & zêU;f & μ;f(z)=μ;f(y). → Husk;(w,t)(x,z)
(e2) Innse;(w,t)(x,y) & zêU;f & μ;f(z)=μ;f(y). → Innse;(w,t)(x,z)

Som man ser er (a2) den tesen som vi i forrige avsnitt betegnet med "IV". Man at de resterende formlene (b2) - (e2) er helt analoge prinsipper for konstruksjonene "Vet", "Ser", "Husk" og "Innse".

Teorem 1: Anta følgende holder for alle w,t,x,y og z:
(i) Ser;(w,t)(x,y) & zêU;f & μ;f(z)=μ;f(y). → Ser;(w,t)(x,z)
Da har man at de følgende to påstander er ekvivalente:
(ii) yêU → ⊨ Ser*;(x,t)(y) => Vet*;(x,t)(Ser*;(x,t)(y))
(iii) Ser;(w,t)(x,y) →
(Ez)(zêU;f & Vet;(w,t)(x,z) & μ;f(z)= Mg(w': Ser;(w',t)(x,y)))

Bevis: **(A)**. Vi skal først vise at (i) og (ii) impliserer (iii). Anta derfor:
(1) (Ay)(yêU → ⊨ Tror*;(x,t)(y) => Tror*;(x,t)(Tror*;(x,t)(y))) og
(2) (Ay)(Az)(Vet;(w,t)(x,y) & zêU;f & μ;f(z)=μ;f(y). → Vet;(w,t)(x,z))
Vi ønsker å vise at (II) holder. Anta derfor for vilkårlig y at (3) Ser;(w,t)(x,y). Det følger da at yêU;f . Det følger da at μ;f(y)êPt(I) og derfor i kraft av aksiomene for presise deskriptive utsagn at det finnes α der (3.1) αêU & μ(α)=μ;f(y) & Ser;(w,t)(x,y). Fra dette og definsjonen av "Ser*;(x,t)(α)" kan man slutte (4) w ⊨ Ser*;(x,t)(α). Siden αêU følger fra (4) og (1) at (5) w ⊨ Vet*;(x,t)(Ser*;(x,t)(α)). Men fra dette og definisjonen av "Vt", Definisjon 1, kan man slutte:
(6) (Ez)(zêU;f & μ(Ser*;(x,t)(α))=μ;f(z) & Vet;(w,t)(x,z))
Med andre ord må det finnes z0 slik at
(7.1) z0êU;f
(7.2) μ(Ser*;(x,t)(α))=μ;f(z0) & Vet;(w,t)(x,z0)
For å vise at (II) holder vil det være tilstrekkelig å vise:
(+) μ(Ser*;(x,t)(α)) = Mg(w': Ser;(w',t)(x,y))
Fra dette, (7.1) og (7.2) følger konsekventen i tese (II)
Nå har man ved hjelp av Definisjon 1:
(8) w'êμ(Ser*;(x,t)(α)) ↔ (Ez)(zêU;f & μ(α)=μ;f(z) & Ser;(w',t)(x,z))
Fra (3.1) følger μ;f(y)=μ(α). Fra dette og høyre side i (8) kan man slutte, siden det er åpenbart fra (3) at yêU;f : (Ez)(zêU;f & μ;f(y)=μ;f(z) & Ser;(w',t)(x,z)). Men fra dette og (i) følger: Ser;(w',t)(x,y). Vi har derfor vist:
(9) w'êμSer*;(x,t)(α) → Ser;(w',t)(x,y)
Anta på den annen side at Ser;(w',t)(x,y). Fra (3.1) følger μ(α)=μ;f(y). Vi må derfor kunne slutte at (Ez)(zêU;f & μ(α)=μ;f(z) & Ser;(w',t)(x,z)) som sammen med (8) gir oss w'êμ(Ser*;(x,t)(α)) . Vi har nå vist: Ser;(w',t)(x,y) → w'êμ(Ser*;(x,t)(α)). Sammen med (9) impliserer dette åpenbart at (+) holder. Vi har dermed vist at (i) og (ii) impliserer (iii).

(B) Vi skal nå vise at (i) og (iii) impliserer (ii). Vi vil da ha fullført beviset for teoremet. Anta derfor at (i) og (iii) holder. Dette innebærer at vi antar at

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes

(1) (Az)(Ay)(Ser;(w,t)(x,y) & zêU;f & μ;f(y)=μ;f(z) → Ser;(w,t)(x,z)) og

(2) Ser;(w,t)(x,y) →

(Ez)(zêU;f & Vet;(w,t)(x,z) & μ;f(z)=Mg(w': Ser;(w',t)(x,y)))

holder for alle wêI og têT. For å vise at (ii) holder antar vi for vilkårlig wêI og yêU at (3) wêμ(Ser*;(x,t)(y)). Vi ønsker selvfølgelig å bevise at wêμ(Vet*;(x,t)(Ser*;(x,t)(y))).

Fra (3) følger ved hjelp av definisjonen av "Sr" at det må finnes z0 slik at

(4.1) z0êU;f & μ(y)=μ;f(z0) og

(4.2) Ser;(w,t)(x,z0)

Nå er det slik at det vi ønsker å vise er ekvivalent med (i lys av Definisjon 1):

(+) (Ez)(zêU;f & μ(Ser*;(x,t)(y))=μ;f(z) & Vet;(w,t)(x,z))

Fra (4.2) og (iii) kan man slutte at det finnes z1 der man har:

(5.1) z1êU;f & Vet;(w,t)(x,z1)

(5.2) μ;f(z1)= Mg(w: Ser;(w,t)(x,z0)

Man skulle lett se at (+) følger fra (5.1) og (5.2) om man kan vise:

(++) μ(Ser*;(x,t)(y)) = Mg(w: Ser;(w,t)(x,z0)

La oss vise dette: (a) Vi viser først inklusjonen mot høyre. Anta for vilkårlig w' at w'ê μ(Ser*;(x,t)(y)). Da har vi ved hjelp av Definisjonen 2 at det finnes z2 der

(6.1) z2êU;f & μ(y) = μ;f(z2)

(6.2) Ser;(w',t)(x,z2). Ved hjelp av den andre konjunkten i (4.1) og (6.1) følger da (7) μ;f(z0)=μ;f(z2). Fra dette (6.2) og (1) kan man slutte: Ser;(w',t)(x,z0) som er det vi ønsker. (b) Vi viser så inklusjonen mot venstre i (++). Anta for vilkårlig w' at (8) Ser;(w',t)(x,z0). Fra dette og (4.1) følger:

(Ez)(zêU;f& μ(y) =μ;f(z) & Ser;(w',t)(x,z)). Men herav kan man slutte ved hjelp av definisjonen av Sr, Definisjon 2, at w'êμ(Ser*;(x,t)(y).

Vi har dermed vist at (++) holder. Men (++) impliserer sammen med (5.1) og (5.2) at (+) holder. (+) impliserer så i sin tur wêμ(Tror*;(x,t)(Tror*;(x,t)(y))) som er det vi ønsker.

Vi har dermed gitt et fullstendig bevis for Teorem 1. **QED.**

Copyright © 2024 Morten Harboe Rognes